한국전산구조공학회
2002년도 가을 학술발표회 논문집

고속 최소자승 점별계산법을 이용한 멀티 스케일 문제의 해석
FCM for the Multi-Scale Problems

김도완 1)　　　김용식 2)
Kim, Do Wan　　Kim, Yongsik

ABSTRACT

We propose a new meshfree method to be called the fast moving least square reproducing kernel collocation method(FCM). This methodology is composed of the fast moving least square reproducing kernel(FMLSRK) approximation and the point collocation scheme. Using point collocation makes the meshfree method really come true. In this paper, FCM is shown to be a good method at least to calculate the numerical solutions governed by second order elliptic partial differential equations with geometric singularity or geometric multi-scales. To treat such problems, we use the concept of variable dilation parameter.

1. 서 론

무요소법(meshfree method)과 점별계산법(point collocation method)의 결합은 흥미로운 연구 대상이 되어왔다.[(1),(2),(3),(4)] 실제로 점별계산법은 그 자체로서 이미 오래된 수치 방법론중의 하나였다. 일차원 문제의 경우에는 매우 다양한 형태의 점별계산법이 보고되어 왔고 현재도 활발히 연구되고있다. 그러나 고차원 즉 2차원 이상의 문제에 관한 점별계산법의 연구는 매우 드물 뿐 아니라 직사각형영역이나 원형영역과 같은 특수한 형태의 영역에 대한 문제에서 만 다루어졌다. 그 이유는 해를 근사하는 데 필요한 고계미분이 가능한 근간함수들(basis functions)의 생성이 2차원이상의 일반적인 영역상에서는 매우 어려운 작업이기 때문이다. 따라서, 우리가 주로 관심이 있는 2차원 내지는 3차원에서의 일반적인 영역에 적용이 가능한 점별계산법의 창안이 필요하게 되었고 무요소법중의 하나인 MLSRK의 진보된 형태인 FMLSRK[(1)]를 이용한 점별계산법이 최근에 처음으로 제시되었다. FMLSRK 방법을 이용하면 무요소법의 근간함수인 형상함수들(shape functions)의 요구되는 만큼의 근사고계미분들이 형상함수 자체와 동시에 계산된다. 기존의 MLSRK를 이용할 경우 형상함수의 미분을 구하기 위하여 형상함수를 직접미분하였다. 여기에 많은 비용(cost)가 든다는 것이 잘 알려져있다. 따라서 FMLSRK 방법이 효율적이라는 것을 알 수 있고 우리의 근사고계미분이 다항함수의 고계미분들을 재생성한다는 것을

1) 선문대학교 자연과학부 수학과 교수
2) 연세대학교 수학과 연구교수

증명함으로써 모든 수치미분을 우리의 근사미분으로 대체가능함을 보였다. 따라서 FMLSRK는 우리의 점별계산법의 필수요소중의 하나로 사용된다.

한편, 이 논문에서의 우리의 관심은 영역상의 기하학적인 특이점(singularity)이 있거나, 복합적인 크기차이(multi-scale)가 있는 경우의 물리적인 문제의 점별계산해법에 있다. 이런 종류의 문제의 수치계산을 위해서는 계산영역상의 노드분포가 비정칙적(irregular)이어야한다. 영역상의 비정칙 노드의 분포에 따라 변화하는 신축매개함수(dilation function)의 개념이 필요하다.[2] 상수 신축매개변수(dilation parameter)를 사용할 경우 강성행렬(stiffness matrix)의 타원성(ellipticity)이 약화된다. 따라서 비정칙 노드분포하에서 편미분방정식의 수치해를 계산하기 위해서는 신축매개함수의 개념이 필수불가결하다. FMLSRK를 이용한 점별계산법에 신축매개함수의 개념을 추가한 방법을 우리는 FCM이라고 명명했다.[2]

수치계산결과로서 FCM을 이용하여 2계 타원형 편미준방정식인 Poisson 방정식이 기하적인 특이점을 갖는 영역상에 정의될 때와 복합적인 크기차이를 갖는 영역상에 정의된 경우의 수치해를 계산하였다.

2. 고속최소자승 점별계산법(FCM)

FMLSRK를 써서 주어진 노드(node) 분포상에서 함수의 근사 및 미분의 근사식을 정의하면 다음과 같다.[1]

(식 2.1.1)
$$D^{\alpha}u(x)\approx U^{[\alpha]}(x)\equiv\sum_{x_i\in\Lambda}u(x_i)\phi_i^{[\alpha]}(x)$$

여기서 $u(x)$는 계산영역 $\Omega\subset R^n$ 상에 정의된 함수이고 Λ는 Ω 상에 분포된 노드들의 집합이며 $\phi_i^{[\alpha]}(x)$들은 다음 방정식에 의하여 결정되는 $\alpha-th$ 형상함수들이다.

$$M(x)\Psi_i(x)=P_m\left(\frac{x_i-x}{\rho}\right)\phi\left(\frac{x_i-x}{\rho}\right),\ x\in R^n,\ x_i\in\Lambda$$

$$P_m(y)\equiv(y^{\beta_1},y^{\beta_2},\cdots,y^{\beta_L})^T,\ y\in R^n,\ L=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

$$\Psi_i(x,\rho)\equiv\left(\frac{\rho^{|\beta_1|}}{\beta_1!}\phi_i^{[\beta_1]}(x),\frac{\rho^{|\beta_2|}}{\beta_2!}\phi_i^{[\beta_2]}(x),\cdots,\frac{\rho^{|\beta_L|}}{\beta_L!}\phi_i^{[\beta_L]}(x)\right)^T$$

$$M(x)\equiv\sum_{x_k\in\Lambda}P_m^T\left(\frac{x_k-x}{\rho}\right)P_m\left(\frac{x_k-x}{\rho}\right)\phi\left(\frac{x_k-x}{\rho}\right).$$

$M(x)$를 모멘트행렬(moment matrix)이라고 하고 $\phi(y)$를 윈도우함수(window function), ρ를 신축매개변수(dilation parameter)라고 한다. 또한, β_k 들은 각각 음이 아닌 정수의 n 차원 벡터들로서 멀티인덱스라고 부른다. 우리가 제시한 윈도우함수는 다음과 같다.

$$\phi(y)=(1-|y|)^jH(1-|y|),\ j\geq 1$$

여기서 일차원함수 $H(t)$는 계단함수이다. 즉, $t>0$ 이면 1 값을 그 외에는 0 값을 갖는 함수이다. 연속인 윈도우 함수에 대해서 항상 형상함수들 및 근사미분들이 잘 정의되며 일반화된 m차 다항식 재생성특성(generalized m-th order consistency property)이 성립함을 증명할 수 있다.[1] 주목할 점은 FMLSRK 방법에서는 윈도우 함수가 미분가능하지 않아도 된다는 점이다.

한편 수식 (식 2.1.1)을 이용하면 각 노드점에서 유한차분법(FDM)처럼 자유로운 이산화가 가능하다. 이 이산화 방법을 우리는 점별계산법(point collocation method)이라고 한다. 무요소법에서 여러 연구자들에 의해 점별계산법이 시도된 적이 있었다. 이들 모두가 형상함수 자체를 직접 고차미분을 행해야 했기 때문에 많은 비용이 들고 그러기 위해서 윈도우 함수의 미분가능성이 보장되어야만 고차의 미분을 계산할 수 있는 제약이 따랐다. 우리는 FMLSRK를 이용함으로써 이러한 장애점들을 모두 극복한 효율적인 점별계산법을 고안했다.(1) 한단계 더 나아가 변화하는 신축함수의 개념을 추가함으로서 노드의 집중을 가능케 했다.(2) 물론 이 경우에도 일반화된 m차 다항식재생성특성을 유지한다. FMLSRK와 신축함수를 이용한 일반화된 m차 다항식 재생성특성을 유지하는 점별계산법을 m차 FCM이라고 명명했다.

3. 2차 FCM을 이용한 수치계산결과

두가지 형태의 물리적인 문제의 수치계산을 했다. 하나는 관 내부에 두께가 없는 벽이 관의 반을 가로 막고 있을 때 2차원 비압축(incompressible),비점성(inviscid) 그리고 비회전(iirotational)유체의 흐름을 고찰하는 문제이고, 다른 하나는 전자총(electron gun)으로 부터의 방출된 전자의 궤도를 계산하기 위한 전기적 필드(electric field)의 계산문제이다. 전자의 경우가 기하학적인 특이점이 있는 영역상에서의 계산문제이고 후자는 이중의 크기차이가 있는 영역상에서의 계산문제로 둘 다 노드의 집중이 필요한 상황이다.

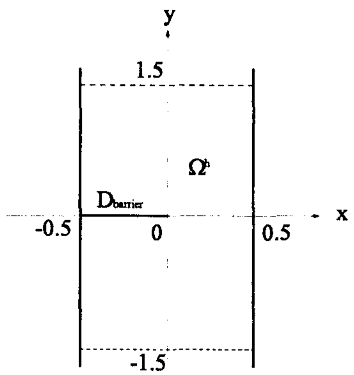


그림 3.1 기하학적인 특이점이 있는 문제

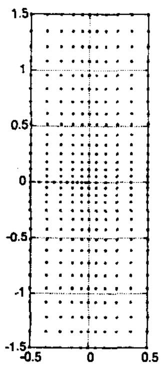


그림 3.2 노드분포 (a)

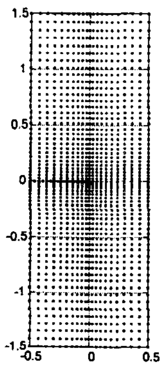


그림 3.3 노드분포 (b)

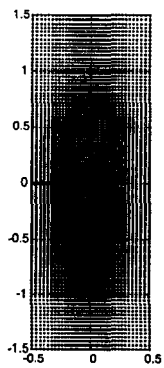
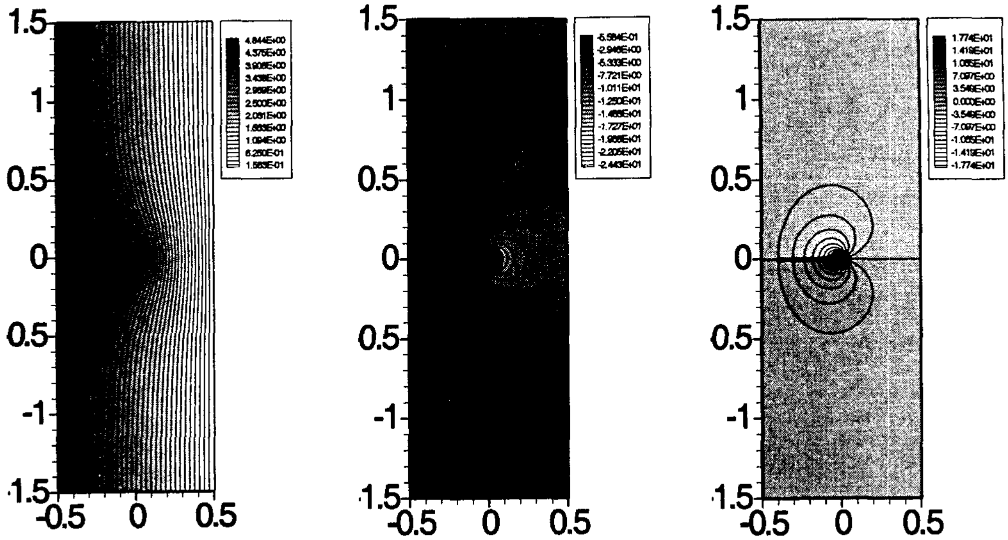


그림 3.4 노드분포 (c)

그림 3.1 에 첫 번째 예제의 계산영역의 구조가 나타나있다. 그리고 그림 3.2, 3.3, 그리고 3.4에 계산을 위한 집중된 노드의 분포들이 나타나있다. 아래의 그림은 가장 많은 노드에서의 계산결과이다. 순서대로 각각 유체의 유동함수(stream function)의 레벨곡선들, 유동함수의 x 미분 그리고 유동함수의 y 미분의



등고선들을 나타낸다. 한편, FCM의 수렴성은 그림 3.5 에 나타내었다.

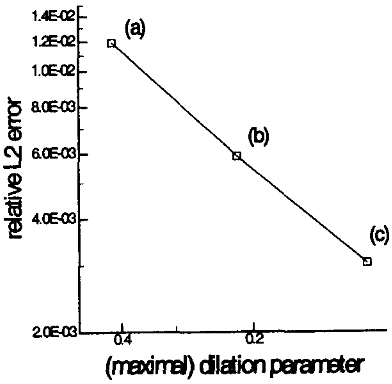


그림 3.5 2차 FCM의 수렴성

두 번째 예제의 구조는 그림 3.6 에 잘 설명되어 있고 보는 바와 같이 영역 좌하귀(전자총) 쪽에 크기가 전체영역크기의 1/1000 정도의 해상도 내에 해의 행동이 급격한 변화를 일으킨다. 수치계산해를 그림 3.7.1, 3.7.2 에서 보여주고 있다. 전체 수치계산에서 지배방정식이 Poisson이므로 2차의 FCM을 사용했다.

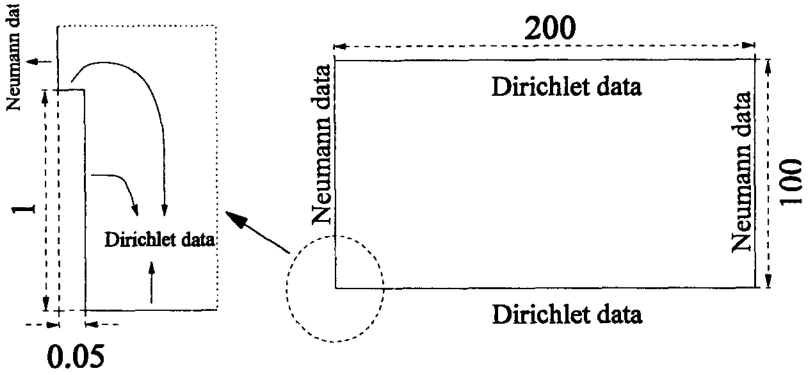


그림 3.6 이중의 크기차이를 갖는 영역

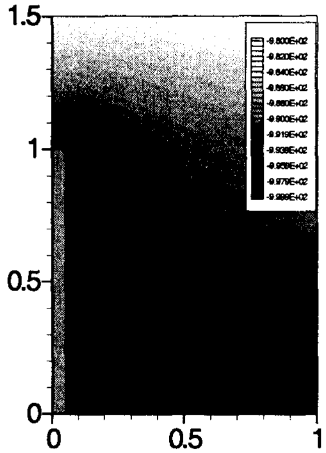


그림 3.7.2 전자층 영역

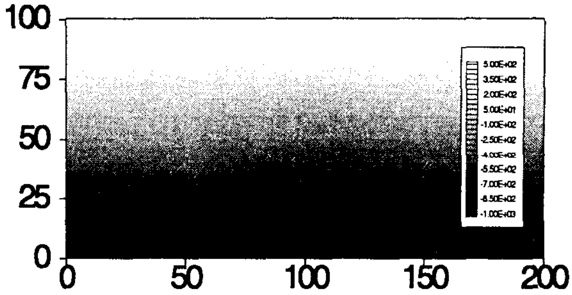


그림 3.7.1 전영역의 해

참고 문헌

1. D.W. Kim and Y.S. Kim, "Point Collocation Methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation", Int. J. Numer. Mrthods Engng., to appear.

2. D.W. Kim and Y.S. Kim,"Point Collocation Method with Meshfree Approximation using Dilation Function",submitted

3. N.R. Aluru, "A Point Collocation Method Based on Reproducing Kernel Approximations", Int. J. Numer. Methods Engng., Vol. 47, 2000, pp. 1083-1121

4. Y. Luo and U. Haussler-Combe,"A Generalized Finite-Difference Method Based on Minimizing Global Residual",Comput. Methods Appl. Mech. Engng., Vol. 191, 2002, pp. 1421-1438