

## 2차원 원주로부터 발생하는 Aeolian tone의 수치계산

강호근\* · 노기덕\* · 손영태\*\*  
\*경상대학교 수송기계공학부 · 해양산업연구소  
\*\*경상대학교 대학원

### Numerical Simulation of the Aeolian Tone Generated from Two-dimensional Circular Cylinder

Ho-Keun KANG\*, Ki-Deok Ro\* AND Yeong-Tae SON\*\*  
\*School of Transport Vehicle Engineering · Institute of Marine Industry, Gyeongsang National University  
\*\*Graduate School, Gyeongsang National University

**KEY WORDS:** Computational Fluid Dynamics 전산유체역학, Finite Difference Lattice Boltzmann Method 차분격자볼츠만법, Compressible Fluid 압축성유체, Acoustic Sound 유체음

**ABSTRACT:** Acoustic sounds generated by a uniform flow around a two-dimensional circular cylinder at  $Re=200$  are simulated using finite difference lattice Boltzmann method. A third-order-accurate up-wind scheme is used for spartial derivatives, and a second-order-accurate Runge-Kutta scheme is used for time marching. The results show that in capturing very small acoustic pressure fluctuation with same frequency of Karman vortex street compared with the pressure fluctuation around a circular cylinder. The propagation velocity of acoustic sound is presented that acoustic which approaches the upstream due to Doppler effect in the uniform flow slowly propagates, while that for the downstream quickly propagates. It is also apparent that the size of sound pressure is proportional for central distance  $r^{1/2}$  of the cylinder.

#### 1. 서 론

최근, 항공기, 자동차, 철도차량 등 고속 교통수송기관이나 고성능 계산기의 냉각용 팬 등으로부터 발생하는 유체음이 공학분야에서 중요한 문제가 되고 있으며, 발생의 원인이나 저감 대책에 대해서 커다란 관심이 고조되고 있다.

유체에서의 소음은 물체의 진동에 의해 발생하는 것과, 물체 주위에서의 유체의 비정상 운동에 의해 발생하는 것이 있다(Zdravkovich, 1997). 즉, 유체 진동소음의 크기는 대표속도의  $O(10^{-2})$  정도에 비례하는 것에 반해서, 유체의 비정상 운동에 의한 유체소음은 대표속도의  $O(10^{-5} \sim 10^{-8})$  정도에 비례하기 때문에, 현실적으로 이러한 유체소음을 해석하기란 매우 곤란하다.

저속의 흐름에서는 유체소음의 음파에 의한 압력변동은 유체의 압력변동에 비해서 미약할 정도로 매우 작으며, 이 때문에 고정도의 계산 scheme이 필요하다. 또한 음파는 음속에서 전파하기 때문에 이러한 현상을 해석하기 위해서는 매우 큰 계산영역이 필요할 뿐만 아니라, 실험결과나 원거리 흐름에 대한 이론과 비교를 행하기 위해서도 보다 넓은 계산영역이 요구된다. 때문에 이러한 흐름 현상을 해석하기 위한 계산기에

요구되는 부하도 매우 크게 증가한다. 즉, 유체는 정압에 대해서 매우 미묘하게 변동을 하며, 또한 측정영역이 매우 넓은 범위에 이르기 때문에, 실험적 연구에서는 대규모 고정도의 실험장치가 필요할 것으로 사료된다. 또한, 계산기의 발달과 더불어 유체음을 직접 계산하기 위한 수치계산에 의한 연구도 활발하게 이루어지고 있으며, 음향학적 유추에 기초한 방법이나 DNS에 의한 직접음파를 계산하는 많은 방법들이 연구되고 있다(Lee, 1997; Hosoya et al., 2000). 때문에 이러한 유체음의 발생 매카니즘을 정확하게 해석하는 것이 유체 유동에서 소음 문제를 해결하는 척도가 될 것이다.

한편, 격자볼츠만법 (Lattice Boltzmann Method, LBM)(Alexander et al., 1993; 강호근 등, 2002) 및 본 연구에서 사용되고 있는 열·유체모델의 차분 격자볼츠만(Finite Difference Lattice Boltzmann Method, FDLBM)(Cao et al., 1997; 강호근 등, 2001)은 최근, 유체의 흐름현상을 해석함에 있어 널리 이용되는 수치계산방법이다. 따라서 이러한 차분 격자볼츠만법을 도입한 2차원 열·유체 모델을 이용하여, 본 연구에서는 원주 주위에서 발생하는 2차원 유체음(aeolian tone)의 수치계산을 행하였다.

#### 2. 이론해석

##### 2.1 격자BGM모델

강호근 연락처: 경남 통영시 인평동 445 경상대학교 수송기계공학부 · 해양산업연구소

055-640-3064 kang88@gaechuk.gsnu.ac.kr

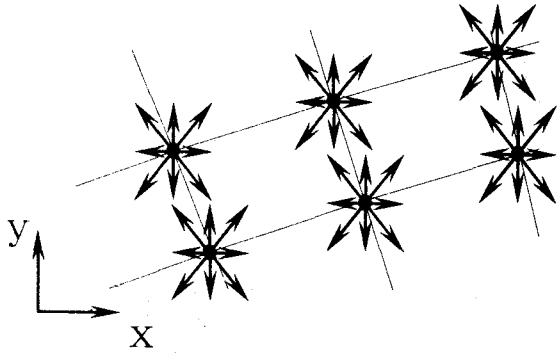


Fig. 1 Two-dimensional space lattice and particle distribution in FDLBM

LBM에서 일반적으로 흐름의 계산영역은 규칙적인 격자에 의해 이산화 되며, 그 격자상에서 가상입자가 충돌과 이동을 반복한다. 이때, 입자의 분포함수로부터 유체로서의 거시적인 변수들을 결정하여 흐름의 여러 파라메타(밀도, 속도 및 에너지)를 구한다. 그러나 이와 같이 LBM에서 이용하고 있는 규칙적인 정방격자나 정삼각형격자의 경우는, 복잡한 물체형상에의 응용은 곤란하다는 문제가 야기된다.

이러한 문제를 해결하는 방안으로, Cao(1997)는 물리형상과 이산적입자속도를 독립적으로 취급할 수 있는 차분 격자볼츠만(FDLBM)을 제안하였으며, 따라서 물리적 형상과 이산적 입자속도를 독립적으로 취급할 수가 있다. 즉, LBM에서는 격자형상과 스킴의 Lagrange적 성질은 격자상을 운동하는 입자의 거동에 직접관계가 있으며, 물리형상은 LBM의 운동학적 방정식으로부터 운동량 보존식을 정확하게 도출하기 위해서 필요하다.

Fig. 1은 FDLBM에서의 이러한 물리형상과 격자를 분리한 개략적인 형상을 보여주고 있다.

LBM에서 충돌과 병진을 반복하는 입자운동은 시간  $t$ , 위치 벡터  $x$  상에서의 분포함수  $f_i(x, t)$ 를 이용하면, 다음과 같다.

$$f_i(x + c_i \tau, t + \tau) = f_i(x, t) + \Omega_i \quad (1)$$

여기서,  $c_i$ 는 입자속도,  $i$ 는 입자속도의 방향,  $\Omega_i$ 는 충돌에 의한 입자분포의 변화를 나타내는 연산자이다.

식(1)을 시간, 공간에 관해 Taylor전개를 하여, 유체의 속도에 관한 1차항까지만 고려하면,

$$\frac{\partial f_i(x, t)}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_\alpha} = \Omega_i \quad (2)$$

와 같이 되며, 식(2)를 이산화 볼츠만방정식이라 부른다.

충돌연산을 간소화하기 위해서는, 전체 충돌연산에서의 고유치를  $-1/\phi$ 로 대표시키면 다음과 같이 표현된다.

$$\Omega_i = -\frac{1}{\phi} [f_i(x, t) - f_i^{(0)}(x, t)] \quad (3)$$

여기서  $f_i^{(0)}$ 는 국소평형분포함수를 나타내며,  $\phi$ 는 1 timestep에서 시간간격  $\tau$ 를 기준으로 할때 입자분포가 평형상태에 도달할 때까지 걸리는 시간에 해당하며, 일반적으로 단일시간완화계수라 불려진다. 이러한 충돌연산은 1회의 충돌에 있어서 전 격

자점의 입자분포가 항상 일정하게 유지하도록  $1/\phi$ 의 비율로 비평형량이 감소하며, 국소적 평형상태에 가깝도록 완화하는 것을 명확히 표현하고 있다.

이러한 연산자는 볼츠만방정식의 기본 모델방정식으로서 가장 널리 이용되고 있는 격자BGK모델이라 불려진다.

## 2.2 국소평형분포함수

국소평형분포란, 유한한 공간 영역내에서 평형상태에 도달한 경우의 입자분포의 상태를 나타내며, 이러한 분포함수는 국소적인 유체의 밀도  $\rho$ , 유속  $\mathbf{u}$  및 온도(내부에너지)  $e$ 에 의해서 결정된다.

한편, 저Mach수 흐름에서 입자속도에 비해서 유속이 충분히 작은 흐름을 고려하고, 식(1)을 유속  $\mathbf{u}$ 의 3차항까지 Taylor전개를 하여 정리하면

$$f_i^{(0)} = F_i \rho \left[ 1 - 2Bc_{i\alpha} u_\alpha + 2B^2(c_{i\alpha} u_\alpha)^2 + Bu^2 - \frac{4}{3} B^3(c_{i\alpha} u_\alpha)^3 - 2B^2 c_{i\alpha} u_\alpha u^2 \right] \quad (4)$$

와 같다. 여기서, 거시적인 흐름의 변수들을 사용하면,  $F_i$  및  $B$ 는 다음과 같이 결정할 수가 있다.

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 + \frac{5}{4Bc^2} \left( \frac{17}{96B^2c^4} + \frac{35}{48Bc^2} + \frac{49}{45} \right) \\ F_{11} &= -\frac{1}{8Bc^2} \left( \frac{13}{16B^2c^4} + \frac{71}{24Bc^2} + 3 \right) \\ F_{12} &= \frac{1}{16Bc^2} \left( \frac{5}{16B^2c^4} + \frac{25}{24Bc^2} + \frac{3}{5} \right) \\ F_{13} &= -\frac{1}{24Bc^2} \left( \frac{1}{16B^2c^4} + \frac{1}{8Bc^2} + \frac{1}{15} \right) \\ F_{21} &= \frac{1}{4B^3c^6} \left( \frac{Bc^2}{3} + \frac{1}{8} \right), \quad F_{22} = -\frac{1}{1536B^3c^6} (2Bc^2 + 3) \\ B &= -\frac{1}{2e} \end{aligned} \quad (5) \sim (11)$$

## 2.3 안정성 조건 및 새로운 계산모델

식(1)의 방정식에 나타나는 점성계수  $\nu = \mu/\rho$  와, 완화계수  $\phi$ 는

$$\nu = e\phi \quad (12)$$

와 같은 관계가 있다. 이러한 식으로부터 고 Re수의 흐름을 계산하기 위해서는 완화계수  $\phi$ 는 매우 작은 값을 설정할 필요가 있다.

한편, 식(1)의 시간적분에 Euler의 1차의 전진차분을 이용하면,

$$f_i(x + c_i \tau, t + \tau) = f_i(x, t) + \Delta t \left[ -c_{i\alpha} \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\phi} (f_i(x, t) - f_i^{(0)}(x, t)) \right] \quad (13)$$

와 같다. 여기서  $\Delta t$ 은 시간간격이다. 식(13)의 충돌항(우변 제 2항)의 계산에 있어 안정성의 조건은

$$\frac{\Delta t}{\phi} < 2.0 \quad (14)$$

와 같이 주어진다. 이 조건은, 분포함수가 평형에 의해, 국소 평

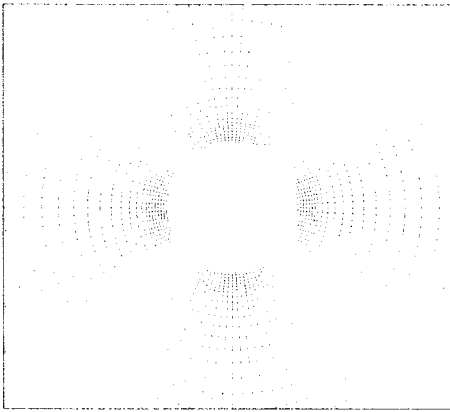


Fig. 2 Calculation lattice

형분포함수에 근접하는 조건이며,  $\Delta t/\phi \geq 2$ 의 경우에는, 충돌시에 국소평형에 근접하지 않는다. 결국, 식(12), (14)로부터 고Re 수 흐름을 계산할 때에는 시간간격  $\Delta t$ 를 적게 취할 필요가 있으며, 이러한 경우 많은 계산시간의 증대를 가져온다.

따라서 이와같은 문제점들을 해결하기 위한 방법으로서,  $\phi$ 와  $\nu$ 의 관계를 이용해 이산BGK방정식(2)에 2차의 항을 추가하면,

$$\frac{\partial f_i(x,t)}{\partial t} + c_{ia} \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_a} - \frac{ac_{ia}}{\phi} \frac{\partial}{\partial x_a} (f_i(x,t) - f_i^{(0)}(x,t)) = -\frac{1}{\phi} (f_i(x,t) - f_i^{(0)}(x,t)) \quad (15)$$

와 같이 변경되어질 수가 있다. 또한 동 점성계수와 완화계수와 의 관계는

$$\nu = e(\phi - a) \quad (16)$$

와 같이 표현할 수가 있다. 즉, 임의의 계수  $a$ 를 적당히 바꿈으로서, 작은 동 점성계수에서의 흐름에 대해서도,  $\phi$ 를 충분히 크게 설정할 수가 있으며, 아울러 조건(14)을 만족할 수 있는 시간간격을 크게 할 수가 있다.

### 3. 수치계산

흐름은 유체 중에 물체가 존재하는 경우, 흐름과 물체의 간섭에 의한 유체음이 발생한다. 이러한 대표적인 예로서, 유체와 원주의 간섭에 의한 aeolian음이 발생하며, 이러한 것은 Karman와의 발생과 밀접한 관계가 있는 것으로 알려져 있다. 이와 같이 일정한 유속을 갖는 2차원 원주로부터 발생하는 aeolian음은 Strouhal(1878)의 연구 이후 실험적으로도, 이론적으로도 많은 연구(Lighthill, 1952)가 행하여져 왔으며, Aeolian tone이라 불려진 것은 Rayleigh(1896) 이후부터이다. 또한, 최근 고정도의 scheme을 갖는 수치계산(DNS 등)(Hosoya et al., 2000)을 이용한 방법에서 그 발생과 전파의 매카니즘을 명확하게 밝히려 하는 연구도 행하여지고 있다.

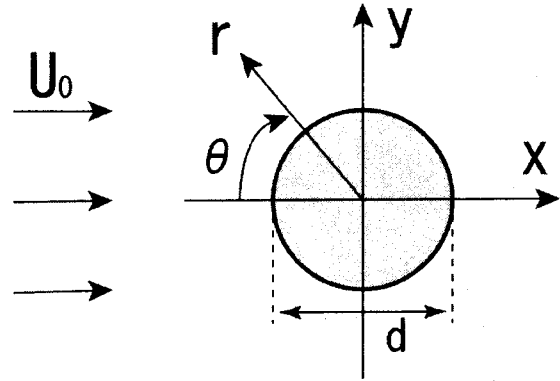


Fig. 3 Schematic diagram of flow

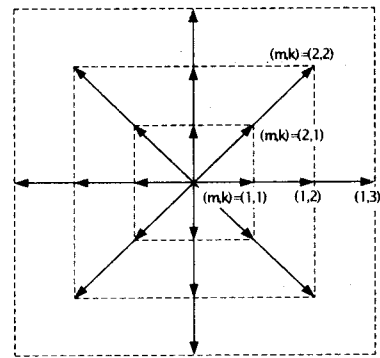


Fig. 4 Distributions of moving particles in 2D21V model

본 연구에서는 흐름장의 대상으로서 2차원 원주 주위의 흐름을 생각한다. 계산에서는 원주중심을 원점으로 한 극좌표를 이용하며, 계산영역은 원주직경의 400배로 하였다(Fig. 2). 또한, 원주중심을 원점으로 하는 2차원 극좌표계  $(x, y) = (x_1, x_2)$ 에서 일정한 유속  $(u_1, u_2) = (U_0, 0)$ 을 Fig. 3과 같이 설정하였다. 또한, 원점으로부터의 거리  $r$ 과 흐름의 상류방향으로부터 시계방향의 각도  $\theta$ 에 의한 극좌표계  $(r, \theta)$ 를 취하였다. 즉, 격자간격은  $r$ 방향으로는 부등간격,  $\theta$ 방향은 등간격의 형상을 하고 있으며, 편의상 원주중심을 원점으로 확대하여 나타내고 있다. 각 물리량은, 정지음속  $c_0$ , 정지밀도  $\rho_0$ , 및 원주직경  $d$ 에 의해 무차원화하였다.

경계조건은 물체표면에서는 밀도의 외삽에 의한 점착조건 및 단열조건을, 초기조건으로서 전 격자점에서 평형상태의 흐름을 가정하여 원방에서는 일정한 유체의 유입속도를 설정하였다. 즉, 대표속도  $U_0$ 는 일정( $U_0=0.2$ )하게 설정하였으며, 내부에너지는  $e=0.2$ , Mach수  $M = U_0/c_0 = 0.2$ , 일정유속에 기초한 Reynolds수는  $Re = U_0 d/\nu = 200$ 이다. 또한, 격자점수는 반경방향으로 201 ( $r$  방향), 원주방향( $\theta$ 방향)으로는 121을 설정하였다. 여기서, 내부에너지  $e$ 를 변화시킴으로서 유체의 음속을 변화시켜, 이에따른 Mach수를 변화시키는 방법을 이용하였다.

수치계산방법으로서, 식(13)을 기본식으로 하여, 유체의 압축

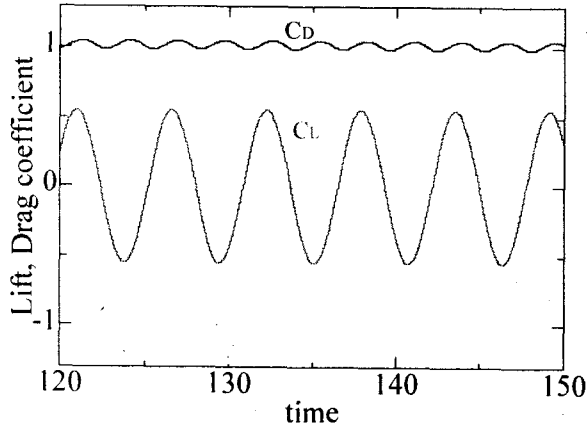


Fig. 5 Time variation of lift coefficient  $C_D$  and lift coefficient  $C_L$ .  $Re=200$ ,  $M=0.2$

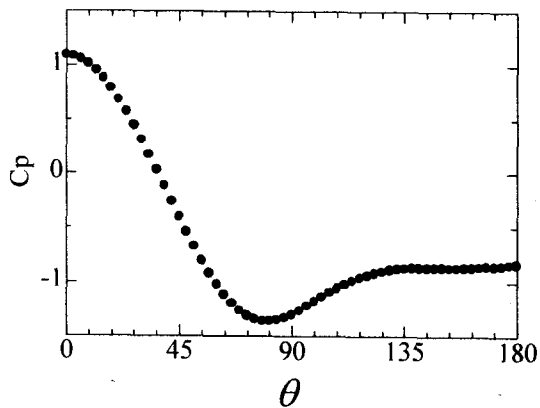


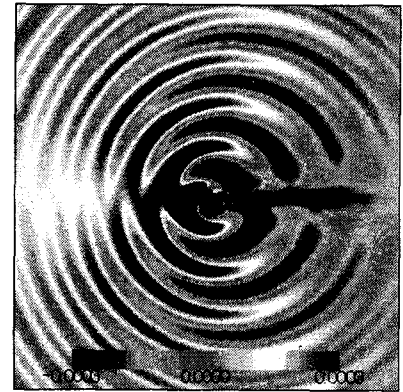
Fig. 6 Pressure coefficient  $C_p$  at various  $\theta$ .  $Re=200$ ,  $M=0.2$

성을 고려한 차분 격자볼츠만의 2차원 21속도 모델(2D21V)을 도입하였다(Fig. 4). 또한, 시간의 이산화는 2차정도의 Runge-Kutta 및 공간의 이산화로서는 대류항을 3차정도의 Up-wind scheme을 적용하였다.

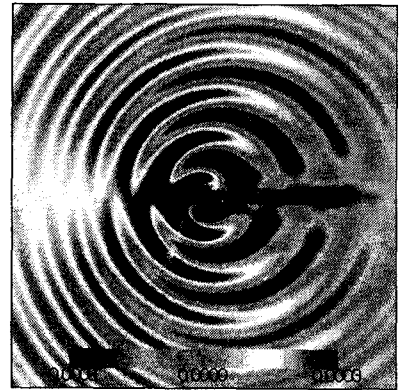
Fig. 5는 원주 후방에 작용하는 항력계수  $C_D$ 과 양력계수  $C_L$  값의 변화를 시간변화에 따라 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이, 항력 및 양력의 변동주기가 같다는 것을 확인할 수가 있으며, 또한 Karman와의 방출이 주기적으로 발생하는 것을 알 수가 있다. 한편, 본 계산에서의 양력의 변동주기는 무차원 시간으로  $\Delta t = 5.632$ 이며, 이때의 Strouhal수  $St = 0.178$ 이다. 이러한 것은 실험에 의한 Karman와의 발생주기  $St = 0.18 \sim 0.20$ 와 잘 일치한다.

또한, Fig. 6는 원주표면에서의 압력계수  $C_p$ 의 변화를 나타내고 있다. 그림중의 값은 방출하는 Karman와의 1주기에 해당하는 시간에서 평균치로 도식화한 것이다. 압력은 점점 감소하고 있으며, 압력계수가 최소치를 가지는 각도 및 압력이 회복하여 압력계수가 거의 일정하게 되는 각도는 다른 수치해석법(DNS)과 거의 일치함을 나타내었다.

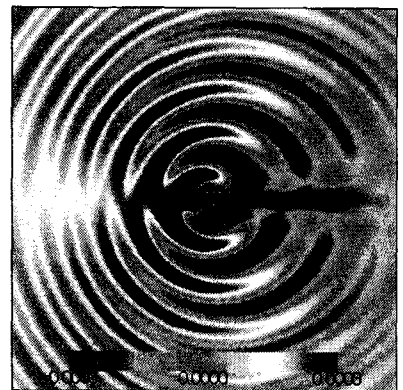
다음은 원주주위에서의 압력분포를 조사하기 위하여 다음과



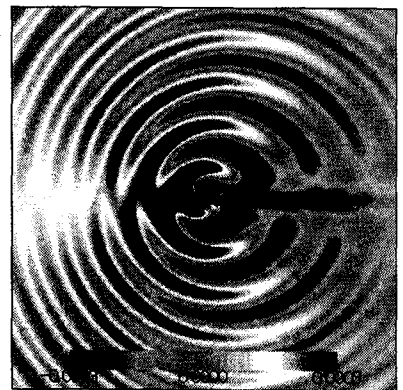
(a)  $t=130$



(b)  $t=131$



(c)  $t=132$



(d)  $t=133$

Fig. 7 Acoustic pressure distribution by LBM.  $Re=200$ ,  $M=0.2$

같은  $\Delta p$ 의 관계를 이용하였다.

$$\Delta p = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{p - \rho_0 e_0}{\rho_0 e_0} \quad (17)$$

Fig. 7는 무차원시간 131~133에 있어서 흐름의 압력분포  $\Delta p$ 를 나타내고 있으며, 원주후방에서 주기적인 Karman와가 발생하는 것을 알 수가 있다. 이때의 압력분포는 -0.0003~0.0003의 사이를 나타내고 있다. 즉 파란 부분은 압력이 -0.0003이하의 음의 압력, 붉은 부분은 압력이 0.0003이상의 압력을 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 원주를 중심으로 상하 교대로 (+)와 (-)의 압력파가 전파하고 있는 것을 확인할 수가 있다. 그리고, 이러한 주기적인 압력변동은  $O(10^{-4})$  정도이며, 계산영역 전체의 압력에 비해서  $O(10^{-2})$  정도 적은 것을 확인할 수가 있다. 이것은 음파에 의한 압력변동을 의미한다.

여기서, 음파의 발생 메카니즘을 생각하면, Karman와는 원주의 상측 및 하측으로부터 교대로 방출한다. 와가 방출된 측에는 (-)의 압력펄스가, 그 반대측에서는 (+)의 압력 펄스가 발생한다. 그 결과, 원주표면에서의 압력은 와가 방출되었던 측에서는 (-), 그 반대측에서는 (+)가 되며, Karman와의 방출과 함께 상향 또는 하향의 양력이 발생한다. 이러한 (+) 또는 (-)의 압력펄스의 발생이 2중극음(dipole sound)을 발생시키며, 각각의 방향으로 전파한다.

한편, 원주중심으로부터 원주직경의 50배 떨어진 거리에서의 격자점에서 각각의 방향  $\theta=45^\circ, 315^\circ$ ,  $\theta=90^\circ, 270^\circ$ ,  $\theta=135^\circ, 225^\circ$ 에서 압력이 시간변동에 따른 변화를 Fig. 8은 나타내고 있다. 각각의 방향에 있어서도 압력이 주기적으로 변동하고 있음을 알 수가 있다. 또한 실선과 점선이 상하대칭점에서 반주기씩 어긋나고 있음을 알 수가 있으며, 음파가 원주의 상하로부터 교대로 방출되고 있음을 확인할 수가 있다. 이러한 음의 변동주기는 무차원 시간에서  $\Delta t=5.632$ 이며, 그때의 Strouhal 수는  $St=0.178$ 가 된다. Fig. 5의 양력변동 및 Strouhal수와 같다. 따라서 음파의 발생 주파수와 양력의 변동주파수는 같으며, 동시에 Karman와의 발생주파수와 같다는 것을 알 수가 있다. 따라서, Karman와의 발생주파수와 동일한 (+) 및 (-)의 압력파가 상하 교대로 전파하고 있는 2중극음을 확인할 수가 있다.

Fig. 9은  $\theta=45^\circ, 90^\circ$  및  $135^\circ$ 의 각각의 방향에서 r방향의 압력분포를 나타내고 있다. 각 방향 모두에서 압력이 원주중심으로 부터의 거리 r에 관해  $r^{-1/2}$ 에 비례해서 감소하는 것을 알 수가 있으며, 선형 이론예측과도 잘 일치하였다. 또한, 각 방향에 있어서 무차원 시간 1이 지나갔을 때 음파가 전파하는 거리  $\Delta r$ 을 조사되었다. 본 계산방법에서 음속은  $c_s=(2e)^{0.5}$ 로 주어졌으며, 이것은 각 방향에서의 음속은 같다. 그 결과  $\theta=90^\circ$ 의 방향을 중심으로 하여, 흐름의 상류측으로 향하는 음파는 간격이 좁으며(늦게 전파한다), 흐름의 하류측으로 향하는 음파는 간격이 넓다(빠르게 전파한다)는 것을 알 수가 있다. 이것은 일정유속에 의한 Doppler효과의 영향으로 생각된다. 즉, 일정유속과 음파의 전파방향이 반대로 되는 흐름의 상류측에서는 전파속도가 늦게 되며, 일정유속과 음파의 전파방향이 같은 하류측

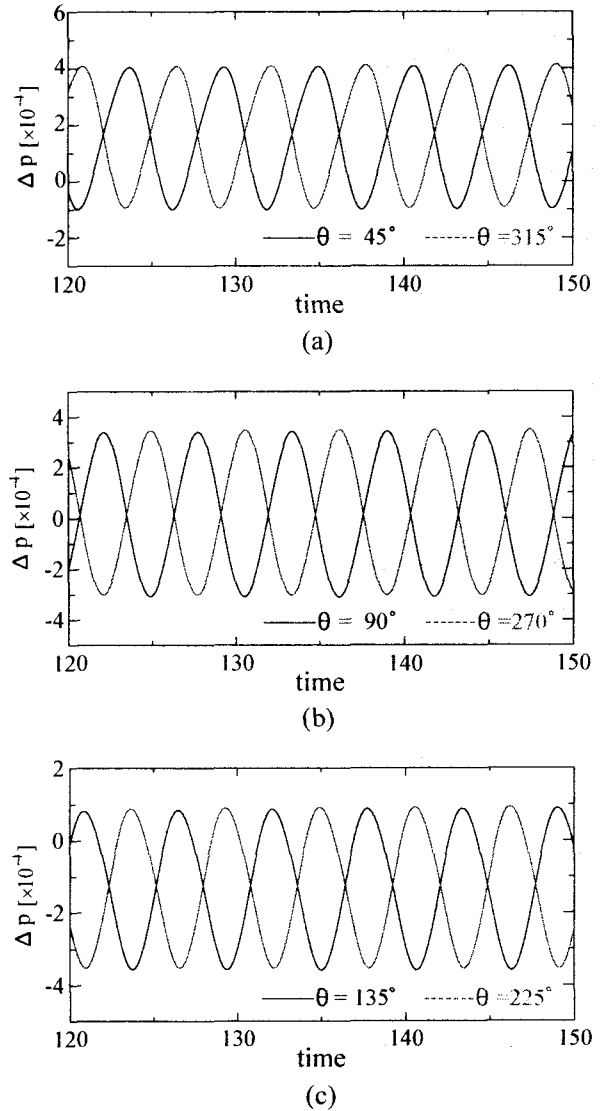


Fig. 8 Time histories of the acoustic pressure at  $Re=200$ ,  $M=0.2$

에서는 전파속도가 빠르게 된다. 한편,  $\theta=90^\circ$  방향에서는 일정 유속의 영향을 받지 않고 음속에서 전파한다. 각 방향의 음파의 전파속도  $c_\theta$ 는

$$c_\theta = c_s - U_0 \cos \theta \quad (18)$$

와 같이 주어졌다. 여기서  $c_s$ 는 음속을 나타낸다.

#### 4. 결론

차분 격자볼츠만의 2차원 열·유체모델을 이용하여, 2차원 원주주위의 흐름장으로부터 발생하는 유체음을 수치해석을 통하여 조사되었다.

2차원 원주의 후방에 발생하는 Karman와의 Strouhal수는 실험치와 잘 일치함을 알 수가 있었으며, 원주주위의 흐름장을 잘 재현하였다. 그 결과 원주 주위의 양력변동에 의해 발생하는

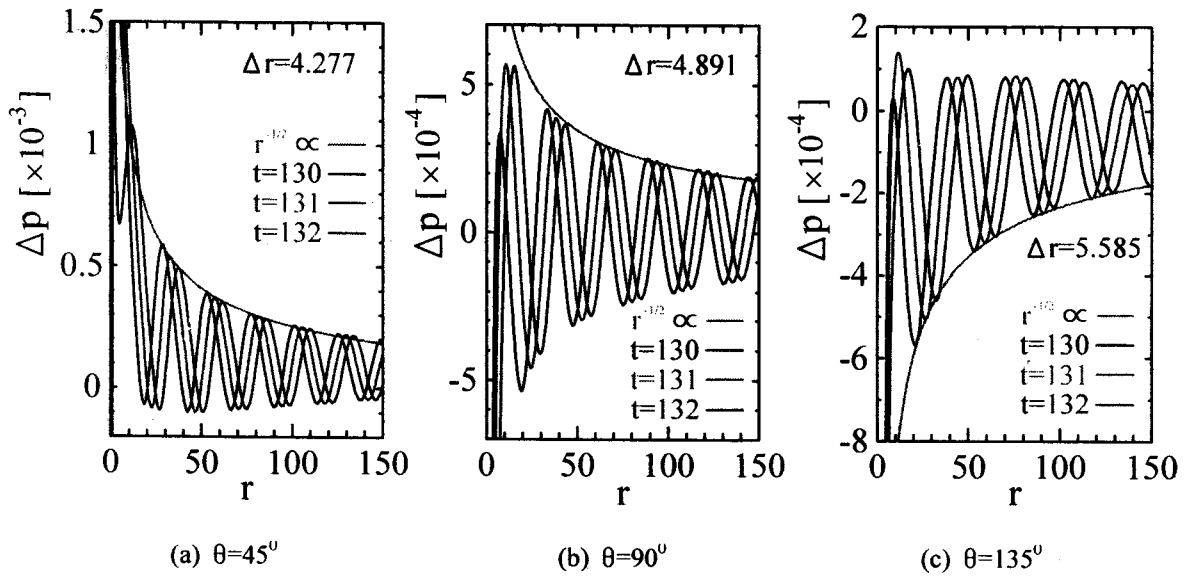


Fig. 9 Propagation of acoustic pressure. Re=200, M=0.2

Karman와 함께 2중극음(dipole sound)의 발생을 확인할 수가 있었다.

음파의 전파속도는 일정유속에 의한 Doppler효과의 영향으로 흐름의 상류측으로 향하는 음파는 늦으며, 흐름의 하류측으로 향하는 음파는 빠르게 전파함을 알 수가 있었다. 또한, 음압의 크기는 원주 중심의 거리  $r^{1/2}$ 에 비례하며, 이것은 선형이론과 잘 일치함을 확인하였다.

### 후 기

본 연구는 2002년도 두뇌한국21사업 및 2002년도 경상대학교 해양과학대학 부설 해양산업연구소의 학술연구조성비에 의하여 지원되었으며, 연구비 지원에 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

강호근, 노기덕, 손강필, 최민선, 이영호 (2002). "격자볼츠만법을 이용한 2차원 압축성 충격파의 유동현상에 관한 수치계산", 제2회 한국유체공학학술대회 논문집, pp. 557-560.  
 강호근, Tsutahara, M., 김정환, 이영호 (2001). "Numerical Simulation of shock Wave Propagating using the Finite Difference Lattice Boltzmann Method", 대한기계학회 추계학술대회 논문집 B(2001), pp. 468-474.

Alexander, F. J., Chen, S. and Sterling, D. J. (1993). "Lattice Boltzmann thermodynamics", Physical Review E, Vol. 47, pp. 2249-2252.  
 Cao, N., Chen, S., Jin, S. and Martinez, D. (1997). "Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method", Physical Review E, Vol. 55, R21~R24.  
 Hosoya, H., Hatakeyama, N., Shoji, H. and Inoue, O. (2002). "Direct Numerical Simulation of Sound Generated by the Flow around a Circular Cylinder", 14th JSCFD, A09-1.  
 Lele, S. K. (1997). "Computational aeroacoustics : a review," AIAA paper, 97-0018.  
 Lighthill, M. J. (1952). "On Sound Generated Aerodynamically", I. General theory, Proc. R. Soc. Lond. A221, pp. 564-587  
 Lord Rayleigh (1896). "The theory of sound, vol.2", Macmillan, pp. 412-414 (Reprinted by Dover, 1945).  
 Strouhal, V. (1878). "On one particular way of tone generation (in German)," Ann. Phys. Chem. (Wied. Ann. Phys.) 5, pp. 216-251.  
 Zdravkovich, M. M. (1997). "Flow around circular cylinders, vol.1: Fundamentals", Oxford University Press, pp. 566-571.