

# Compact Pade' Scheme을 이용한 Fractional Step Method

정상희\* · 박원규\*\*

## Fractional Step Method with Compact Pade' Scheme

Sang-Hee Chung\* · Wam-Gyu Park\*\*

*Key words : Compact Scheme, Fractional Step Method, Cylinder, 3-D unsteady incompressible flow.*

### Abstract

As computer capacity has been progressed continuously, the studies of the flow characteristics have been performing by the numerical methods actively. In this study, 3-dimensional unsteady incompressible Navier-Stokes equation was solved by numerical method using the fractional step method with the fourth order compact pade' scheme to achieve high accuracy. To validate the present code and algorithm, 3D flow-field around a cylinder was simulated. The drag coefficient and lift coefficient were computed and, then, compared with experiment. The present code will be tailored to LES simulation for more accurate turbulent flow analysis.

### 1. 서론

최근 컴퓨터의 발달과 더불어 DNS, LES, 난류계산, CAA 등의 수치계산을 위해 고차의 Compact scheme에 대한 관심이 고조되고 있다. 고 정확도의 scheme개발을 격자를 조밀하게 만들거나 scheme자체의 정확도를 높이는 방법도 있지만 계산 시간과 그에 따른 비용을 생각하면 크게 실용적이지 못하다. 본 연구에서는 Compact scheme을 이용해 비정상 비압축성 유동에 대한 고 정확도의 프로그램을 개발하였고 이를 원형 실린더 주위의 유동장을 해석하여 실제실험과 검증을 시도하였다. Compact scheme은 한 점의 수치계산에서 한 쪽 방향으로 3개의 격자점을 사용하므로 그 방향에 대한 Thomas 알고리즘을 통해 풀어주면 쉽게 고 정확도의 알고리즘을 얻을 수 있으므로 시간과 비용의 절감에 있어 매우 효과적이다.

본 연구에서는 4단계 Fractional step 방법을 통해 비정상상태의 문제를 해결하였는데, 이 방법은 기존의 SIMPLE방법에 비하여 계산 시간을 상당히 절약할 수 있으므로 3차원 비정상 유동처럼 복잡한 문제 일수록 그 시간 절감 효과가 뛰어나다고 생각된다. 이상의 방법들을 실린더 주위의 유동계산에 적용하였는데 실린더는 그 형상이 단순함에도 불구하고 매우 복잡한 유동구조를 포함하고 있기 때문에 실험연구가 대부분이고 수치연구 결과는 층류영역에서 많이 이루어져 왔다. 본 연구에서는 복잡한 실린더 주위의 유동장을 해석함으로써 Compact scheme 과 Fractional step방법을 이용하여 개발된 프로그램에 대한 검증을 시도하였다.

### 2. 지배 방정식 및 수치해석 기법

#### 2.1 지배 방정식

실린더 주위를 지배하는 3차원 비정상상태 비압축성 점성유동의 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식을 무차원화한 후 일반 좌표계로 변화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{E} - \bar{E}_v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{F} - \bar{F}_v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{G} - \bar{G}_v) = 0 \quad (1)$$

여기서  $\bar{q}$  유동벡터,  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  는 대류항 이고,  $\bar{E}_v, \bar{F}_v, \bar{G}_v$  는 점성항을 의미한다. 이 지배 방정식을 풀기위해 Kim 과 Moin[1], Choi 와 Moin[2]에 의해 사용된 4단계 Fractional step method를 적용하였다.

#### 2.2 Fractional Step Method

비정상상태의 N-S 방정식 (1)을 풀기위해 다음의 4단계 Fractional step method를 이용해 각 단계의 압력과 속도를 만족하는 해를 구하였다.

제 1단계 : n단계의 운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\hat{q} - \bar{q}^n) + \delta_\xi \bar{E}^{n+m} + \delta_\eta \bar{F}^{n+m} + \delta_\zeta \bar{G}^{n+m} \\ = \delta_\xi \bar{E}_v^{n+m} + \delta_\eta \bar{F}_v^{n+m} + \delta_\zeta \bar{G}_v^{n+m} \end{aligned} \quad (2-a)$$

\* 부산대학교 기계공학과 대학원, enginertop@hotmail.com

\*\* 부산대학교 기계공학부, wgpark@pusan.ac.kr

제 2단계 : \*단계 보정속도 관계식

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \nabla p^n \quad (2-b)$$

3단계 : 현재 시간단계의 압력에 대한 Poisson 방정식

$$\nabla^2 p = \frac{\nabla u^*}{\Delta t} \quad (2-c)$$

4단계 : 현재 시간단계의 속도에 관계식

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (2-d)$$

여기서 식 (2)-a에서  $m=0,1$ 로  $m=0$ 일 때 외재적 방법,  $m=1$ 일 때 내재적 방법이 된다. 본 연구에서는  $m=0$ 인 외재적 방법을 채택하였다. 압력에 대한 Poisson 방정식인 식 (2)-c에서 Cartesian 좌표계에서는 일반적으로 HSMAC 방법을 이용해서 풀지만 이것을 일반 좌표계에서 그대로 적용하면 수렴성과 정확도가 떨어지는 결과를 초래하므로 본 논문에서는 ADI 방법을 이용해 풀었다. 특히 원형 실린더 후류에서 발생하는 복잡한 유동장에서는 특히 ADI 방법이 HSMAC방법에 비해 정확도가 우수하다. 식(1), (2)-a, b, c, d를 계산할 때 각 단계에서 필요한 일차 미분계산을 4차 정확도로 유지하기 위해 다음과 같이 Compact Scheme을 채택하였다.

### 2.3 Compact Scheme

수치해석의 정확도를 높이기 위해 Lele[3]가 제안한 4차/6차 정확도의 Compact scheme을 식(1), (2)-a, b, c, d 계산에 사용하였는데 임의의 함수  $f$ 에 대한 일차미분  $f'$ 을 Compact scheme에 의해 얻어진 값 이라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4} \quad (3)$$

이때  $\alpha=1/4, a=2/3, b=0$ 일 때 4차 정확도

$\alpha=1/3, a=14/9, b=1/9$ 일 때 6차 정확도

식 (3)에서 보는 바와 같이 함수  $f$ 에 대한 일차미분  $f'$ 을 구할 때 3개의 격자점 stencil만을 사용해서 삼 대각행렬을 풀어 고차 정확도의 차분화가 가능함을 알 수 있다.

그리고 Compact scheme을 적용할 때 경계에서 발생할 수 있는 수치적 오차가 유동계산의 내부영역으로 전파되어가지 않고 전체적으로 원하는 수치적 정확도가 유지되도록 특별한 처리가 필요한데 Shang[4]에 의한 one-side difference와 low pass filter를 도입한다.

### 2.4 표준 Smagorinsky 난류모델, 초기 및 경계조건

본 연구에서는 난류모델로 표준 Smagorinsky 모델을 적용하였다[5]. 사용된 초기조건은 모두 자유 유동 조건으로 모든 격자점에 원거리 경계 의 값을 부여하였다. 경계조건은 유입경계에 있어서 자유 유동 조건을 부여하였고 유출 경계의 경우

는 속도는 Compact scheme의 수치 정확도를 유지하기 위한 외압과 압력은  $p = p_\infty$ 로 부터 구하였다. 고체 표면에서는 점착 조건(no slip)과 압력에 대해 4차 정확도를 유지하였다. 원형 실린더의 Z방향(축 방향)으로는 periodic condition을 적용하였다.

## 3. 결과 및 고찰

### 3.1 Compact Scheme에 대한 검증

본 연구에서 사용된 Compact scheme의 알고리즘을 Re수 2800의 원형 실린더 주위의 유동장에 대한 계산으로 검증을 시도하였다. Fig. 1은 Re수 2800인 실린더 표면의 압력계수를 Wille에 의한 실험[6]과 Quick방법 그리고 Compact scheme에 의한 방법을 비교한 것으로 Compact scheme에 의한 표면 압력 계수가 Quick방법보다 실험값에 근접하고 있음을 알 수 있다.

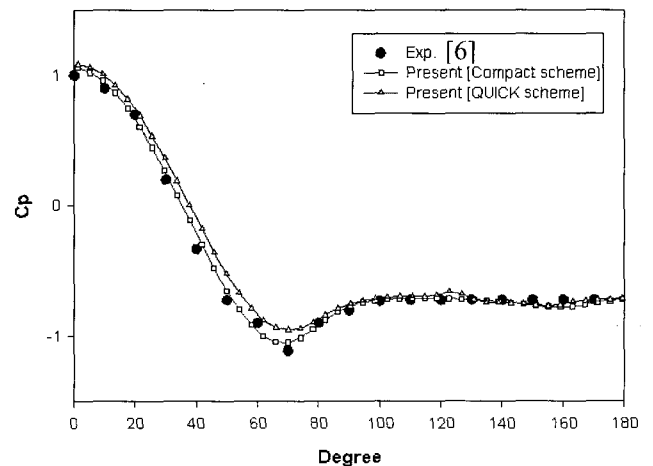
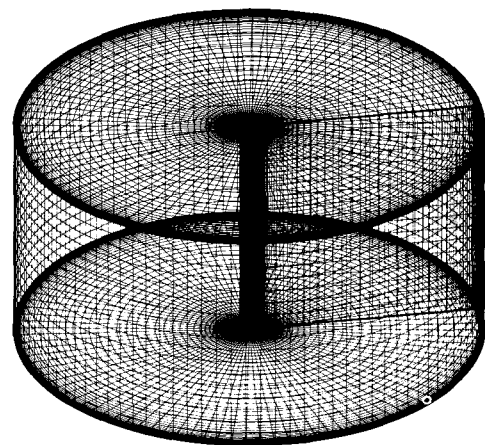


Fig.1 Comparison of Cp at Re = 2800

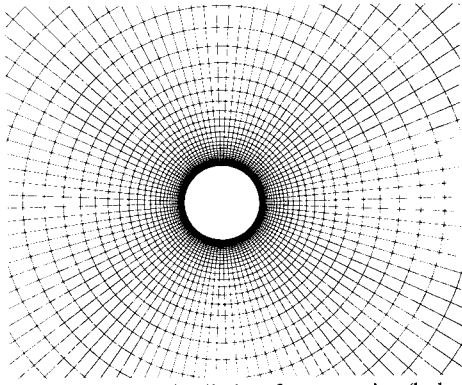
### 3.2 원형 실린더 주위의 유동해석

#### 3.2.1 격자계 구성

본 논문에서 유동계산에 사용된 실린더의 형상은 Fig. 2와 같고 격자의 개수는  $101 \times 85 \times 18$ 개 이다. 계산의 최대 반경은  $25D$ ( $D$ =직경)으로 결정하였다.



(a) Cylinder grid system



(b) Zoomed grid around cylinder of cross section ( $k=k_{max}/2$ )  
Fig.2 Computation grid of  $C_p$  at  $Re = 2800$

### 3.2.2 결과 및 고찰

본 연구에서는 실험값[7]이 있는  $Re=3900$ 에서 수행하였으며, 실린더 표면주위의 압력계수 및 유동장내의 다양한 물리량을 실험값과 비교하였다.

Fig.3은 실린더 표면주위의 시간평균에 의한 압력계수를 나타낸 것이다. Ong 등의 실험결과와 비교하였다. 본 연구의 3차원 해석결과를 실험에 의한 결과와 비교해 볼 때 실험적인 오차범위 내에서 대체로 일치하고 있음을 볼 수 있으나 실린더 뒤쪽 재순환영역 부근에서 다소 차이가 있음을 볼 수 있다. 이것은 Moin등[8]의 LES에 의한 수치해석 결과를 고려할 때 실린더 뒷면 재순환영역의 격자가 충분히 조밀하지 못하다는 것과 재순환 영역내부의 난류해석의 정확한 예측이 이루어지지 못했기 때문으로 판단된다.

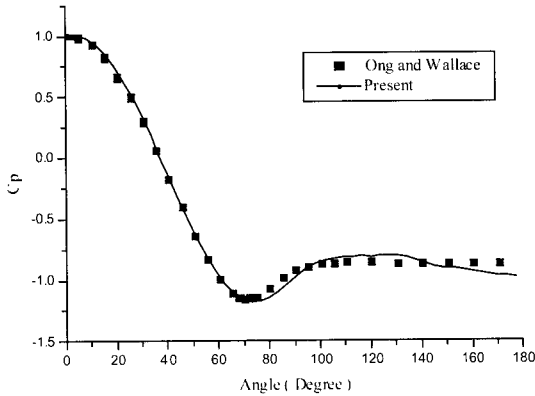


Fig.3 Pressure Coefficient on the cylinder surface

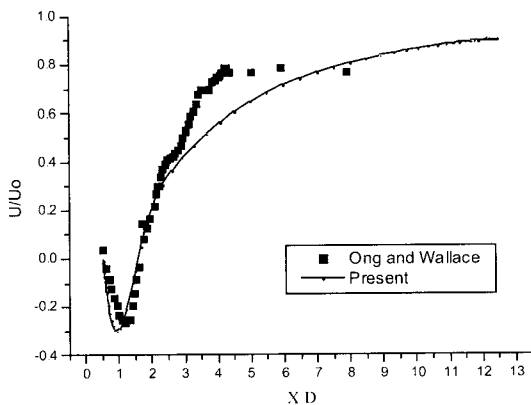
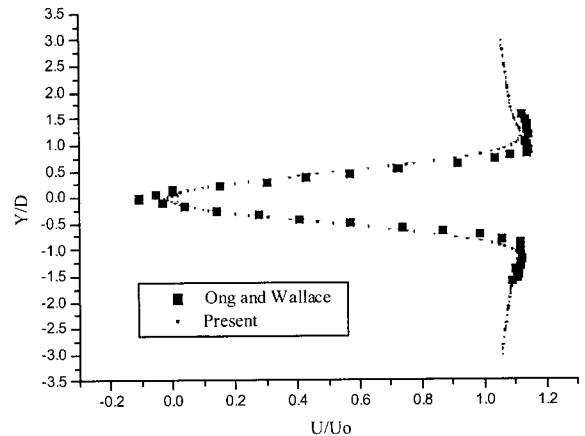


Fig.4 Comparison of the time-averaged  $U/U_0$  of center-line

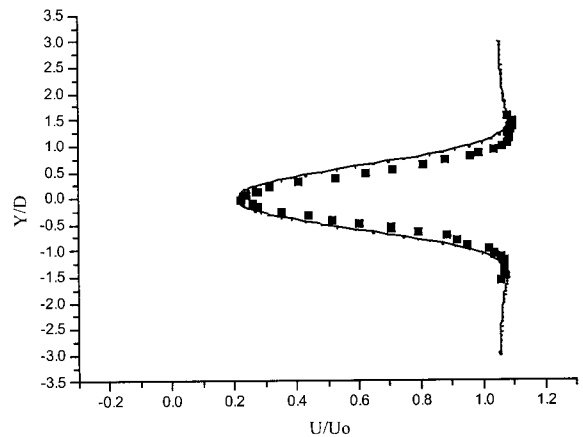
Fig.4는 실린더 뒤쪽 재순환 영역에서  $y=0$ 의 중앙 단면을 따라  $x$ 방향 시간평균 속도성분의 자유 유동속도에 대한 비를 나타낸 것이다. Ong등의 실험값과 비교할 때  $X/D$ 값이 2에서 6 사이에서 다소 차이가 나는데 앞에서 언급한 것처럼 Grid의 조밀성과 난류해석 등이 보완이 필요하다고 판단된다. 그러나  $X/D$ 값이 점점 커져 유동의 진행방향으로 갈수록 실험치의 값에 근접하게 다가가는 것을 볼 수 있다.

Fig.5에서는 재순환 영역의 뒤쪽의 일정한 위치에서 실린더의 길이방향과 평행하게 자른 단면에 따른  $U/U_0$ 의 값의 시간 평균에 대한 분포를 나타낸 것이다. 실린더 후면에 근접한 유속의 변화가 심한 영역에서는 대체로 잘 일치하고 있으나 유동의 진행방향으로 갈수록 진행방향의 중앙단면에서 다소 차이를 볼 수가 있다. 이는 실린더 재순환 영역을 거치고 난 뒤 진행방향으로 갈수록 중앙 단면 부근의 평균속도 회복이 제대로 이루어 지지 않았기 때문이다.

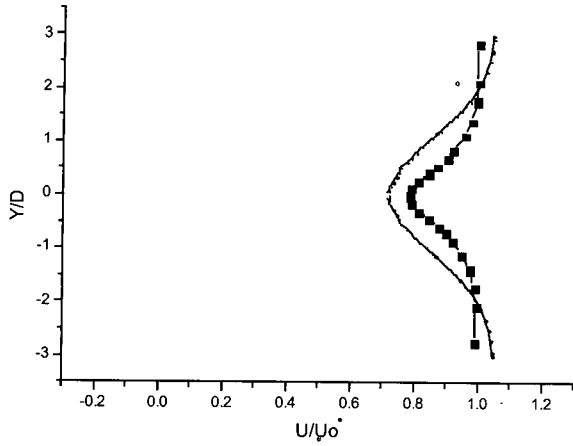
Fig.6은 Reynolds stress중 전단응력에 대한  $X/D=6.0$ 에서의 시간평균 계산결과를 나타내고 있다. 비교적 실험결과와 거의 일치하는 계산 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 현재 많은 연구자들이 수직응력 및 전단응력에 대한 연구를 수행하고 있으므로 앞으로 이를 반영한다면 보다 나은 개선된 결과를 얻을 수 있을 것으로 생각된다.



(a)  $x/D=1.54$



(b)  $x/D=2.02$



(c)  $x/D=6$ .

Fig.5 Comparison of the time-averaged  $U/U_0$  with experiment

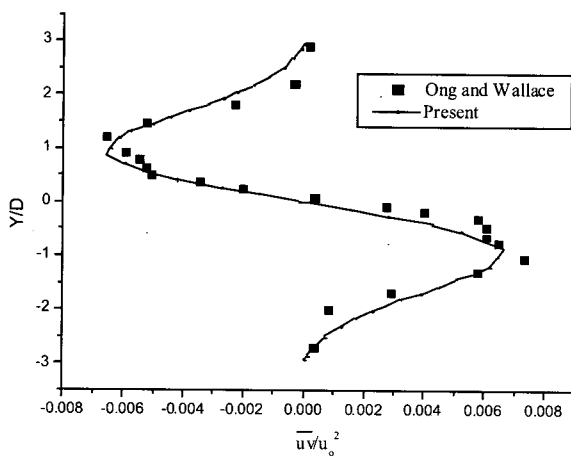
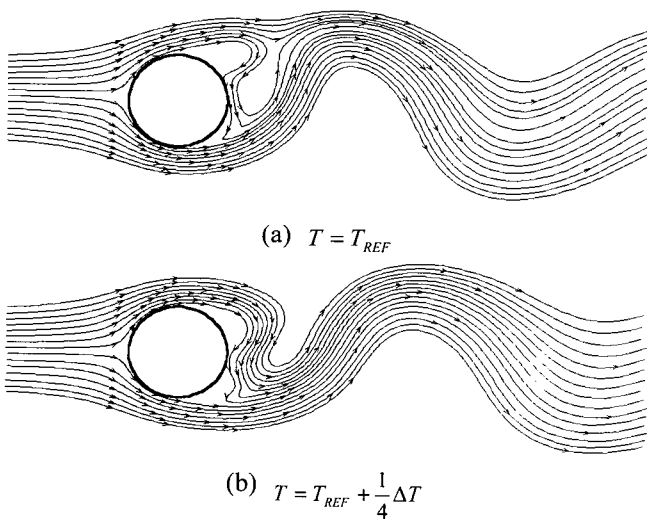


Fig.6 Comparison of the time-averaged Reynolds stresses with experiment( $X/D=6.0$ )

Fig.7 은 본 연구로 계산된 실린더 주위의 유동장의 유선을 시간에 한 주기에 대해 4등분으로 Simulation 한 것이다.



(a)  $T = T_{REF}$

(b)  $T = T_{REF} + \frac{1}{4} \Delta T$

(c)  $T = T_{REF} + \frac{2}{4} \Delta T$

(d)  $T = T_{REF} + \frac{3}{4} \Delta T$

(e)  $T = T_{REF} + \Delta T$

Fig.7 Instantaneous Streamline around cylinder

#### 4. 결론

본 연구에서는 Compact scheme을 이용한 Fractional step Method의 알고리즘 개발하였다. 실험값이 있는  $Re=3900$ 의 실린더 주위의 유동에 대해 해석함으로써 프로그램 검증에 대체로 만족할 만한 결과를 얻었으며, 향후 좀더 정확한 난류해석 등의 보완 연구와 함께 다양한 유동장에 대한 해석을 통해 프로그램의 완성도를 높일 계획이다.

#### 참고문헌

- [1] J. Kim and P. Moin, 1985, "Application of a fractional step method in incompressible Navier-Stokes equation", J. Comp. Phys., Vol. 59, pp. 308-323
- [2] H. Choi and P. Moin, 1994, "Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow", J. Comp. Phys., Vol. 113, pp. 1-4
- [3] Lele, S.K., 1992, "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution", J. Comp. Phys., Vol.103, pp.16-42
- [4] Shang, J. S., 1999, "High-Order Compact-Difference Schemes for Time-Dependent Maxwell Equations", J. Comp. Phys., Vol. 153, pp. 312
- [5] Smagorinsky, J., 1963, "General circulation experiments with the primitive equations", Monthly Weather Review, Vol. 91, pp 91
- [6] C. M. Rhie and W. L. Chow, 1983, "Numerical Study of the turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", AIAA, Vol. 21, No. 11
- [7] Ong, L. and Wallace, J., 1994, "The Velocity Field of the Turbulent Very Near Wake of a Circular Cylinder", Exp. Fluids, Vol. 20, pp. 441-453.
- [8] Kravchenko A.G. and Moin P., 2000, "Numerical Studies of Flow over a Circular Cylinder  $Re_d = 3900$ ", Physics of fluids, Vol.12, pp.403-417.