

무요소법의 적응해석을 위한 반복격자해법

Iterative Cell-wise Solution Method for the Adaptive Analysis of a Meshless Method

석 병 호* 임 장 근**
Seog, Byung-Ho Lim Jang-Keun

ABSTRACT

For the accurate analysis of crack problems, considerable nodal refinement near the crack tip to capture singular stress field with sufficient accuracy to provide a useful computation of stress intensity factor is required. So, in this paper, adaptive nodal refinement scheme is proposed where nodes in restricted cell regions centered at crack tip are arranged in array for enhanced spatial resolution and adaptivity. With only cell-wise adaptive refinement scheme around crack tip fields, singularity of crack tip is sufficiently described to expect a successive crack propagate direction. Through numerical tests, accuracy of the proposed adaptive scheme is investigated and compared with the finite element and experimental results. By this implementation, it is shown that high accuracy is achieved by using iterative cell-wise solution method for analyzing crack propagation problems.

1. 서 론

공학문제의 강력한 해석도구로 널리 사용되고 있는 유한요소법은 다음과 같은 종류의 해석에서는 문제점을 갖고 있다. 첫째로는 대변형문제의 해석의 경우로서 해석영역을 분할하는 단위가 되는 유한요소에서 찌그러짐이 과도하여 해의 정확도가 떨어지는 문제가 발생하며, 둘째로는 균열진전문제의 해석으로 균열진전의 각 단계에서 요소망을 반복적으로 재구성해야 하는 문제점을 안고 있다. 이것은 유한요소법의 근간인 요소로부터 발생하는 문제로써 현재 유한요소법의 큰 단점으로 대두되고 있다.

이와 같은 유한요소법의 단점을 극복하기 위한 새로운 방법으로 적절한 절점의 배치만으로 해석이 가능한 무요소법(meshless method)이 제안되고 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있으며 국내에서도 많은 연구사례가 발표되고 있다.

현재 제안되고 있는 무요소법의 종류는 물리량의 근사방법에 따라 크게 구분되며 이를 정리하면 다음과 같다. 첫째로는 이동최소자승법(moving least square method)을 이용한 DEM(diffuse element method)⁽¹⁾과 EFGM(element-free Galerkin method)⁽²⁾, 둘째로는 핵함수(kernel function)를 사용한 SPH(smoothed particle hydrodynamics method)⁽³⁾와 RKPM(reproducing kernel particle method)⁽⁴⁾, 셋째로는 단위분할에 근거한 PUM(partition of unity method)⁽⁵⁾, hp-clouds method⁽⁶⁾ 등이 있다.

특히 Belytschko 는 무요소법을 이용한 균열진전거동의 해석을 통하여 무요소법의 유용성과 정확성을 입증하였는데 이를 위해 균열선단에서의 적분에 관한 연구, 균열선단의 특이성을 표현하기 위해 삼각함수 및 특이함수를 기저함수 또는 근사식에 추가하여 사용하는 방법에 대한 연구, 균열선단에서의 절점의 영향영역의 크기에 관한 연구등을 수행하였다.

본 연구에서는 균열진전거동의 해석을 위해 균열의 각 진전단계에서 원형셀의 격자형 절점군을 반

* 정희원, 한양대 기계기술연구소

** 정희원, 한양대 기계공학부 교수

복적으로 배치하는 적응적 해석기법을 도입하여 균열진전거동의 정확한 해석을 수행하고자 하였다.

여러가지 수치실험을 수행하고 그 결과를 기존의 유한요소법의 결과와 비교하여 제안한 방법의 타당성과 정확성을 평가하고자 하였다.

2. 균열진전거동의 해석을 위한 이론

본 연구에서는 혼합모드에 의한 균열진전문제의 해석에 초점을 맞추었으며, 균열진전문제의 해석을 위한 해석이론은 다음과 같다.

2.1 균열진전방향

균열의 진전방향을 결정하는 대표적인 이론을 살펴보면 1) 최대주응력설(maximum principal stress criterion),⁽⁷⁾ 2) 최대에너지방출률설(maximum energy release rate criterion)⁽⁸⁾ 그리고 3) 최소변형률에너지밀도설(minimum strain energy density criterion)⁽⁹⁾ 등이 있다.

정적탄성의 파괴역학의 경우 1)과 2)의 이론은 서로 동일함이 증명⁽⁸⁾되었으며, 최소변형률에너지밀도설은 변형률에너지밀도를 최소화하는 방향으로 균열의 진전이 이루어진다는 이론이다. 본 연구에서는 최대주응력설을 이용하여 균열의 진전방향을 결정하였다.

균열선단에서의 응력을 극좌표계(polar coordinates)로 나타내면 식 (1)로 표현되는데, 최대주응력설에 의해 균열의 진전방향의 식은 식 (1)로부터 $\sigma_{r,\theta}$ 가 0이 되는 조건식 (2)에서 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \\ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ \frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] = 0 \quad (2)$$

식 (2)로부터 최종적으로 균열의 진전방향 θ_m 에 관한 식 (3)을 구할 수 있으며 이 진전방향에 대하여 응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 가 주응력이 되어 모드 I과 모드 II의 혼합모드에서의 등가의 응력확대계수를 식 (4)를 통해 최종식 (5)를 얻을 수 있다.

$$K_I \sin \theta_m + K_{II} (3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_m}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_m}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_m \right] = \frac{K_{Ieq}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4)$$

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_m}{2} - 3 K_{II} \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \sin \frac{\theta_m}{2} \quad (5)$$

2.2 응력확대계수

파괴역학적 변수(parameter)를 구하기 위한 방법은 다양하지만 본 연구에서는 Rice에 의해 제안된 J적분법⁽¹⁰⁾을 이용하였다. J적분법은 균열을 둘러싼 경로(path)에 독립적인 값으로 Fig. 1의 경로에 대해 적분식으로 표현하면 다음식과 같다.

$$J = \int \left[W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (6)$$

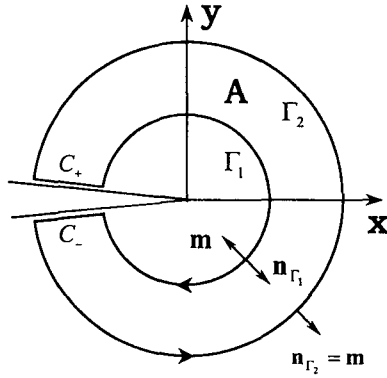


Fig. 1 Path independent closed contour about the tip of a crack.

이때 $W = \int \sigma d\varepsilon$ 로 변형률에너지의 밀도, σ 는 응력벡터 그리고 \mathbf{n} 은 외향의 단위법선벡터를 각각 나타낸다. 유한요소법에서 식 (6)은 경로의 지정이 어렵고 경로에서 불연속적인 응력의 분포가 나타나는 문제점이 생겨 이를 영역적분으로 바꾸어서 계산하는데 본 연구에서도 이를 채택하였다.

앞의 경로적분식 (6)에 영역적분의 목적으로 특별한 무계함수(weight function) q 를 대입하여 정리하면 식 (7)과 같다. 이때 무계함수의 조건으로는 적분경로 Γ_2 에서는 0, Γ_1 에서는 1의 무계치를 부여하며 그 외의 영역에서는 두 무계치 사이의 값을 가지며 연속인 무계치를 부여하는 함수이면 된다.

무계함수 q 를 대입한 식 (7)에 발산정리(divergence theorem)를 적용하여 영역적분의 형태로 변환하여 정리하면 식 (81)과 같은 최종의 영역적분의 식을 구할 수 있다.

$$J' = \int_{\Gamma} \left[W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j q d\Gamma \quad (7)$$

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (8)$$

혼합모드에서 각각의 모드에 대한 응력확대계수를 구하기 위한 방법으로 상호적분법^(11,12)이 있다. 선형탄성의 경우 중첩의 원리가 적용되므로 물체 1과 물체 2의 상태가 중첩되어 나타나는 경우를 생각할 수 있다. 균열이 있는 평형인 각기 다른 두 물체 1과 물체 2가 있다고 가정하면, 물체 1은 실제 우리가 해석하는 물체가 되고 물체 2는 가상으로 존재하는 물체가 된다.

두가지 상태가 중첩되는 경우의 전체 J적분은 다음의 식 (9)로 표현된다.

$$J^{tot} = \int_{\Gamma} \left[W^{tot} \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (9)$$

$$W^{tot} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \quad (10)$$

식 (9)를 물체 1과 2의 각각의 값과 물체 1과 2가 상호작용하는 항으로 구분하면 식 (11)로 쓸 수 있다. 이때 상첨자 (1) 및 (2)는 각각의 물체를 가리킨다.

$$\begin{aligned}
J^{tot} &= \int \left[W^{(1)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma + \int \left[W^{(2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \\
&+ \int \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \\
&= J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)}
\end{aligned} \tag{11}$$

식 (11)에서 물체 1 과 2 에 대한 각각의 J 적분값과 상호작용하는 경우의 값인 $M^{(1,2)}$ 를 식 (12) 와 같이 얻을 수 있다.

$$M^{(1,2)} = \int \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \tag{12}$$

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{13}$$

전체 J 적분은 식 (14)에서 물체 1 과 2 에 대한 각각의 J 적분값과 상호작용하는 경우의 값으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
J^{tot} &= \frac{2}{E'} \left[\left((K_I^{(1)})^2 + (K_{II}^{(1)})^2 \right) + \left((K_I^{(2)})^2 + (K_{II}^{(2)})^2 \right) + \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \right] \\
&= J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

최종적으로 식 (12)와 식 (14)로부터 관계식 (15)를 얻을 수 있다.

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \tag{15}$$

실제해석의 경우인 물체 1 의 응력확대계수를 구하기 위하여 먼저 가상의 물체 2 가 모드 I 의 상태라고 가정한 $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = 0$ 의 조건을 대입한 무시할 수 있는 미소량의 가상물체 2 의 상태가 반영된, 즉 물체 1 만의 상태라고 할 수 있는 식 (15)를 계산한다. 식 (16)의 관계로부터 식 (17)의 실제 물체 1 의 모드 I 에 대한 응력확대계수를 구할 수 있다.

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} K_I^{(1)} \tag{16}$$

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1,2)} \tag{17}$$

같은 방법으로 모드 2 에 관한 식 (18)을 얻을 수 있다.

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1,2)} \tag{18}$$

식 (17)과 식 (18)을 이용하여 실제해석의 경우인 물체 1 에 대한 각각의 응력확대계수를 구할 수 있다. 식 (12)의 적분경로식 또한 영역적분의 식 (19)로 변환되어 적분은 영역의 적분점을 통하여 계산되게 된다.

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \tag{19}$$

3. 반복격자해법

본 논문에서는 균열진전거동의 정확한 해석을 위하여 각 균열의 진전단계에서 균열의 선단에 격자

형 절점군을 반복적으로 배치하는 적응적 해석기법을 이용하였으며 절점의 추가에 따라 방정식의 상태가 나빠지는 문제를 해결하기 위하여 Gauss-Seidel 법을 사용하였다.

3.1 격자해법

균열의 각 진전단계에서 해의 정확도를 높이고 행렬의 정칙성을 좋게 하기 위하여 Fig. 2 와 같이 원형셀에 격자형 절점군을 배치하여 계산한다. 정확도를 높이기 위해 균열선단을 중심으로 하는 원형셀에 격자형의 절점군을 배치하고 그 원형셀의 내부에 위치한 초기 절점은 지우고 해석하며 그 단계의 해석이 종료되면 다시 초기절점을 삽입하는 방법을 사용하게 된다.

원형셀에 격자형 절점군을 추가하는 적응적 기법으로 정확한 해를 얻을 수 있는 장점이 있다.

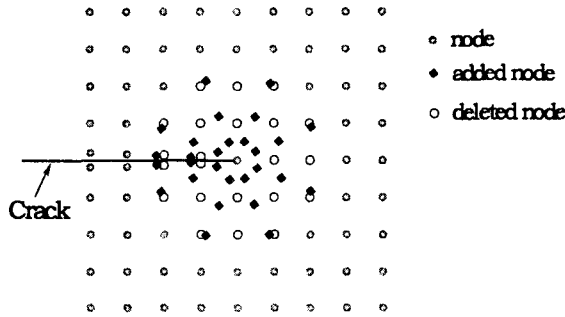


Fig. 2 Array of nodes at the crack tip for crack analysis.

3.2 Gauss-Seidel 법을 이용한 반복계산법

균열해석에서 정확도를 높이기 위해 격자형 절점군을 사용하므로 적분칸을 사용하여 적분하는 수치해법시 문제가 발생한다. 각 적분칸에 연결되는 절점의 수가 균열선단에 위치한 적분칸에서 과다하게 되고 격자형 절점군의 추가로 초기절점과 추가절점의 번호매김의 상태가 좋지 못한 경우에는 우리가 일반적으로 사용하는 역행렬을 이용한 해법의 과정에서 띠폭(band width)이 커지는 문제 등으로 해의 정확도가 떨어지는 문제가 발생한다.

이를 해결하기 위하여 본 연구에서는 계의 방정식을 풀기 위한 방법으로 반복에 의해 해를 구하는 Gauss-Seidel 법을 이용하였다. 이 방법은 균열진전의 각 단계의 계의 방정식이 초기절점과 추가절점이 어지럽게 섞여도 안정된 해를 얻을 수 있는 장점이 있으며, 전단계에서 얻은 물리량 즉 변위를 다음단계의 균열진전의 해석에서 계의 방정식을 풀기 위한 Gauss-Seidel 법의 초기값으로 사용하여 수렴을 위한 반복계산의 수를 줄일 수 있는 장점이 있다.

4. 수치예제 및 검토

본 수치예제에서는 균열선단에 격자형 절점군을 각 균열단계에서 반복적으로 배치하는 해석기법을 이용하여 균열진전거동의 문제를 해석하였으며 해석결과를 기존의 유한요소법 및 실험에 의한 결과와 비교하여 본 방법의 유용성과 우수성을 보이고자 하였다.

4.1 굽힘에 의한 균열진전문제

Fig. 3 과 같이 두 점에서 지지되고 한 점에서 하중이 작용하는 TPB(three point bend beams)문제를 해석하였다. Fig. 3 에서 사용한 각각의 값은 $a=30\text{ mm}$, $b=15\text{mm}$ 이다.

무요소를 이용한 해석결과를 실험결과 및 유한요소법을 이용한 수치결과⁽¹³⁾와 비교하였다.

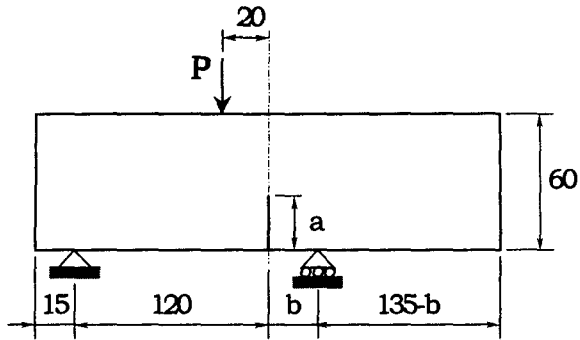


Fig. 3 Geometry, dimensions and load of TPB(three point bend beams) specimen.

무요소법을 이용한 해석결과가 실험결과의 상한치와 하한치의 중간영역에 위치하며 유한요소법을 이용한 결과와 일치함을 확인할 수 있었다. 이로써 반복적 격자해법을 이용한 해석의 정확도를 입증하며 편리함을 확인하였다.

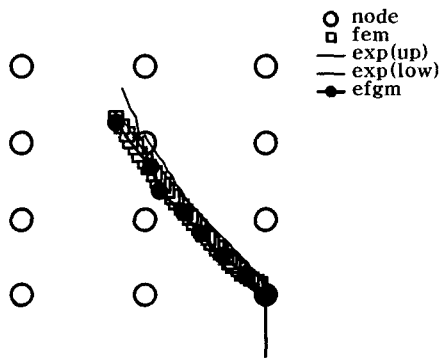


Fig. 4 Crack paths obtained from experimental and numerical tests.

4.2 DCB의 균열진전문제

Fig. 5 와 같은 DCB(double cantilever beam)문제의 균열진전거동을 해석하였다. Fig. 5 에서 사용한 각각의 값은 $L=300$ mm, $H=100$ mm 이며 초기균열의 길이 $a=138$ mm 이다.

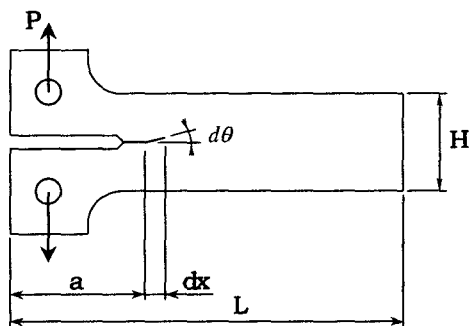


Fig. 5 Geometry of double cantilever beam(DCB) specimen.

해석을 위해 균열진전의 증분량 Δa_i 는 각각 8 mm 및 5 mm 를 사용하여 해석을 하였다. Fig. 6 과 Fig. 7 은 각각의 증분량에 대하여 균열진전거동의 전체 경로를 보여주고 있으며, Fig. 8 은 증분량이 5 mm 일때 반복적으로 격자형 절점군을 배치하여 해석하는 예를 보여주고 있다.

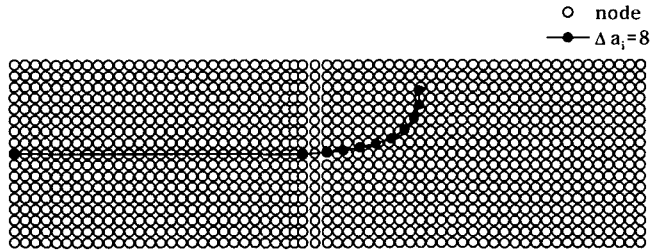


Fig. 6 Crack growth path in double cantilever beam specimen using crack growth size $\Delta a_i = 8$

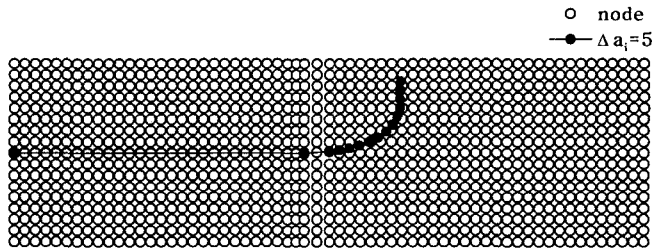


Fig. 7 Crack growth path in double cantilever beam specimen using crack growth size $\Delta a_i = 5$

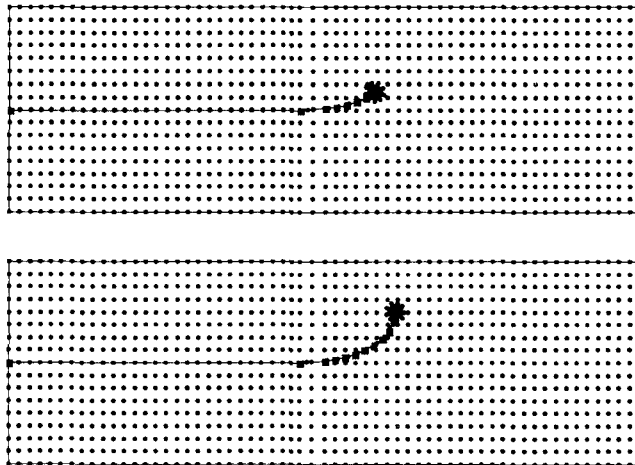


Fig. 8 Two steps of crack growth in double cantilever beam specimen using crack growth size $\Delta a_i = 5$

해석결과로부터 각 균열진전단계에서 격자형 절점군을 반복적으로 배치하여 해석하는 본 연구의 해

석방법의 해의 정확도가 우수하여 균열의 진전거동을 잘 모사하고 있음⁽¹⁴⁾을 알 수 있다.

5. 결 론

균열진전거동의 정확한 해석을 위하여 각 균열진전단계에서 균열선단에 원형셀의 격자형 절점군을 배치하는 적응적 해석기법을 사용하여 균열진전거동을 해석하고 다음의 결론을 얻었다.

(1) 격자형 절점군을 배치하는 적응적해석기법을 이용하여 균열선단의 응력확대계수를 정확하게 얻을 수 있다.

(2) 해석결과로 얻은 응력확대계수를 이용한 균열진전거동의 해석이 정확함을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Comput. Mech.*, Vol. 10, 1992, pp. 307-318.
2. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-Free Galerkin Methods", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 37, 1994, pp. 229-256.
3. Monaghan, J. J. and Gingold, R. A., "Shock Simulation by the Particle Method SPH", *Journal of Computational Physics*, Vol. 52, 1983, pp. 374-389.
4. Liu, W. K., Jun, S. K., Li, S., Adee, J. and Belytschko, T., "Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, 1995, pp. 1655-1679.
5. Melenk, J. M. and Babuka, I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, Issues 1-4, 1996, pp. 289-314.
6. Duarte, C. A. and Oden, J. T., "An h-p Adaptive Method using Clouds", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, Issues 1-4, 1996, pp. 237-262.
7. Erdogan, F. and Sih, G. C., "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear", *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, 1963, pp. 519-527.
8. Nuismer, R. J., "An Energy Release Rate Criterion for Mixed Mode Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol. 11, 1975, pp. 245-250.
9. Sih, G. C., "Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems", *International Journal of Fracture*, Vol. 10, 1974, pp. 305-321.
10. Rice, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, 1968, pp. 379-386.
11. Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T., "A Mixed Mode Crack Analysis of Isotropic Solids using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, 1980, pp. 335-341.
12. Shih, C. F. and Asaro, R. J., "Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part 1-Small Scale Yielding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, 1988, pp. 299-316.
13. Galvez, J., Elices, M., Guinea, G. V., and Planas, J., "Crack Trajectories under Mixed Mode and Non-Proportional Loading", *International Journal of Fracture*, Vol. 81, 1996, pp. 171-193.
14. Sumi, Y. S., Nemat-Nasser, and Keer, L. M., "On the Path Stability in a Finite Body", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 22, 1985, pp. 759-771.