

병렬화된 비정렬 격자계를 이용한 3차원 비정상 유동 계산

김주성*·권오준**

Computation of 3-Dimensional Unsteady Flows Using an Parallel Unstructured Mesh

Joo Sung Kim* and Oh Joon Kwon**

Key Words : Unsteady Flow(비정상 유동), Dual Time Stepping Scheme(이중 시간 적분법), Spring Analogy(스프링 유사), Unstructured Mesh(비정렬 격자), 병렬(Parallel)

Abstract

In the present study, solution algorithms for the computation of unsteady flows on an unstructured mesh are presented. Dual time stepping is incorporated to achieve the 2-nd order temporal accuracy while reducing the linearization and the factorization errors associated with a linear solver. Hence, any time step can be used by only considering physical phenomena. Gauss-Seidel scheme is used to solve linear system of equations. Rigid motion and spring analogy method for moving mesh are all considered and compared. Special treatments of spring analogy for high aspect ratio cells are presented. Finally, numerical results for oscillating wing are compared with experimental data.

1. 서론

비정렬 격자를 이용하여 복잡한 3차원 형상에 대한 비정상 유동뿐만 아니라 점성 유동을 효율적으로 계산하고자 하는 많은 연구가 진행되고 있다. 비정렬 격자 기법은 정렬 격자 기법과 비교하여 격자 생성과 격자 적용이 용이하다는 장점이 있으나, 계산시간과 기억 용량을 많이 필요로 하는 단점을 가지고 있다. 비정상 유동 계산은 정상 유동에 비해 훨씬 많은 계산시간이 소요되며, 이로 인해 비정렬 격자 기법은 비정상 유동 계산에 적합하지 않은 것으로 인식될 수 있다. 하지만 참고문헌 [1,2]를 통해서, 실제적인 복잡한 유동 현상을 계산하는데 있어서 비정렬 격자가 매우 효율적으로 사용될 수 있음을 볼 수 있다.

본 연구에서는 참고문헌 [3]에서 개발된 비정렬 격자를 사용하는 병렬화된 3차원 점성 유동해석 프로그램을 기본으로 하여, 공탄성(aeroelasticity) 해석을 수행할 수 있는 비정상 유동 해석 프로그램을 개발하였다. 시간 적분 기법으로 외재적 기법(explicit scheme)은 적용하기가 용이하며, 시간 단위(time scale)가 작은 음향학 해석 등에는 효율적으로 사용될 수 있다. 하지만 대부분의 공탄성 현상들은 낮은 주파수 영역에서 발생하는 현상이며, 이러한 문제를 해결하기 위해서는 매우 큰 시간간격을 사용할 수 있는 내재적 기법의 사용이 필수적이다. 비정상 유동 계산에서 내재적 기법이 사용되었을 때, 각각의 시간 단계에서 비정상 잔류량이 사라지도록 하여야 시간정확도를 유지할 수 있다. 이를 위해 참고문헌 [4,5]에서는 내부 반복 계산(inner iteration) 기법이 사용되고 있으며, 본 연구에서는 Jameson[4]이 제안한 이중 시간 적분법(dual time stepping scheme)을 사용하였다.

공탄성 현상과 같이 매시간 단계에서 물체의 형상이 변하는

비정상 유동 계산에서는 물체의 형상에 맞는 격자 처리 기법이 매우 중요하다. 본 연구에서는 스프링 유사(spring analogy) 기법을 사용하였으며, 기법의 안정성과 격자질의 유지를 위해 여러 가지 기법을 적용하여 검증하였다.

2. 지배방정식 및 수치적 차분법

지배방정식으로 이상기체에 대한 3차원 Reynolds-averaged Navier-Stokes 방정식과, 유동장의 난류 효과를 모사하기 위한 Spalart-Allmaras 난류 모형 방정식[6]을 사용하였으며, 고체 경계면에서는 벽함수(wall function)를 사용하였다. 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식과 Spalart-Allmaras 난류 모형 방정식은 격자 중심 유한체적법(cell-centered finite volume scheme)을 사용하여 비슷한 방법으로 차분화되었다. Navier-Stokes 방정식의 대류항은 Roe의 FDS 기법을 사용하여 차분화 하였으며, Frink의 방법을 사용하여 고차정확도를 얻었다. 또한 확산항은 Mitchell이 제안한 방법을 사용하였다. 난류 모형 방정식의 차분은 참고문헌 [6]에서 제시한 방법을 사용하였으며, 대류항은 FVS 기법을 확산항은 Navier-Stokes 방정식과 같은 방법을 사용하였다. 개발된 해석 프로그램은 영역분할법을 통해 병렬화 되었으며, Karypis가 개발한 Metis 라이브러리를 사용하였다. 또한 각 분할 영역간의 자료 교환은 MPI 라이브러리를 사용하여 구현하였다. 정상 상태 수치 기법은 참고문헌 [3]에 자세히 기술되어 있다.

3. 이중 시간 기법

이중 시간 기법은 Jameson[4]에 의해 개발되었으며, 실제 시간 단계(real-time level)에서 내재적인 방법을 사용하여 차분화된 다. 따라서 사용될 수 있는 시간간격이 유동해석의 정확도만을

* KAIST 항공우주공학과 대학원, soo@kaist.ac.kr

** KAIST 항공우주공학과 부교수, ojkwon@kaist.ac.kr

고려하여 정해질 수 있으므로 매우 효율적으로 비정상 유동 계산에 사용될 수 있다. 또한, pseudo-time 단계에서는 정상 상태 방정식이 되며, 이로 인해 정상 유동 계산에서 사용되는 여러 가지 수렴증진 기법이 사용될 수 있다.

편미분 형태의 Navier-Stokes 방정식에 유한 체적법을 적용하면 다음과 같이 상미분 방정식 형태로 쓰여질 수 있다.

$$\frac{d}{dt}(Q_i V_i) + R(Q_i) = 0 \quad (1)$$

여기서 $R(Q_i)$ 는 i 셀에 해당하는 대류항과 확산항을 나타낸다. 식 (1)에 대해서 fully implicit 방법을 사용하고, 시간에 대한 2차 정확도 후방 차분(backward differencing)법을 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{3V^{n+1}Q^{n+1} - 4V^nQ^n + V^{n-1}Q^{n-1}}{2\Delta t} + R(Q^{n+1}) = 0 \quad (2)$$

위 식은 Q^{n+1} 에 대해 비선형이며, 다음과 같이 비정상 잔류치(unsteady residual), $R^*(Q)$, 를 정의함으로써 정상 상태 해석을 위한 식의 형태로 바뀔 수 있다.

$$R^*(Q^{n+1}) = \frac{3V^{n+1}Q^{n+1} - 4V^nQ^n + V^{n-1}Q^{n-1}}{2\Delta t} + R(Q^{n+1}) = 0 \quad (3)$$

식 (3)은 pseudo-time, τ , 에 대한 시간 항을 첨가함으로써, 시간 적분법으로 계산될 수 있는 다음과 같은 정상 상태 방정식이 된다.

$$\frac{dQ^{n+1}}{d\tau} + \frac{1}{V} R^*(Q^{n+1}) = 0 \quad (4)$$

식 (4)의 정상 상태 해는 $R^*(Q^{n+1}) = 0$ 를 만족하며, 이 해는 또한 비정상 상태 방정식을 표현하는 식 (2)를 만족한다. Pseudo-time에 대한 정상 상태 방정식을 나타내는 식 (4)는 어떠한 시간 적분법을 사용해서도 계산될 수 있으며, 본 연구에서는 내재적 방법을 사용하였다. 식 (4)를 pseudo-time에 대해 내재적 방법으로 차분화하면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = \frac{Q^{m+1} - Q^m}{\Delta \tau} = -\frac{1}{V} R^*(Q^{m+1}) \quad (5)$$

식 (5)에서 비정상 잔류치, $R^*(Q^{m+1})$,의 선형화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R^*(Q^{m+1}) &= R^*(Q^m) + \left(\frac{\partial R^*}{\partial Q} \right)_{Q^m} \Delta Q^m \\ &= R^*(Q^m) + \left(\frac{\partial R}{\partial Q} \right)_{Q^m} \Delta Q^m + \frac{3V}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하면 한 단계의 real time에 대해 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[\left(\frac{V}{\Delta \tau} + \frac{3V}{2\Delta t} \right) I + \left(\frac{\partial R}{\partial Q} \right)_{Q^m} \right] \Delta Q^m = -R^*(Q^m) \quad (7)$$

식 (7)의 형태는 정상 상태에 해당하는 선형방정식과 매우 비슷하며, 잔류항이 비정상 잔류항으로 수정된 점과 선형방정식의 대각항에 $3V/2\Delta t$ 가 첨가된 점이 다르다. 본 연구에서는 Gauss-Seidel 방법으로 식 (7)을 계산하였으며, 대각항에 첨가되는 $3V/2\Delta t$ 항으로 인해 정상 상태에 해당하는 선형방정식에 비해 대각우세 성질이 더욱 높아지며, 이로 인해 수렴성도 좋아진다. 또한 pseudo-time step, $\Delta \tau$, 는 CFL 수를 사용하여 local time stepping 방법을 사용하여 정하였다.

4. 격자 변형 기법

움직이는 물체에 대한 비정상 유동을 계산하기 위해서는, 각각의 시간 단계에서의 물체의 형상에 맞는 격자를 형성하여야 한다. 이러한 방법으로는 매 시간 단계에서 전체 격자를 다시 생성하는 방법, 초기 격자를 변형하여 사용하는 방법, 두 기법을 적절히 혼용하는 방법 등으로 나눌 수 있으며, 격자 변형을 위해서는 스프링 유사(spring analogy)방법, 물리적인 유사 방법 등이 쓰이고 있다.

본 연구에서는 등방성 사면체 격자에 대한 격자 변형을 위해서 참고문헌 [7]에 제시된 수정된 스프링 유사 방법을 사용하였다. 스프링 유사 방법에서 각각의 격자점은 초기에 평형상태로 있는 스프링으로 연결되어 있다고 가정된다. 움직이는 경계면에 존재하는 격자점의 위치가 변화되면, 교란된 스프링 시스템은 새로운 평형상태로 가게되며, 격자점 i 에 대한 새로운 평형 상태 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^{J_i} \lambda_{ij} k_{ij} (\Delta s_i - \Delta s_j) = 0 \quad (8)$$

여기서, Δs_i 와 Δs_j 는 각각 격자점 i 와 이에 이웃하는 격자점 j 의 변위이며, k_{ij} 는 $i-j$ 격자선(edge)에 해당하는 스프링 상수이며 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$k_{ij} = \frac{1}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}} \quad (9)$$

식 (8)에서 λ_{ij} 는 가중함수로써, $\lambda_{ij} = 1/L_{ij}$ 를 사용하였다. 여기서 L_{ij} 는 $i-j$ 격자선과 움직이는 물체 표면과의 최소 거리이며, 이러한 가중함수의 사용으로 움직이는 물체 표면 근처의 스프링 상수는 매우 커지고, 물체와의 거리가 증가함에 따라 점점 감소하는 경향을 갖게 된다. 따라서 물체 표면 근처의 격자는 상대적으로 강성이 큰 스프링으로 구성되며, 이로 인해 강체 운동과 비슷하게 움직인다. 물체 표면과의 거리가 어느 정도 이상이 되면 가중 함수의 값이 작아지고, 이 영역에서의 격자가 물체의 움직임에 의한 격자 변형에 해당되는 변위를 흡수한다. 이러한 작용에 의해 격자 크기가 상대적으로 작고, 변위가 가장 큰 물체 표면 근처의 격자를 강체 처럼 움직이고, 상대적으로 큰 격자에서 변위를 흡수할 수 있게 되어, 강건하게 스프링 유사 방법을 사용하여 격자 변형을 할 수 있게 된다.

스프링 상사 방법은 등방성 비점성 격자를 움직이게 하는 데는 효과적이지만, 높은 중횡비를 갖는 점성 격자에 대해서는 미소한 움직임에 대해서도 격자의 꼬임 현상 등이 발생하여, 강건하게 사용될 수 없다. 본 연구에서는 참고문헌 [7]에서와 같이 점성 격자는 비점성 격자와 다른 방법으로 처리하였다. 본 연구에서는 ALM 방법으로 점성 격자를 생성하였으며, 이 방법은 물체 경계면에서 지정된 방향으로 격자점을 적층하여 만드는 방법으로 정렬격자계에서 O-type 격자와 같은 격자 형상(topology)을 갖는다. 이러한 격자 생성 과정에서는 해당하는 격자점의 적층의 출발이 되는 경계면 격자점이 항상 존재한다. 본 연구에서는 이러한 형상을 갖는 격자에 대해서, 경계면 격자점이 움직이면, 그에 해당하는 격자점의 변위를 경계면 격자의 변위와 같게 하여 점성 격자의 격자점을 이동시키는 방법을 사용하였다.

5. 결과 및 검토

개발된 기법에 대한 검증은 위해 NACA 0012 익형에 대해 다음과 같은 식의 주기적인 운동을 하는 유동에 대해 해석하였다.

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(2kM_\infty t)$$

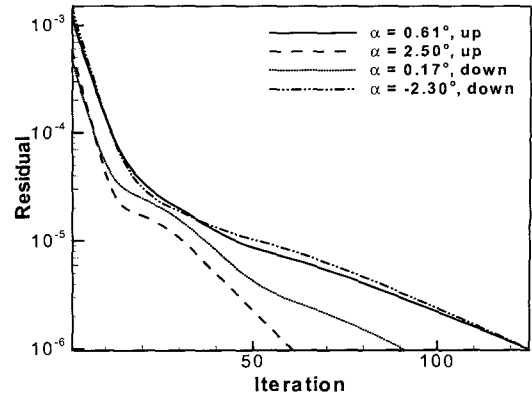
본 연구에서는 $\alpha_m = 0.016^\circ$, $\alpha_0 = 2.51^\circ$, $k = 0.0814$ 이며, 자유류의 마하수는 0.755이며, 레이놀즈수는

5.5×10^6 인 유동에 대해 해석하였다. 사용된 격자는 3차원 NACA 0012 격자에 대해, 날개의 양옆을 대칭면으로 처리하여 2차원 익형으로 모사하였으며, 66,568개의 격자와 15,600개의 격자점으로 구성되었다.

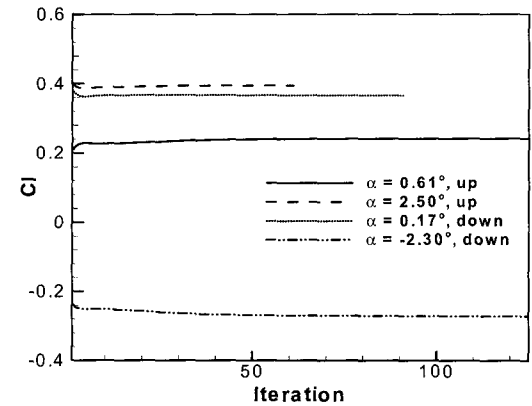
5.1 비점성 유동 해석

비정상 유동 계산의 정확도 검증은 위해 각각의 비정상 시간 단계에서의 유동값의 수렴성에 대한 조사를 하였다. Fig. 1은 시간 간격, $\Delta t = 1$ 이며, 격자가 강제 운동을 하는 경우에 대해 여러 가지 받음각에서의 해석 결과이다. $\Delta t = 1$ 인 경우, 약 50 번의 시간 단계 당 한 주기의 운동을 한다. Fig. 1a는 pseudo-time sub-iteration 동안에 비정상 잔류치, R^* 의 수렴성을 보이고 있으며, 50에서 100번 정도의 반복 계산 동안에 10^{-6} 정도로 감소하는 것을 볼 수 있다. Fig. 1b와 Fig. 1c는 양력과 모멘트 계수의 수렴성을 보이고 있으며, 비정상 잔류치가 10^{-6} 정도가 되기 전에 항상 유동 값이 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 양력에 대해서는 비정상 잔류치가 약 10^{-4} 정도에 해당하는 반복 계산에서 모두 수렴하지만, 모멘트의 경우는 10^{-5} 보다 작은 잔류치에서 수렴함을 볼 수 있다. 이러한 결과를 통해서, 본 연구에서는 비정상 잔류치의 값이 10^{-6} 보다 작아질 때까지 pseudo-time sub-iteration을 수행함으로써 비정상 유동 계산의 정확도를 유지하였다.

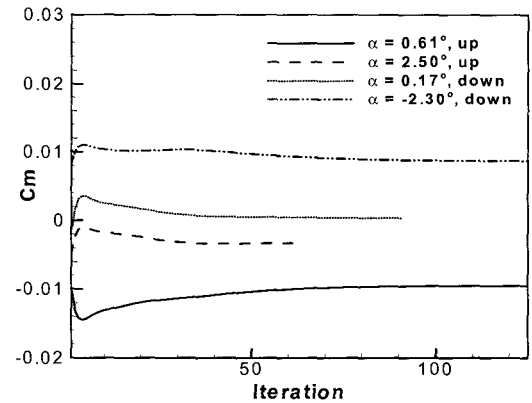
Fig. 2에서 격자를 강체로 움직이는 경우에 대해 여러 가지 다른 시간 간격에 대한 결과와 스프링 상사 방법을 사용한 결과를 실험치와 비교하였다. 먼저 격자를 강체로 움직이는 경우에 대해 여러 가지 시간 간격에 대해서 양력과 모멘트 계수 모두 서로 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 큰 시간 간격에서도 이처럼 정확도를 잘 유지할 수 있는 원인은 이중 시간 적분법의



a) Unsteady residual.



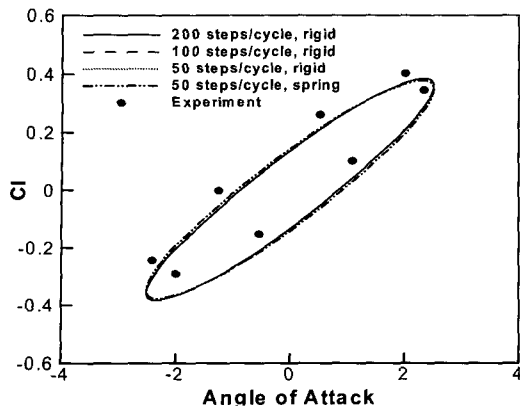
b) Lift coefficient.



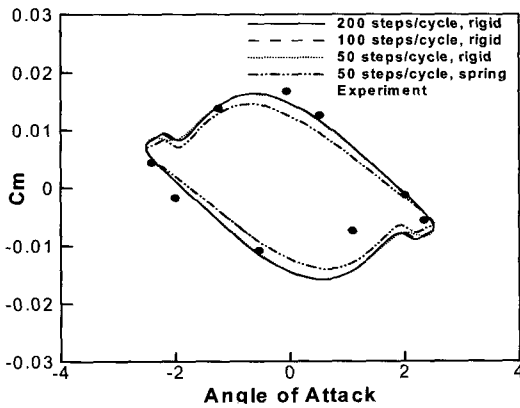
c) Moment coefficient.

Fig. 1 Convergence histories of the unsteady residual, and lift and moment coefficients during pseudo-time sub-iteration.

사용으로 시간에 대해 정확히 2차 정확도를 유지할 수 있기 때문이다. 또한 강제 운동의 경우와 스프링 상사 방법을 사용할 경우를 비교해 볼 때, 양력에 대해서는 잘 일치하지만, 모멘트에 대해서는 약간의 차이를 보이고 있다. 이러한 원인은 스프링 상사 방법을 사용할 경우 발생하는 격자의 변형에 의해 해가 약간씩 달라져서 발생한 결과라 생각된다. 두 기법 모두 실험치와 비교해 볼 때, 양력 계수와 모멘트 계수 모두에 대해서 차이가 있지만, 차이의 정도와 경향은 다른 연구자들과 비슷하다.



a) Lift coefficient.



b) Moment coefficient.

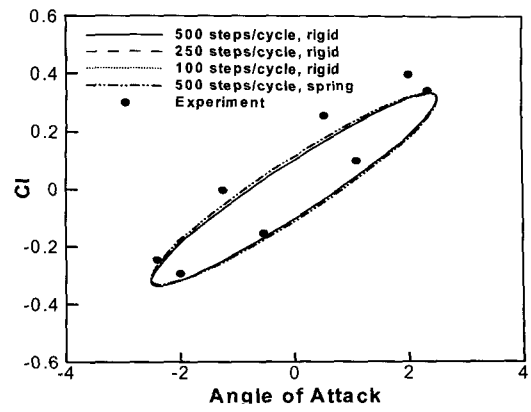
Fig. 2 Lift and moment coefficients loops for inviscid flow computation.

5.2 점성 유동 해석

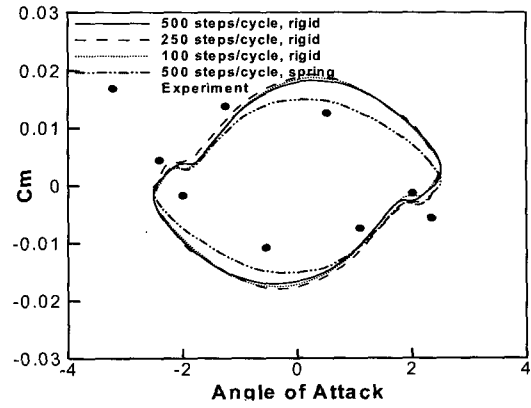
Fig. 3에서 비점성 계산에서와 같이 격자를 강제로 움직이는 경우에 대해 여러 가지 다른 시간 간격에 대한 결과와 스프링 상사 방법을 사용한 결과를 실험치와 비교하였다. 점성 유동에 대한 선형방정식의 수렴성은 비점성 유동의 경우에 비해 낮으며, 따라서 비정상 단계에서의 정확도를 유지하기 위해서는 pseudo-time sub-iteration이 더 많이 필요하다. 본 연구에서는 각 단계에서 너무 많은 sub-iteration을 피하기 위해 점성 유동 계산에서는 비점성 유동 계산에서보다 작은 시간 간격을 사용하였다. Fig. 3에서 격자를 강제로 움직이는 경우에 대해 여러 가지 시간 간격에 대해서 해석 결과가 서로 잘 일치함을 볼 수 있다. 또한 점성 유동에 대해서도 스프링 상사 방법이 잘 적용되었음을 확인 할 수 있으며, 두 기법에 대한 결과의 차이는 비점성 유동의 경우와 비슷하다. 또한 실험치와 비교해 볼 때, 차이가 존재하며 이러한 경향은 다른 연구자들과 비슷하다.

6. 결론

본 연구에서는 3차원 정상 상태 유동 해석 프로그램을 기본으로 하여, 공탄성 해석을 위한 비정상 유동 해석 프로그램을 개발하였다. 시간 적분 기법으로 내재적 기법인 이중시간 적분법을 사용함으로써, 매우 큰 시간 간격에서도 안정적이며, 정확한 비정상 유동 해석 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 격자 변형 기법으로 스프링 상사 방법을 사용하였으며, 강제 운동의 경우와 비교하여 대체적으로 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었



a) Lift coefficient.



b) Moment coefficient.

Fig. 3 Lift and moment coefficients loops for viscous flow computation.

다. 또한 점성 격자에 대한 특별한 처리를 통해 점성 유동에 대해서도 스프링 상사 방법을 강건하게 사용할 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- [1] Oh, W. S., Kim, J. S., and Kwon, O. J., "Numerical Simulation of Two-Dimensional Blade-Vortex Interactions Using Unstructured Adaptive Meshes", *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 2, 2002, pp. 474-480.
- [2] Kang, H. J. and Kwon, O. J., "Effect of Wake Adaptation on Rotor Hover Simulations Using Unstructured Meshes", *Journal of Aircraft*, Vol. 38, No. 5, 2001, pp. 868-877.
- [3] 강희정, "비정렬 적응 격자계를 이용한 정지비행 로터 공력의 수치적 모사", 한국과학기술원 박사학위 논문, 2001.
- [4] Alonso, J. J. and Jameson, A., "Fully-Implicit Time-Marching Aeroelastic Solutions", *AIAA Paper 94-0056*, 1994.
- [5] Pulliam, T., "Time Accuracy and the Use of Implicit Methods", *AIAA Paper 93-3360-CP*, 1993.
- [6] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R., "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows", *AIAA Paper 92-0439*, 1992.
- [7] Pirzadeh, S. Z., "An Adaptive Unstructured Grid Method by Grid Subdivision, Local Remeshing, and Grid Movement", *AIAA Paper 99-3255*, 1999.