

대규모 피라미드의 2-차원 메쉬로의 새로운 임베딩

장정환*, 김진수**, 이종학***

*부산외국어대학교 컴퓨터전자공학부

**건국대학교 컴퓨터·응용과학부

***대구가톨릭대학교 컴퓨터정보통신공학부

e-mail: jhchang@pufs.ac.kr, jhleel1@cuth.cataegu.ac.kr, jinsoo@kku.ac.kr

A New Embedding of Large Pyramid into 2-Dimensional Mesh

Jung-Hwan Chang*, Jinsoo Kim**, Jong-Hak Lee***

*Division of Computer & Electronics Eng., Pusan University of Foreign Studies

**Division of Computer & Applied Science, Konkuk University

***School of Computer & Information Eng., Catholic University of Daegu

요 약

본 논문에서는 피라미드 구조를 정방형 2-차원 메쉬로 임베딩하는 문제를 다룬다. $(4^N - 1)/3$ 개의 정점들로 구성된 높이 N 인 피라미드 P_N 을 대상으로($N \geq 5$ 인 경우에 $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 임베딩이 가능한 새로운 임베딩 함수를 제안한다. 이러한 결과는 동일한 조건 하에서 기존의 연구결과보다 신장율 면에서 3/8에 해당하는 개선을 의미한다.

1. 서론

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 실행하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 노드들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다. 상호연결망에서의 그래프 임베딩(embedding)이란 병렬처리시스템에서 실행되기 위해 설계된 알고리즘들에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근 방법으로써 연구가 시작되었다[1,2]. 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소중 하나인 지름(diameter)과 관련된 성능을 개선하고자 하는 다양한 노력들이 여러 가지 상호연결망 그래프들에 대해 연구되어 오고 있다.

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호

연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube)를 꼽을 수 있으며[3], 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 또한 병렬처리분야에서 비교적 널리 잘 알려진 상호연결망 중 하나로 널리 이용되어 오고 있다[4,5].

높이 N 인 피라미드(pyramid)는 $(4^N - 1)/3$ 개의 정점들을 갖는 계층적 구조의 그래프로써 저 레벨 픽셀 단위 영상처리 관련 기능을 효율적으로 처리해 줄 수 있는 구조적 특성으로 인해 널리 이용되어 왔으며 내재된 트리 및 메쉬 구조를 다양하게 활용함으로써 그래프 관련 문제 해결에도 널리 활용되고 있다[5].

한편 2-차원 메쉬는 짧은 지름(diameter)과 확장성(extendability) 등의 장점으로 인해 대규모 병렬처리시스템으로 비교적 많이 구현되고 있는 실정이다.

손님(guest) 그래프 G 의 주인(host) 그래프 H 로의 임베딩(embedding)이란 G 의 정점들의 집합 $V(G)$ 로부터 H 의 정점들의 집합 $V(H)$ 로의 일대일 대응을 의미하는 함수 f 로 정의된다. 이때 G 의 에지 $e=(v,w)$ 는 $f(v)$ 와 $f(w)$ 를 연결하는 H 의 경로(path)

$f(e)$ 에 대응된다.

임베딩 f 의 비용을 측정하는 척도로는 신장율(dilation)과 확장율(expansion) 등이 주로 사용되고 있다. 임베딩 f 하에서 G 의 에지 e 의 신장율은 이에 대응되는 H 에서의 경로 $f(e)$ 의 길이를 의미하고 모든 에지에 대해 적용한 결과 최대값을 그 임베딩 f 의 신장율로 정의하며, 확장율은 두 그래프의 크기의 비로써 G 의 정점들의 개수에 대한 H 의 정점들의 개수의 비로 정의한다. 즉 신장율이란 G 의 구조를 갖는 알고리즘을 H 형태의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서 시뮬레이션할 때 필요한 통신스텝의 수를 나타내는 전달지연을 의미하며, 확장율은 H 구조의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서의 자원의 효율성을 의미하므로 신장율과 확장율은 모두 그 값이 적을수록 우수한 임베딩으로 평가된다.

높이가 N 인 피라미드를 메쉬로 임베딩시킨 관련 연구로는 Stout[6]이 $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율과 확장율이 각각 2^{N-1} 와 3인 임베딩 방법을 제안한 이후 3차원 메쉬로 확장되어 연구되어오고 있다.

2-차원 메쉬에 대한 임베딩 성능은 결국 3-차원 메쉬로 확장시 한계가 된다는 사실을 고려하여 본 논문에서는 2-차원 메쉬를 대상으로 피라미드를 임베딩하는 문제를 다루게 되는데, 병렬처리시스템의 전체적인 통신성능에 큰 영향을 미치는 신장율 측면에서 향상된 성능을 갖는 새로운 임베딩 기법을 제안한다. 이 방법에서는 높이가 N 인 피라미드를 $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율 2^{N-1} 로 임베딩시킨 [6]에서 제안된 결과를 동일한 조건하에서 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 줄임으로써 3/8에 해당하는 신장율 개선효과를 얻게 됨을 보인다.

본 논문은 네 개의 절로 구성되어 있는데 제2절에서는 본 논문의 두 대상 그래프인 피라미드와 2-차원 메쉬에 대한 정의와 특성들에 대해 살펴보고 제3절에서는 본 논문에서 제안하는 새로운 임베딩 기법을 설명하고 성능 요소들에 대한 분석을 통해 제안된 기법의 성능을 증명하며, 마지막 제4절에서 결론을 맺는다.

II. 대상 그래프

본 절에서는 본 논문에서의 두 대상 그래프인 피라미드 및 2-차원 메쉬에 대한 그래프 이론적 주요 특성들을 살펴본다.

[정의 1] 주어진 양의 정수 N 에 대해 높이가 N 인 피라미드 P_N 은 정점의 집합 $V(P_N)$ 과 에지의 집

합 $E(P_N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 1) V(P_N) &= \bigcup_{0 \leq l < N-1} \{(l, x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 2^{N-l-1}\} \\
 2) E(P_N) &= \bigcup_{0 \leq l < N-2} \{((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2)) \mid |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1 \ \& \ (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P_N)\} \\
 &\cup \bigcup_{0 \leq l < N-2} \{(l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)\} \\
 &\quad 0 \leq x, y \leq 2^{N-l-1}
 \end{aligned}$$

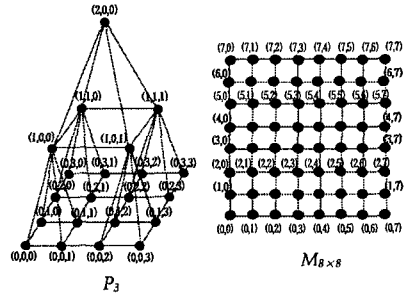


그림 1. 피라미드 및 2-차원 메쉬 그래프 예

[정의 2] 한 변의 길이를 나타내는 주어진 양의 정수 W 에 대한 정방형 2-차원 메쉬 $M_{W \times W}$ 는 정점의 집합 $V(M_{W \times W})$ 와 에지의 집합 $E(M_{W \times W})$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 1) V(M_{W \times W}) &= \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq W-1\} \\
 2) E(M_{W \times W}) &= \{((x_1, x_2), (x_1', x_2')) \mid \sum_{i=1,2} |x_i - x_i'| = 1 \\
 &\quad \& \ (x_1, x_2), (x_1', x_2') \in V(M_{W \times W})\}
 \end{aligned}$$

그림 1은 높이(height)가 3인 피라미드와 8×8 인 2-차원 메쉬의 예를 보여주고 있다.

III. 매핑함수 및 신장율

본 절에서는 본 논문에서 제안하고 있는 피라미드와 2-차원 메쉬 정점간 매핑 함수 및 신장율을 분석한다.

3.1 매핑 함수

앞에서 살펴본 바와 같이 높이가 N 인 피라미드의 $(4^N - 1)/3$ 개 정점들을 $2^N \times 2^N$ 2-차원 메쉬의 4^N 개 정점들로 일-대-일로 매핑시키기 위한 임베딩은 다음과 같은 함수 f 로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f: V(P_N) &\rightarrow V(M_{2^N \times 2^N}) \\
 f(l, x, y) &= \left\{ \begin{array}{l} (S_l + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l, S_l - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l); \\ \quad \text{if } l \neq N-2 \\ (S_l + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l + (-1)^x \cdot D, \\ \quad S_l - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l + (-1)^y \cdot D); \text{ if } l = N-2 \end{array} \right\} \dots (1)
 \end{aligned}$$

여기서, $S_l = 2^l - 1, S_l = 2^{N-1} - 1$
 $D = 3 \cdot 2^{N-5}, N \geq 5$

여기서 S_l 및 S_{l-1} 는 각각 레벨 l 에 해당하는 정점들의 시작 위치를 나타내는 x 및 y 좌표값을 의미하고

이 좌표를 시작으로 하여 그림 2에서 보는 바와 같이 우측-상단을 향해 사선 형태로 피라미드 내 해당 레벨 메쉬의 하나의 행(row)에 대응되는 정점들이 위치하게 된다.

기존의 방법에서 신장율이 길어지게 되는 요인이 되는 피라미드 내의 레벨 $N-1$ 과 $N-2$ 사이의 연결 에지들에서의 최대 신장율 2^{N-1} 을 개선하기 위해 피라미드 내 각 레벨 메쉬들의 행들을 사선 형태로 배열시킴과 동시에 레벨 $N-2$ 에서의 정점간 연결 에지들에서의 최대 신장율을 감소시키기 위해 매핑함수에서 특별한 처리를 위해 변형을 가하였다. 여기서 좌표의 조절을 위해 도입된 변위값 D 는 조정 후에 예상되는 신장율의 감소 효과를 극대화할 수 있도록 선정된 값으로써 조정 후 $N-2$ 레벨 정점들에 미치는 감소분이 반영된 신장율 $2^{N-1}-2D$ 와 $N-3$ 레벨 정점들에서의 증가분이 반영된 $2^{N-3}+2D$ 에 해당하는 값의 차이를 최소로 하는 정수값을 의미하는 값으로써 두 식을 등식으로 두고 D 값을 구하면 $D=3 \cdot 2^{N-5}$ 라는 값을 얻을 수 있다.

이러한 새로운 매핑함수를 적용시킨 새로운 임베딩의 예를 그림 2에서 보여주고 있는데 여기서는 P_5 를 32×32 메쉬로 임베딩하면서 레벨 4에 해당하는 정점들을 조정값 $D=3$ 만큼씩 각각 x 및 y 좌표값을 이동시킨 새로운 좌표로 매핑하고 있음을 보여주고 있다.

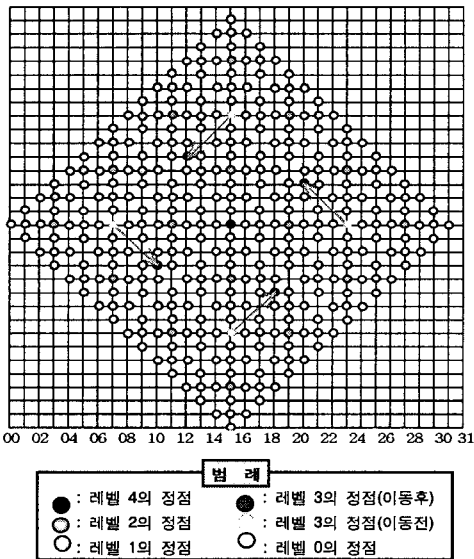


그림 2. 피라미드의 2-차원 메쉬로의 임베딩 예

3.2 성능 분석

위에서 제시된 새로운 임베딩을 통해 얻을 수 있는 임베딩의 성능을 분석하기 위해 본 절에서는 신

장율의 측면에서 각 에지의 신장율 특성을 분석한 다.

[보조정리 1] $N \geq 5$ 인 P_N 내의 $0 \leq l \leq N-2$, $0 \leq x \leq 2^{N-l}-1$ 및 $0 \leq y \leq 2^{N-l}-2$ 를 만족하는 레벨 l 내의 임의의 두 정점 (l, x, y) 와 $(l, x, y+1)$ 를 연결하는 에지들에 대한 임베딩 f 에서의 신장율은 $(5/8) \cdot 2^{N-l}$ 이다.

[증명] 피라미드에서 동일 레벨 내의 y 좌표값이 인접된 두 정점 사이의 신장율은 매핑 함수 적용 결과 대응되는 2-차원 메쉬에서의 두 정점 사이의 거리로 다음과 같이 계산이 가능하다.

① 레벨 $l \neq N-2$ 인 경우:

$$\begin{aligned} \text{Dist}_y((l, x, y+1), (l, x, y)) &= |S_x + x \cdot 2^l + (y+1) \cdot 2^l - (S_x + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &\quad + |S_y - x \cdot 2^l + (y+1) \cdot 2^l - (S_y - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &= |2^l| + |2^l| = 2^{l+1} \end{aligned}$$

최대 신장율은 $l=N-3$ 일 때이고 그 값은 2^{N-2} 이다.

② 레벨 $l=N-2$ 인 경우: 이 경우는 그림 2에서 보는 바와 같이 정점들의 위치에 변형을 줌으로써 표 1에서 확인할 수 있는 바와 같이 $-2D$ 만큼의 감소 효과를 얻게 되므로 최대 신장율은 $2^{N-1}-2D$ 에 해당하는 값 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이다.

따라서 종합하면 y 좌표값이 인접한 두 정점들에서의 신장율은 최대값에 해당하는 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이다. □

좌표값		좌표변위값		에지에 미치는 영향		
x	y	x-방향	y-방향	동일레벨	상위레벨	하위레벨
0	0	+D	+D	-2D	0	+2D
0	1	+D	-D	-2D	0	+2D
1	0	-D	+D	-2D	0	+2D
1	1	-D	-D	-2D	0	+2D

표 1. $N-2$ 레벨에서의 좌표 변위와 그 영향 (여기서, $D = 3 \cdot 2^{N-5}$)

[보조정리 2] $N \geq 5$ 인 P_N 내의 $0 \leq l \leq N-2$, $0 \leq x \leq 2^{N-l}-2$ 및 $0 \leq y \leq 2^{N-l}-1$ 을 만족하는 레벨 l 내의 임의의 두 정점 (l, x, y) 와 $(l, x+1, y)$ 를 연결하는 에지들에 대한 임베딩 f 에서의 신장율은 $(5/8) \cdot 2^{N-l}$ 이다.

[증명] 보조정리 1에서와 유사하게 피라미드에서 동일 레벨 내의 x 좌표값이 인접된 두 정점 사이의 신장율 역시 다음과 같이 계산이 가능하다.

① 레벨 $l \neq N-2$ 인 경우:

$$\begin{aligned} \text{Dist}_y((l, x+1, y), (l, x, y)) &= |S_x + (x+1) \cdot 2^l + y \cdot 2^l - (S_x + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &\quad + |S_y - (x+1) \cdot 2^l + y \cdot 2^l - (S_y - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l)| \\ &= |2^l| + |-2^l| = 2^{l+1} \end{aligned}$$

이 경우 역시 보조정리 1과 동일한 이유로 인해서

$l=N-3$ 일 때 최대 신장을 값은 2^{N-2} 가 된다.

② 레벨 $l=N-2$ 인 경우: 이 경우는 보조정리 1에서와 유사하게 적용시키면 $-2D$ 만큼의 감소 효과를 얻게 되어 신장은 $2^{N-1}-2D$ 에 해당하는 값 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이다.

따라서 종합하면 y 좌표값이 인접한 두 정점들에서의 신장은 위 두 경우에서의 최대값에 해당하는 값 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 임을 알 수 있다. □

[보조정리 3] $N \geq 5$ 인 P_N 내의 $0 \leq l \leq N-2$ 및 $0 \leq x, y \leq 2^{N-1}-1$ 을 만족하는 두 개의 인접 레벨 l 과 $l+1$ 의 임의의 두 정점 (l, x, y) 와 $(l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)$ 를 연결하는 에지들에 대한 임베딩 f 에서의 신장은 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이다.

[증명] 피라미드에서 인접된 두 레벨 l 과 $l+1$ 사이 에 에지로 연결된 두 정점간 신장은 매핑 함수 적용 결과 대응되는 2-차원 메쉬에서의 두 정점 사이의 거리로 다음과 같이 계산이 가능하다.

① 레벨 $l \leq N-4$ 인 경우:

$$\begin{aligned} \text{Dist}_f((l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor), (l, x, y)) &= |(2^{l+1}-1) + \lfloor x/2 \rfloor \cdot 2^{l+1} + \lfloor y/2 \rfloor \cdot 2^{l+1} - ((2^l-1)x + 2^l y \cdot 2^l)| \\ &= \begin{cases} |(2^{N-2}-1) - \lfloor x/2 \rfloor \cdot 2^{N-2} + \lfloor y/2 \rfloor \cdot 2^{N-2} - ((2^{N-2}-1)x + 2^{N-2} y \cdot 2^2)| \\ | -2^l |, \text{ if } x \text{ is odd \& } y \text{ is even} \\ | 2^l |, \text{ otherwise} \end{cases} \\ &= 2^l \end{aligned}$$

이 경우에는 $l=N-4$ 일 때 신장이 최대가 되고 그 값은 2^{N-4} 가 된다.

② 레벨 $l=N-3$ 인 경우: 레벨 $N-3$ 과 $N-2$ 사이를 연결하는 에지들의 경우는 레벨 $N-2$ 에서의 좌표 변형에 따라 $+2D$ 에 해당하는 변화값의 영향을 받게 됨을 확인할 수 있다. 따라서 이 경우의 신장을 값은 $2^{N-3}+2D$ 에 해당하는 값 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이다.

③ 레벨 $l=N-2$ 인 경우: 레벨 $N-2$ 와 $N-1$ 사이를 연결하는 에지들의 경우는 레벨 $N-2$ 에서의 좌표 변형에도 불구하고 변화값이 서로 상쇄되어 영향을 주지 않음을 확인할 수 있다. 따라서 이 경우의 최대 신장을 값은 ①에서와 동일하게 적용하여 2^{N-3} 을 갖는다.

따라서 종합하면 인접 레벨간 정점들에서의 신장을 값은 세 경우에서의 최대값에 해당하는 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 임을 알 수 있다. □

위의 세 보조정리들을 종합하면 본 논문에서 제안된 새로운 매핑함수 f 에 의해 정의된 임베딩 적용시 피라미드 에지들에 대한 2-차원 메쉬에서의 신장은 다음과 같은 정리 1로 요약할 수 있다.

[정리 1] $N \geq 5$ 를 만족하는 높이가 N 인 주어진 피라미드 P_N 의 2-차원 메쉬에 대한 새로운 매핑함

수 f 에 의해 정의된 임베딩에서의 신장은 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이다. □

위 정리 1은 $N \geq 5$ 인 경우에 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 이라는 신장을 갖게됨을 의미하고 따라서 [6]에서 제안된 기존의 방법에 비해 3/8에 해당하는 성능 개선 효과를 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 다중 병렬처리시스템에서의 영상처리 및 그래프 문제 해결에 다양하게 응용되고 있는 상호연결망 중의 하나인 피라미드를 대상으로 2-차원 메쉬로의 임베딩 문제를 다루었다.

임베딩에 수반되는 성능평가 요소 중 노드간 지연과 관련이 깊은 신장의 관점에서 접근하여 $N \geq 5$ 인 비교적 규모가 큰 피라미드를 대상으로 $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 성능이 향상된 새로운 임베딩 기법을 제시하였다.

이러한 연구결과는 3-차원 메쉬 구조로 확장 적용 가능성을 시사하는 연구 결과로써 대규모 병렬시스템에서 수행되는 피라미드 기반의 각종 영상처리 및 그래프 관련 알고리즘의 시뮬레이션 및 자원 할당 등의 분야에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [4] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes," *Morgan Kaufmann Pub.*, CA., 1992.
- [5] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," *SIAM J. on Comput.*, Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [6] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," *Proc. of the IEEE*, pp.982-995, 1988.