

## 다중 격자 Navier-Stokes 해석의 수렴성 증진 기법

김윤식\* · 권장혁\*\* · 최윤호\*\*\* · 이승수\*\*\*\*

### Convergence Acceleration Methods for the Multigrid Navier-Stokes Computation

Yoonsik Kim<sup>\*</sup>, Jang Hyuk Kwon<sup>\*\*</sup>, Yun Ho Choi<sup>\*\*\*</sup>, Seungsoo Lee<sup>\*\*\*\*</sup>

**Key Words :** 다중 격자, 예조건화 기법, 수렴성 증진, 다단계 시간 전진 기법, Navier-Stokes 방정식

#### Abstract

The convergence acceleration methods for the compressible Navier-Stokes equations are studied, which are multigrid method and implicit preconditioned multistage time stepping method. In this paper, the performance of implicit preconditioning methods are studied for the full-coarsening multigrid methods on the high Reynolds number compressible flow computations. The effect of numerical flux on the convergence are investigated for the inviscid and viscous calculations.

#### 1. 서론

전산 유체 역학에서 수렴 가속화 기법은 단순한 정상 상태 유동 해석의 시간 절감뿐만 아니라 이중 시간 전진을 이용한 비정상(unsteady) 유동장 해석, 공력 최적 설계[1] 등과 같이 반복적인 유동해석이 필요한 계산에 있어 필수적이다. 이러한 수렴 가속화 기법들 중 가장 널리 알려진 기법으로는 다중 격자 기법을 들 수 있다.

다중 격자 기법은 1982년 Ni[2]가 Euler 방정식으로 적용 범위를 넓히면서 전산유체역학 기법에도 응용되기 시작하였다. 이후 1980년대에는 Jameson[3-4] 등에 의해 Euler 방정식의 수렴성 증진을 위하여 활용되었으며 1990년대 이후에 Navier-Stokes 방정식으로의 확장이 시도되어 왔다[5].

다중 격자 기법은 성근 격자에서는 조밀 격자의 저주파 영역의 오차가 고주파 영역의 오차로 나타나므로, smoother를 이용하여 이러한 저주파 영역의 오차를 보다 효과적으로 감쇠시킴으로써 단일 격자 기법에 비하여 우수한 수렴성을 얻을 수 있게 되는 기법이다.

다중 격자 기법에서 각 격자 단계에서의 smoother는 고주파 영역의 에러에 대한 우수한 감쇠특성을 갖추고 있어야 한다. 이러한 특성을 갖는 smoother로서 대표적인 기법이 다단계 시간 전진 기법(multistage time stepping method)이라 할 수 있다. 이 방법은 Jameson[3]에 의해 고차의 시간 정확도 대신 고주파 영역의 에러에 대한 감쇠특성을 향상시키며 안정영역을 최대화하도록 설계되었으며, 이후 점성 유동장 해석을 위하여 Martinelli[5]에 의해 개선된 바 있다. 한편, 상류 차분 잔류치 연산자에 적합하도록 Tai[6], Lynn[7], 박태상[8] 등에 의해 개선된 바 있다. 본 연구에서는 Tai[6]에 의하여 제안된 다단계 시간

전진 기법을 사용하였다.

다단계 시간 전진 기법이 스칼라 형태의 방정식에 적합하게 설계되었으므로, 유동장 지배 방정식과 같은 연계된 방정식의 해석을 위해서는 예조건화 기법과 연계하여 사용함으로써 보다 우수한 성능을 얻을 수 있음이 기존의 연구자들에 의해 알려져 있다[10-13]. 이러한 예조건화 기법으로서는 point-Jacobi, line-Jacobi 등과 같은 예조건화 기법을 들 수 있으며, 완전 성김 기법의 다중 격자 기법을 사용함에 있어서는 2차원의 경우 양방향의 내재적 예조건화 기법을 도입함으로써 저주파수 영역의 오차를 효과적으로 감쇠시킬 수 있다[12]. 본 연구에서는 Euler 방정식과 Navier-Stokes 방정식의 해석시 point-Jacobi, Alternating-direction line Jacobi(DDADI) 예조건화의 적용을 통하여 그 수렴특성을 비교하였다. 또한, 수렴성에 영향을 미치는 요소로서 수치유속에 따른 정확도 및 수렴특성의 비교를 위하여 2차 upwind TVD기법[9]과 2차 정확도의 MUSCL형태의 선형 재구성 기법[14]을 적용하여 아음속 및 천음속 영역에서 그 수렴 특성을 비교하였다.

#### 2. 지배 방정식 및 수치 해석 기법

##### 2.1 지배 방정식

일반적인 압축성 점성 유동의 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식을 2차원 직교 좌표계에서 미분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_v}{\partial y} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{q}$ 는 유동 변수를,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ 는 비점성 유속 벡터를,  $\mathbf{f}_v$ ,  $\mathbf{g}_v$ 는 점성 유속 벡터를 나타내며 자세한 식은 참고문헌[9]에 자세히 기술되어 있다. 본 연구에서는 완전기체 관계식을 사용하였

\* KAIST 기계공학과 항공우주공학전공, arcturus@kaist.ac.kr

\*\* KAIST 기계공학과 항공우주공학전공, jhkwon@kaist.ac.kr

\*\*\* 아주대학교 기계 및 산업공학부, ychoi@madang.ajou.ac.kr

\*\*\*\* 국방과학연구소, numerics@hananet.net

으며, 점성계수는 Sutherland의 법칙을 사용하였다.

## 2.2 공간 이산화

일반 좌표계로 변환시킨 지배 방정식을 이산화 하기 위해 격자 중심 유한 체적법을 사용하였다. 공간 이산화된 지배 방정식은 식(2)와 같이 각 격자 중심에서 정의되는 유동 변수 및 잔류치에 대한 연계된 상미분 방정식의 형태로 표현된다.

$$\frac{dQ_{i,j}}{dt} + R_{i,j} = 0 \quad (2)$$

여기서 잔류치(residual)는 다음과 같다.

$$R_{i,j} = \sum_{s=1}^{N_{jacc}} \left( F_{s^E} - \frac{\sqrt{\gamma M_\infty}}{Re_\infty} F_{s^V} \right) \cdot \hat{n}_s \quad (3)$$

대류항의 계산에 있어서 격자면의 유속은 Roe[15]의 FDS를 사용하였으며, 2차 upwind TVD 기법을 위한 제한자 함수[16]는 minmod 제한자와 van Leer 제한자를 사용하였다. MUSCL 형태의 선형 재구성 기법에는 각 격자면의 양쪽 값을 외삽(extrapolation)하기 위해 각 격자면의 양쪽의 격자 중심값과 반대쪽 면의 두 격자점의 유동 변수로부터 구해진 구배를 이용하여 외삽 하였으며, 구배에 대한 제한자 함수는 적용하지 않았다. 각 격자점의 유동 변수는 역 면적 가중 평균치(inverse area-weighted averaged values)를 사용하였다.

점성항에 대해서는 계산 격자의 경계면에서 중앙 차분을 이용하였다. 난류 유동장 계산을 위한 난류 모델은 Baldwin-Lomax[17]의 대수적 모델을 사용하였다.

## 2.3 시간 전진 기법

각 계산 격자에서 적분된 잔류치를 이용한 시간 전진 기법을 Euler 후방 차분 기법을 도입하여 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left( \frac{V}{\Delta t} I + \frac{\partial R_m}{\partial q} \right) \Delta q = - R_m(q^0) \quad (4)$$

식 (4)에서  $R_m$ 는  $m$ 차 정확도의 Navier-Stokes 잔류치 연산자를 의미한다. 식 (4)의 좌변의 계수 행렬을 근사 인자화를 통한 내재적 예조건화 기법은 위의 계수 행렬을 근사화 함으로써 역행렬 계산에 요구되는 계산 시간을 줄이게 된다. 내재적 예조건화 행렬은 다음과 같이 1차 정확도의 잔류치 연산자를 이용하였다.

$$P(q) \approx \left( \frac{V}{\Delta t} I + \frac{\partial R_1(q)}{\partial q} \right) \quad (5)$$

위 식에서 시간 간격  $\Delta t$ 는 SER(Switched Evolution Relaxation) 기법[18]을 사용하였다.

위의 식(5)의 예조건자는 블록 대각 행렬과 4개의 블록 off-diagonal 행렬로 구성되며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P q_{i,j} = L_i q_{i-1,j} + D_i q_{i,j} + U_i q_{i+1,j} + L_j q_{i,j-1} + D_j q_{i,j} + U_j q_{i,j+1} \quad (6)$$

위의  $L, D, U$  는 잔류치 연산자의 선형화 과정을 통하여 얻어진다. 본 연구에서 사용된 point-Jacobi 예조건자는 다음과 같다.

$$P = P_J = \left[ \frac{V}{\Delta t} + D \right] \quad (7)$$

여기서,  $D = D_i + D_j$  이다. 그리고, DDADI 예조건자는 다음과 같다.

$$P = P_{DD} = P_x [ P_J ]^{-1} P_y$$

$$P_x = \left[ \frac{V}{\Delta t} + T_i \right] \quad (8)$$

$$T_i = [ L_i, D, U_i ]$$

$$T_j = [ L_j, D, U_j ]$$

위의  $T_i, T_j$ 는 블록 3대각 행렬의 형태를 가진다.

각 격자점에서 수치해는 예조건화된 다단계 시간 전진 기법을 이용하여 시간 전진된다. 이때 예조건자는 첫 번째 단계에서 구해진 값으로 고정하였다.

$$q^k = q^{(0)} - \alpha_k [ P(q^0) ]^{-1} R^{k-1} \quad (9)$$

위에서  $\alpha_k$ 는 다단계 시간전진 계수를 의미한다. 본 연구에서는 Tai[6]에 의해 제안된 4단계 시간 전진 기법을 이용하였으며, 점성 유동장 계산에서도 동일한 값을 사용하였다.

## 2.4 경계 조건 및 다중 격자 기법

원방 경계에서 아음속의 경우 Riemann 불변치를 사용하였다. 벽면에서는 밀도와 압력은 하나 위의 격자로부터 외삽하고 속도는 점성 유동의 경우는 no-slip 조건을, 비점성의 경우는 벽면에 수직인 속도 성분은 0으로 하였다.

다중 격자 기법은 비선형 방정식 해석에 적합한 FAS(Full Approximation Scheme)를 사용하였으며, 성근 격자는 full-coarsening 기법을 이용하였고, 톱니 사이클을 사용하였다. 유동 변수에 대한 restriction 연산자는 면적 가중 평균 연산자를 사용하였으며, prologation 연산자는 bilinear interpolation 연산자를 사용하였다. 조밀 격자와 성근 격자에서의 시간 전진 과정, 격자들간의 유동 변수 및 잔류치의 전달 등 다중 격자 사이클 과정에서의 자세한 내용은 참고문헌[9]에 자세히 기술되어 있다.

## 3. 수치 해석 결과

### 3.1 비 점성 유동장 해석

비 점성 유동장 해석시 예조건화 기법 및 수치 유속에 따른

수렴특성을 비교하기 위하여 Ni-bump[2](10% arc-bump) 유동장에 대한 해석을 수행하였다. 격자점은  $65 \times 17$ 로 이루어져 있다. Fig. 1은 입구 Mach 수 0.5의 아음속 유동장의 계산 결과이며, Fig. 2는 입구 Mach 수 0.675의 천음속 유동장의 계산 결과를 나타낸 것이다. Fig. 3, 4는 각 경우에 대해 4단계 다중 격자 기법을 적용한 경우의 수렴 곡선을 나타낸 것이다. 아음속 유동장의 경우 강한 충격파와 같은 불연속면이 존재하지 않으므로 수치 유속에 따른 수치해의 차이가 거의 나타나지 않는다. 그러나, 충격파가 발생하는 천음속 유동장의 경우 제한자 함수를 사용한 2차 upwind TVD 기법의 경우 다소 우수한 충격파 포획 성능을 나타냄을 확인할 수 있다. 수렴 곡선을 통해 볼 때 아음속의 경우 point-Jacobi 예조건자를 적용한 경우에 비해 DDADI 예조건자가 약 4배정도, 천음속의 경우 약 3배정도 우수한 수렴성을 나타내는 것을 확인할 수 있다. 이는 계산 시간을 기준으로 볼 때 2배 이상의 효과를 얻게 된다. 수렴 곡선에서 2차 upwind TVD 기법은 점근 영역에서 수렴성의 저하 현상을 나타내는 것을 확인할 수 있으며, 이러한 특성은 점근 영역에서의 수렴성에 관한 연구[12]에서 이미 언급된 바 있으며, 다차원 효과를 갖는 MUSCL 형태의 선형 재구성 기법의 경우 이러한 특성이 상당부분 완화 될 수 있는 것을 확인할 수 있다. 그러나, 보다 강한 불연속 면이 존재하는 유동장의 경우 비선형적인 제한자 함수를 도입하지 않는 선형 재구성 기법은 적용하기 곤란한 단점이 있다.

### 3.2 난류 유동장 해석

난류 유동장 해석 예제로서 RAE 2822 익형 주위의 천음속 난류 유동장을 해석하였다. 유동 조건은  $M_\infty = 0.729$ ,  $Re_\infty = 6.5 \times 10^6$ ,  $\alpha_\infty = 2.31^\circ$  이다. 난류 모델은 잔류치가  $10^{-4}$  이하로 수렴하였을 때 난류 점성 계수를 고정시켰다. 다중 격자 기법의 적용을 위해 가장 조밀한 격자계에서만 난류 점성 계수를 구하고, 성근 격자계에서는 역면적 가중을 이용하여 전달된 값을 이용하였다. 난류 유동장 계산을 위한 격자계는  $383 \times 65$ 의 C형 격자계로 이루어져 있으며, 난류 모델의 정확성을 위하여 벽면에서 첫 번째 격자 간격은  $10^{-5}$  정도의 크기를 갖는다. Fig. 5은 날개 표면의 압력 계수 분포를 나타낸 것이다. 두 수치 유속 모두 실험치와 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다. 현재의 유동조건에서는 Baldwin-Lomax의 난류 모델이 비교적 좋은 결과를 보이는 것을 확인할 수 있다. Fig. 6은 4단계 다중 격자 기법과 DDADI 예조건자를 적용한 경우 수치 유속에 따른 수렴 곡선을 나타낸 것이다. 난류 모델의 수치적 불안정성으로 인해 point-Jacobi 예조건자를 적용한 경우 충분히 수렴된 해를 얻을 수 없었다. 난류 유동장 계산에 있어서는 수치 유속 및 예조건화 기법의 특성을 정확히 비교하기 곤란할 정도로 난류 모델에 의한 수치적 강직성이 크게 작용하였다.

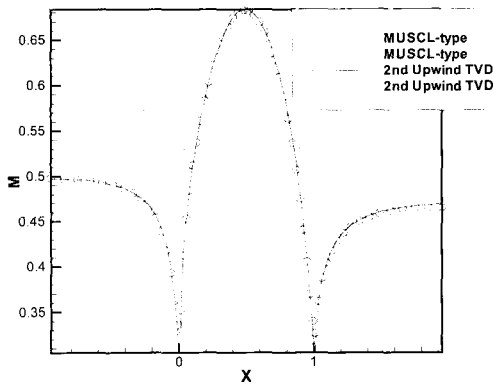


Fig.1. Surface Mach number (  $M_{in} = 0.5$  )

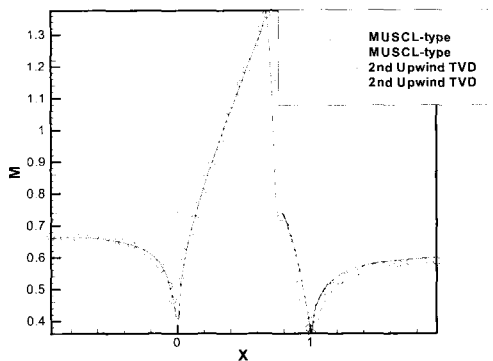


Fig. 2. Surface Mach number (  $M_{in} = 0.675$  )

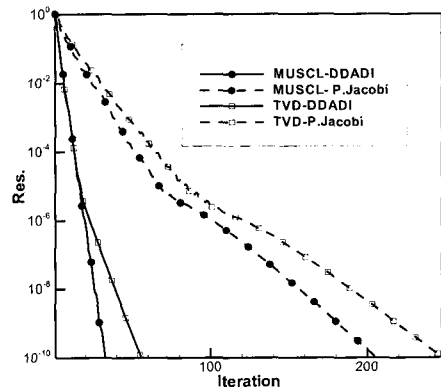


Fig. 3 Convergence history (Min=0.5)

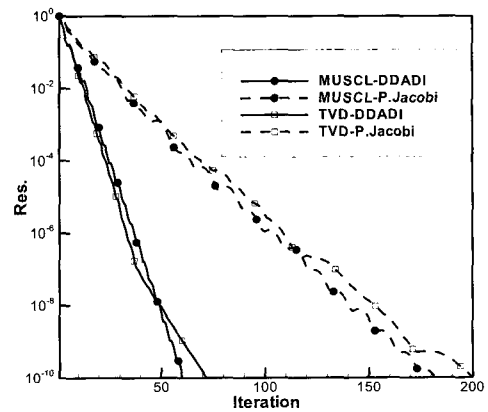


Fig. 4. Convergence history (  $M_{in} = 0.675$  )

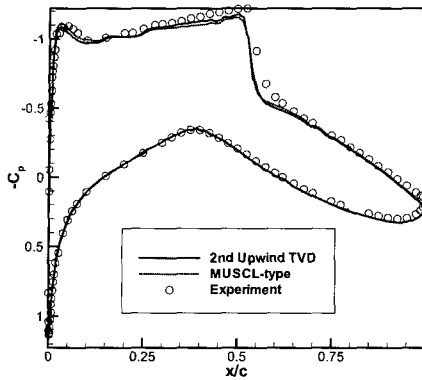


Fig. 5. Surface pressure distributions

#### 4. 결론

본 연구에서는 다중 격자 기법의 성능 향상을 위해 우수한 감쇠 특성을 갖는 예조건화된 다단계 시간 전진 기법을 다양한 유동장에 적용하여 그 특성을 비교하였으며, 수치 유속에 대해서선형 재구성 기법 및 2차 upwind TVD 기법에 대하여 그 특성을 비교하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

예조건화 기법으로는 DDADI 예조건자를 이용한 경우 point-Jacobi 예조건자를 적용한 경우 대비 우수한 수렴특성을 보여주며, 아음속 및 천음속 영역의 유동장 해석에 있어서 point-Jacobi 예조건자를 적용한 경우에 비해 강건성에 있어서도 우수한 특성을 갖는다. 그러나, 예조건자 행렬의 계산을 위한 많은 기억 용량을 갖는 단점이 있다.

수치 유속에 대해서는 비 선형적인 제한자 함수를 갖는 2차 upwind TVD 기법이 2차 정확도의 MUSCL 형태의 선형 재구성 기법에 비해 우수한 충격파 포획 성능을 가지며, 강한 충격파가 있는 유동장 해석의 경우에도 강건성이 우수한 것을 확인할 수 있다. 그러나, 아음속 유동장이나 약한 충격파가 있는 유동장의 경우 수치 유속 계산을 위해 사용되는 stencil이 보다 광범위한 선형 재구성 기법이 보다 우수한 수렴 특성을 갖는 것을 확인할 수 있다. 이러한 특성은 선형 Fourier 해석을 통한 연구들 [11-12]과 잘 일치하는 결과를 보여준다.

난류 유동장 해석에 있어서는 난류 모델에 의한 수치적 강제성에 의하여 여러 기법들의 특성을 비교 분석하기 곤란하였으며, 난류 물성치의 수송 방정식을 계산하는 모델의 보완을 통한 추가 연구가 필요한 것으로 생각된다.

#### 후 기

본 연구는 국방과학연구소 기초연구과제 "Navier-Stokes code의 수렴성 증진 방안 연구"의 일환으로 수행되었으며 지원에 감사드립니다.

#### 참고문헌

[1] 성춘호, 권장혁, "강연계 기법을 이용한 공력최적설계", 한국항공우주학회 춘계 학술발표회 논문집, pp.642-645, (2001)  
 [2] R.-H. Ni, "A multiple-grid scheme for solving the Euler equations", *AIAA J.* 20, No.11, pp.1565-1571, (1982)  
 [3] A. Jameson, "Solution of the Euler Equations for Two

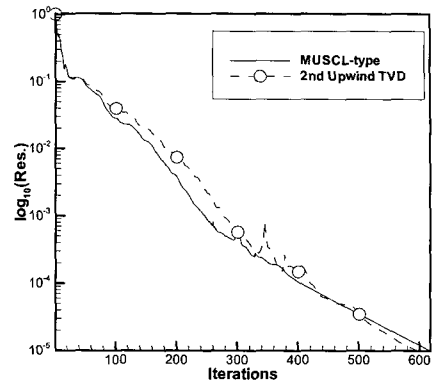


Fig.6 Convergence history

Dimensional Transonic Flow by a Multigrid Method", *Appl. Math. Comp.* 13, pp.327-355, (1983)

[4] A. Jameson and S. Yoon, "Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes", *AIAA J.* 24, No.11, pp.1737-1743, (1986)

[5] L. Martinelli, "Calculations of viscous flows with a multigrid method", Ph.D. Thesis, Princeton Univ. (1987)

[6] C.H. Tai, "Acceleration Techniques for Explicit Euler Codes", Ph.D. Thesis, University of Michigan (1990)

[7] J.F. Lynn and van Leer, "Multi-Stage Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations with Optimal Smoothing", AIAA-93-3355-CP

[8] T.S. Park and J.H. Kwon, "An Improved Multistage Time Stepping for 2nd Order Upwind TVD Schemes for the Navier-Stokes Equations", *Proceedings of 2nd ACFD*, pp. 145-150, Tokyo, Japan, Dec. 15-18, (1996)

[9] 박태상, "2차 upwind TVD 기법을 위한 개선된 다단계 시간 전진 기법", 박사학위논문, 한국과학기술원, (1998)

[10] N.A. Pierce, "Preconditioned Multigrid Methods for Compressible Flow Calculations on Stretched Meshes", Ph.D. Thesis, Oxford University, (1997)

[11] S. R. Allmaras, Analysis of Semi-Implicit Preconditioners for Multigrid Solutions of the 2-D Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA paper 95-1651

[12] 김윤식, 권장혁, "다중 격자 Navier-Stokes 해석을 위한 내재적 예조건화 기법의 수렴특성 해석", *한국항공우주학회지* 제29권, 제7호, pp.9-20, (2001)

[13] 김윤식, 권장혁, "다중 격자 기법을 위한 예조건화된 다단계 시간 전진 기법", *한국항공우주학회지*, 제29권, pp.7-17, (2001)

[14] S. R. Allmaras, "Multigrid for the 2-D Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA paper 99-3336, (1999)

[15] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Comput. Phys.* 43, pp.357-372, (1981)

[16] P. K. Sweby, "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM J. Num. anal.* 21:995-1011

[17] B. S. Baldwin, H. Lomax, "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow", AIAA paper 78-275

[18] W. A. Mulder, "Multigrid Relaxation for the Euler Equations", *J. Comput. Phys.* 60, pp.235-252 (1985)