

## Zetlin형 케이블 돔 구조물의 정적 불안정 거동에 관한 연구

### A Study on the Static Instability Behaviour of the Zetlin Type Cable Dome Structures

김형석\*                      김승덕\*\*                      강문명\*\*\*  
Kim, Hyung-Seok      Kim, Seung-Deog      Kang, Moon-Myung

---

#### ABSTRACT

Membrane, cable structure and membrane-cable structural system are more lighter than another common structural system, and these are able to be effectively build up spatial structures using axial stiffness. However when the load reach at critical load level, it might be happened snap-through or bifurcation according to the structure's shape, and these collapse mechanism should be very important in the design of structures. So, in this paper we study static instability of Zetlin-type cable dome, one of the hybrid cable dome. Moreover, as the unstable behavior of shell structures are very sensitive to the initial condition, we seek to find the effect of initial condition.

---

#### 1. 서론

인장재 케이블과 다른 구조 요소들을 조합하고 장력을 도입한 hybrid 구조 시스템은 최초 R. B. Fuller에 의해, 압축재의 수를 줄이고 인장재를 케이블로 사용하여 구조 시스템의 경량화, 합리화를 위해서 시도되었던 구조로 A. Motorm P. G. Emmerich, O. Vilnay, F. Otto등에 의해 지속적으로 연구가 이루어졌다.

막 구조, 케이블 구조 또는 복합 구조체로서의 막-케이블 구조물은 기존의 일반 구조재보다 가볍고 축 강성은 강하나 휨 강성은 매우 작은 막 및 케이블을 사용하여 대공간 구조물을 보다 효과적으로 구축할 수 있는 구조 시스템으로 국내에서는 88년 서울올림픽, 93년 대전 EXPO 및 2002년 한·일 월드컵을 계기로 많은 관심을 끌고 있다. 하지만, 막-케이블 구조물은 초기 강성이 매우 약하며, 따라서 초기 강성을 확보하기 위해서는 초기용력의 도입이 필수적이다. 즉, 연성구조 시스템인 막 구조물 및 케이블 구조물은 초기 강성을 갖기 전에는 불안정 현상을 나타내지만 초기강성의 도입과 함께 안정상태가 된다.

그러나, 이러한 구조물은 하중레벨이 어느 임계값에 도달하면 구조물의 형상에 따라 휨 좌굴(snap-through) 또는 분기좌굴(bifurcation)에 의한 불안정 현상이 일어나며, 이로 인한 파괴 메커니즘의 파악은 구조설계에서 매우 중요하다.

따라서, 본 연구에서는 hybrid 케이블 돔 구조시스템 중의 하나인 Zetlin형 케이블 돔을 대상으로 하여 정적 불안정 현상을 연구한다. 케이블 돔의 구조거동 특성은 초기장력 및 외력에 따라 비선형성이 강하게 나타난다. 따라서, 먼저 초기장력 도입에 의해 형상을 결정하고, 외력에 의한 불안정 현상을 파악한다. 또한 셀형 구조물의 불안정 거동이 초기조건에 매우 민감하게 반응하므로 초기형상불완전을 도입하여 초기조건에 의한 영향도 알아본다.

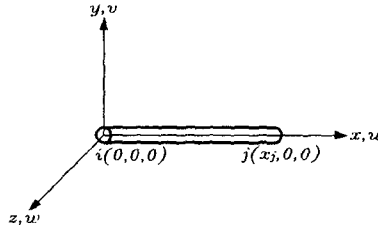
---

\* 경북대학교 건축공학과 박사과정

\*\* 정회원 · 세명대학교 건축공학과 부교수

\*\*\* 정회원 · 경북대학교 건축공학과 교수

## 2. 비선형 강성방정식



$$\begin{cases} x, y, z : \text{요소좌표계} \\ u, v, w : \text{요소내 변위} \end{cases}$$

그림 1 케이블 요소의 요소 좌표계

국부 좌표계에서 케이블 요소의 요소 좌표계를 그림 1에서와 같이 정의한다. 요소에서 한 요소가 갖는 절점을 2개로 두고 요소내 변위를 식(1)과 같이 Lagrangian 보간함수  $N_i, N_j$ 를 이용하여  $x$ 에 관한 1차식으로 가정한다.

$$u(x) = N_i d_{xi} + N_j d_{xj} \quad v(x) = N_i d_{yi} + N_j d_{yj} \quad w(x) = N_i d_{zi} + N_j d_{zj} \quad (1)$$

요소의 변형도-변위 관계식을 기하학적 비선형을 나타내는 2차항까지를 포함한 식(2)로 채택할 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (2)$$

중분구간에서 응력도-변형도 관계식을 식(3)과 같이 채택한다.

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (3)$$

가상일의 원리를 이용하여 그림 1과 같은 비선형 케이블 요소의 평형방정식을 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_V \sigma_x \delta \epsilon_x dV = f^T \delta d \quad (4)$$

현재의 상태를 초기상태로 가정하고, 현상태에서의 증분에 관한 가상일의 원리를 적용하면 식(5)와 같다.

$$\int_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \epsilon_x] dV = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (5)$$

식(5)에서 적분영역  $dV$ 를 일정단면적  $A$ 와 일정길이  $l$ 로 치환하여 정리하면 식(6)과 같다.

$$Al[(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)(A_1 + d^T B^T B)] = (f^{(0)} + f)^T \quad (6)$$

여기서,  $A$ 는 요소의 단면적이고  $l$ 은 요소의 길이이다.

식(3)을 식(6)에 대입하고,  $d$ 에 관한 2차항 이상을 소거하여 정리하면 식(7)과 같다.

$$f^{(0)} + f = Al(A_1^T \sigma_x^{(0)}) + Al(\sigma_x^{(0)} B^T B) d + AlE(A_1^T A_1) d + \text{고차항} \quad (7)$$

식(7)에서  $\mathbf{d}$ 에 관한 고차항의 소거로 인하여 생기는 불평형력(residual force)은 식(8)과 같이 정의한다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{l} \mathbf{A}_1^T \sigma_x^{(0)} - \mathbf{f}^{(0)} \quad (8)$$

식(8)을 식(7)에 대입하면, 식(9)와 같다.

$$\mathbf{f} - \mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{l} \mathbf{E} (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1) \mathbf{d} + \mathbf{A} \mathbf{l} (\sigma_x^{(0)} \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d} \quad (9)$$

여기서,

$$\mathbf{k}_E = \mathbf{A} \mathbf{l} \mathbf{E} (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1) : \text{요소의 탄성 강성행렬}$$

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{A} \mathbf{l} (\sigma_x^{(0)} \mathbf{B}^T \mathbf{B}) : \text{요소의 기하 강성행렬}$$

### 3. 해석모델

본 연구에서는 그림 2와 같은 간단한 Zetlin형 케이블 돔을 해석모델로 선택하여 케이블 돔 구조물의 정적 불안정 현상을 연구하였다. 그림 2는 해석모델의 절점번호와 요소번호를 나타내고, 표 1은 절점좌표이다. 해석모델의 형상이 축대칭이므로 한 개의 strip만을 나타내었다.

그리고, 각 부재의 물성치는 케이블과 mast 모두  $E = 1.6 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$  이고, 단면적은 표 2와 같다. 경계조건은 외부의 절점들인 7, 12, 17, 22, 27, 32등 6개의 절점은 고정이고, 나머지 절점들은 자유로 하였다.

표 1 절점좌표 (단위:cm)

절점좌표	1	2	3	4	5	6	7
X 좌표	0.0	0.0	20.0	20.0	40.0	40.0	60.0
Y 좌표	11.0	-11.0	9.5	-9.5	6.0	-6.0	0.0

표 2 부재의 단면적 (단위:cm<sup>2</sup>)

부재번호	1	2	3	4	5	6	7
단면적	1.0	0.01	0.01	0.01	1	0.02	0.02
부재번호	8	9	10	11	12	13	
단면적	0.02	0.01	1.0	0.04	0.04	0.04	

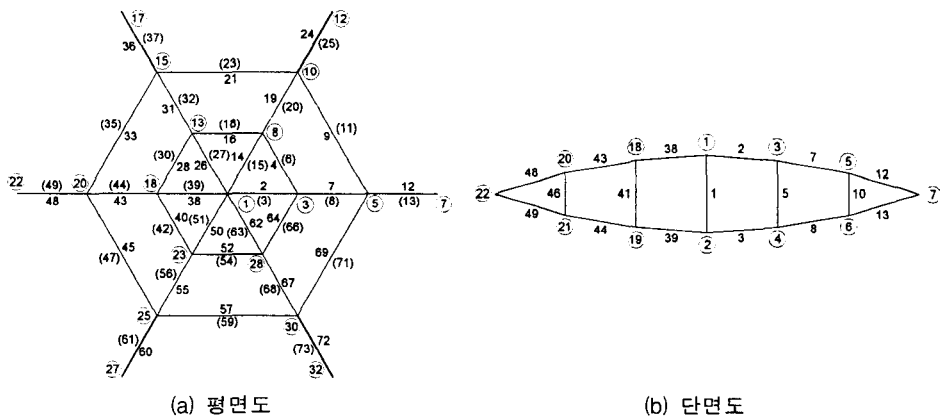


그림 2 해석모델

하중조건은 그림 3과 같이 상부절점 전체에 -Z방향으로 동일한 하중이 작용하는 전체 축대칭 하중모드로 하였다. 여기서, ●는 하중이 작용하는 절점을, ○는 하중이 작용되지 않는 절점을 나타낸다.

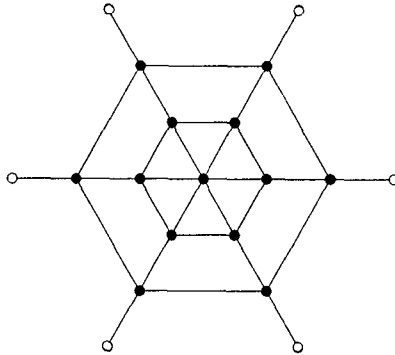


그림 3 하중모드

해석모델인 Zetlin형 케이블 돔과 같은 연성구조물은 초기 불안정 구조물이며, 초기장력의 도입과 함께 안정상태가 된다. 초기장력은 형상해석을 통해서 얻어지는 평형상태에서의 값으로 그림 4와 같다.

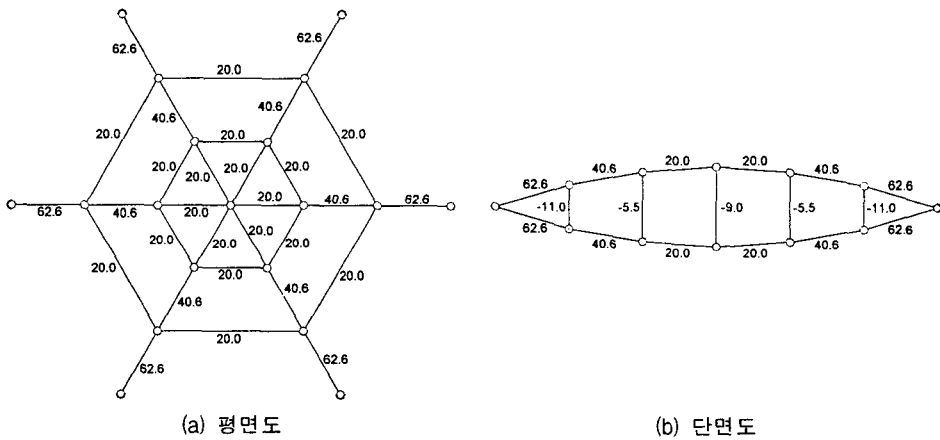


그림 4 초기장력

해석방법으로는 2장에서 얻은 접선강성방정식을 이용하여 step by step으로 해석을 수행하여 임계하중을 구한다. 본 논문에서는 1번 절점을 -Z방향으로 0.01cm씩 변위를 증분시켜 각 step에서의 하중계수를 구하는 변위증분법을 사용하였다.

정적 불안정해석에서 분기좌굴을 파악하기 위해서는 초기형상불완전을 도입하여야 한다. 초기형상불완전은 접선강성행렬의 초기증분에 대한 고유치 해석을 수행하여 얻어지는 1차 고유벡터를 선택하여 이를 초기형상불완전 모드로 하였다. 이를 형상화하여 나타내면 그림 5와 같다.

본 논문에서는 해석모델의 스패를 기준으로 하여, 스패의 0.01% 및 0.1%를 초기형상불완전량으로 도입하였으며, 이 결과들을 완전형상 모델의 결과와 비교하였다.

#### 4. 해석결과

정적 임계하중을 구하기 위해 접선 강성매트릭스의 행렬식을 각 증분구간에서 구하였다. 완전형상인 경우

와 0.01%, 0.1%의 초기형상불완전을 도입하였을 경우로 나누어 행렬식을 구하면 그림 6과 같다. Zetlin 모델에서 완전형상일 경우 행렬식 값이 0을 지나는 점은 절점당 9.77 kgf (총하중 127.01 kgf)이고 Geiger 모델은 절점당 11.9 kgf (총하중 154.7 kgf)이며 이 값이 정적 분기좌굴하중이다.

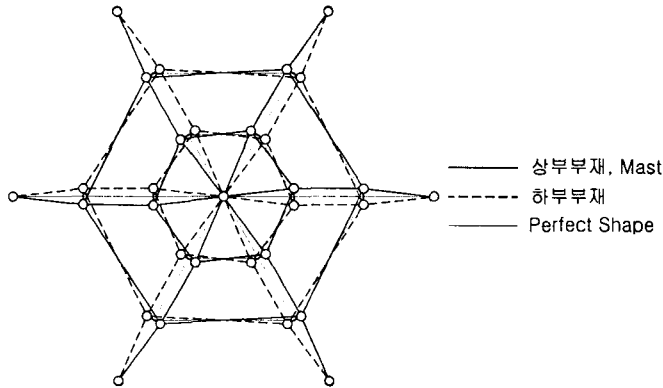
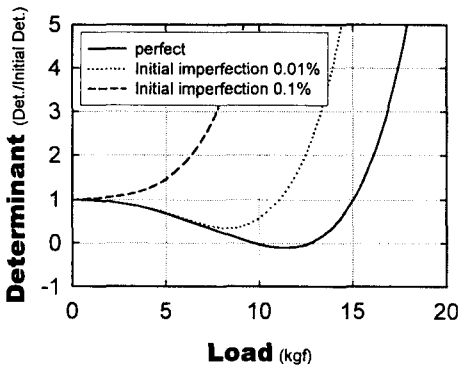


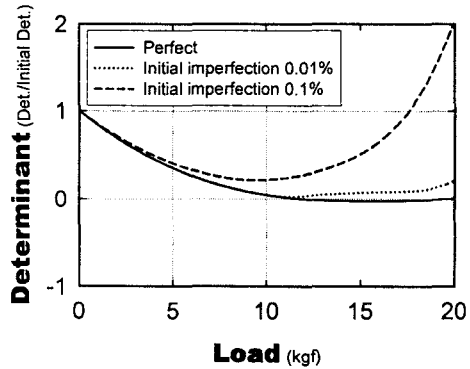
그림 5 초기형상 불완전 모드

초기형상불완전을 도입한 경우는 행렬식 값이 0을 향해 감소하다가 0 근방에서 다시 증가하는 것을 알 수 있고, 초기형상불완전이 클수록 이러한 현상은 뚜렷하게 나타나고 있다. 이는 완전형상 모델의 경우 평형 상태에서 불안정 점이 나타나더라도 피할 수 없으므로 0점을 통과하게 되고, 초기형상불완전을 도입하면 불안정 점 부근에서 하중모드와 직교하는 새로운 직교좌굴모드의 출현으로 변형모드가 변하게 되므로 점차 강성이 안정화해 갈 수 있기 때문이다. 또 초기형상불완전량이 클수록 강성의 안정화가 빠르게 진행됨을 알 수 있고, Zetlin 모델에서 이러한 현상이 더 뚜렷하게 나타난다.

따라서 Zetlin형 케이블 돔의 불안정 현상은 평형체도의 분기현상에 의해 일어남을 알 수 있다.



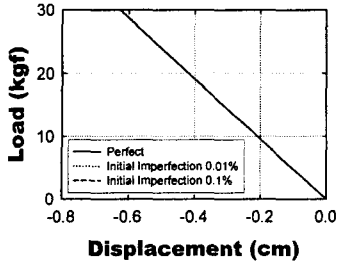
(a) Zetlin 모델



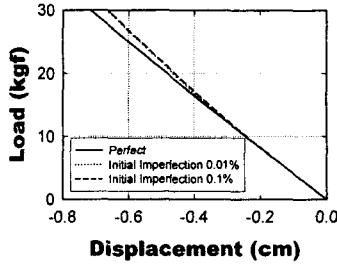
(b) Geiger 모델

그림 6 하중증가에 따른 감성변화

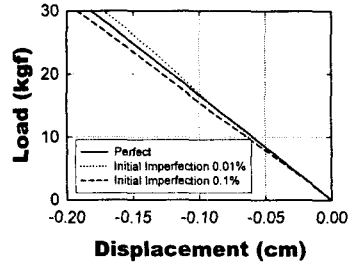
다음은 해석모델의 정적 해석결과를 고찰한다. 돔 상부절점인 #1, #3, #5의 Z방향 수직변위를 하중변화에 따라 나타내면 그림 7과 같다. 하중의 증가에 따라 수직변위도 점차 증가하며, 초기형상불완전을 도입한 경우 임계하중점 부근에서 평형체도가 바뀌는 것을 알 수 있다.



(a) Node-1, Z



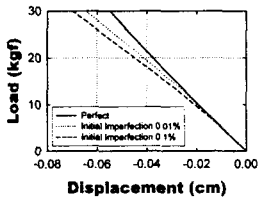
(b) Node-3, Z



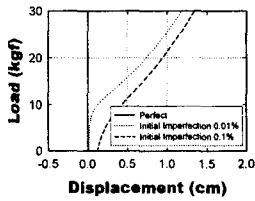
(c) Node-5, Z

그림 7 수직방향 변위-하중 곡선

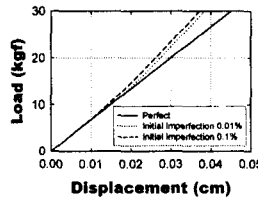
절점 #3, #4, #5, #6의 X 및 Y방향 수평변위를 그림 8에 나타낸다.



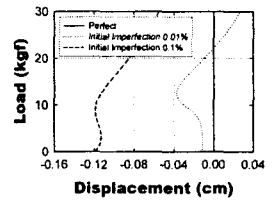
(a) Node-3, X



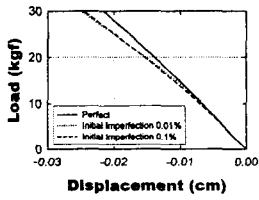
(b) Node-3, Y



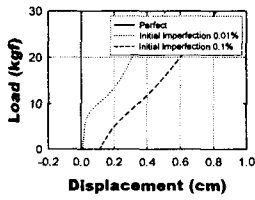
(c) Node-4, X



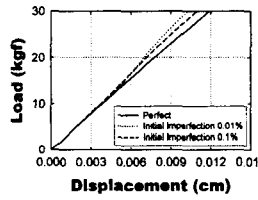
(d) Node-4, Y



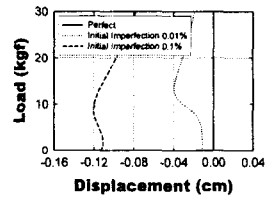
(e) Node-5, X



(f) Node-5, Y



(g) Node-6, X



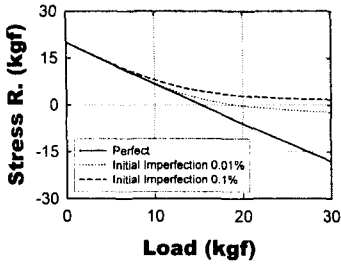
(h) Node-6, Y

그림 8 수평방향 변위-하중 곡선

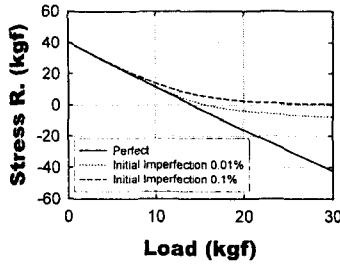
절점 #3과 #4의 X방향 변위는 서로 반대방향으로 진행하고 있고, Y방향 변위는 반대방향으로 진행하다가 절점 #4의 변위가 임계점 부근에서 진행방향이 바뀌어 서로 같은 방향으로 진행한다. 즉, mast #5의 상부는 돔의 중심축 방향으로 기울고, 하부는 바깥방향으로 기울고 있다. 절점 #5와 #6의 X방향 변위도 서로 반대방향으로 진행하고 있으며, Y방향 변위는 반대방향으로 진행하다가 절점 #4의 경우와 마찬가지로 절점 #6의 변위가 임계점 부근에서 진행방향이 바뀌어 서로 같은 방향으로 진행한다. 즉 mast #10의 상부 및 하부는 초기에는 hoop 방향으로 서로 반대로 회전하다가 임계점 부근에서 회전방향이 바뀌어 서로 동일한 방향으로 회전하고 있으며, 이로 인해 면내 비틀림이 발생함을 알 수 있고, 변위의 진행상태를 고찰해 볼 때 내부링이 먼저 비틀리며 좌굴을 시작한 후 외부링이 비틀어지는 것을 알 수 있다.

다음은 하중변화에 따른 케이블의 장력변화를 알아본다.

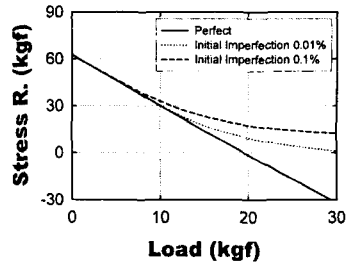
상현 케이블인 #2, #7, #12 요소의 장력변화를 그림 9에, 하현 케이블인 #3, #8, #13 요소의 장력변화를 그림 10에 나타내었다. 하중변화에 따라서 상현 케이블의 장력은 감소하고 있으나, 하현 케이블의 장력은 증가하고 있음을 알 수 있다.



(a) Element 2

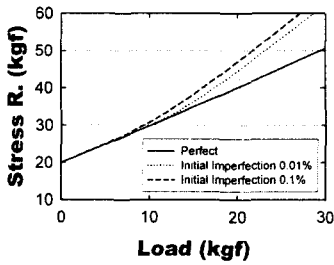


(b) Element 7

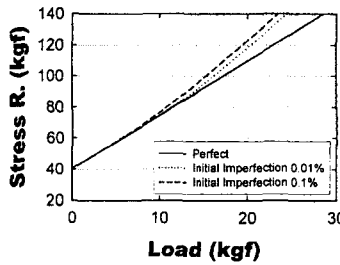


(c) Element 12

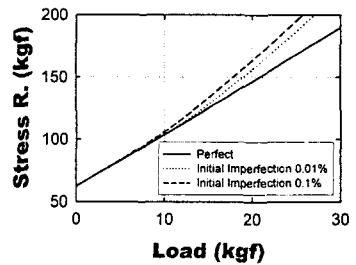
그림 9 상현 케이블의 장력 변화



(a) Element 3



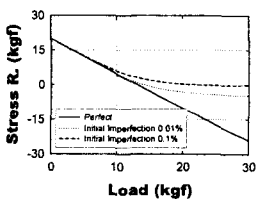
(b) Element 8



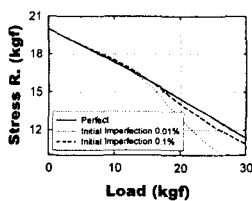
(c) Element 13

그림 10 하현 케이블의 장력 변화

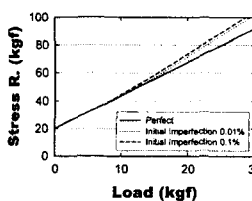
하중변화에 따른 상부 링 케이블인 #4, #9 요소의 장력변화와 하부 링 케이블인 #6, #11 요소의 장력변화를 그림 11에 나타내었다. 하중변화에 따라서 상부 링 케이블의 장력은 감소하고 하부 링 케이블의 장력은 증가하고 있다. 이는 하중변화에 따라서 상부 링은 돛의 중심축 방향으로 축소하고 하부 링은 늘어나는 현상에 의한 것이며, 각 절점의 X방향 변위를 고찰하여도 이러한 현상을 알 수 있다.



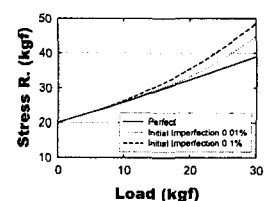
(a) Element 4



(b) Element 9



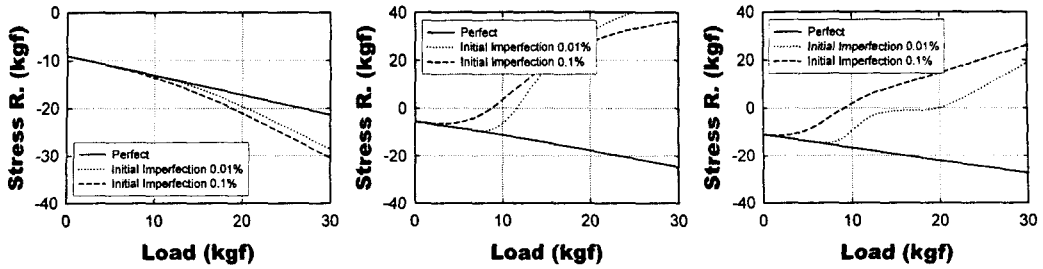
(c) Element 6



(d) Element 11

그림 11 링 케이블의 장력 변화

끝으로 mast의 장력변화를 그림 12에 나타내었다. 완전형상 모델의 경우 mast의 압축력이 증가하는 현상이 발생하였으며, 초기형상불완전을 도입한 경우 mast #1의 압축력은 증가하나 mast #5, #10의 압축력은 감소하는 현상이 발생함을 알 수 있다. 축대칭 중심축인 mast #1은 면내 비틀림에 의한 영향을 받지 않으므로 초기형상불완전 도입 유·무에 관계없이 압축력이 증가하나 mast #5, mast #10의 경우 초기형상불완전의 도입으로 면내 비틀림 현상이 발생하게 되며 이로 인해 압축력이 감소하는 현상이 발생하였다.



(a) Element 1

(b) Element 5

(c) Element 10

그림 12 Mast의 내력 변화

## 5. 결론

본 연구에서는 Zetlin형 케이블 돔 구조시스템을 대상으로 하여 초기응력 도입에 의해 형상을 결정하고, 외력에 의한 정적 불안정 현상을 파악하였다. 그리고, 초기형상불완전을 도입하여 초기조건에 의한 영향도 알아보았다. 본 연구에서 얻은 결과는 다음과 같다.

1. 완전형상 모델에서는 불안정 점을 찾을 수 없지만, 초기형상불완전을 도입하면 임계하중점 부근에서 새로운 직교좌굴모드의 출현과 함께 변형모드가 변하게 되어 평형궤도가 바뀐다.
2. Zetlin형 케이블 돔 구조물은 면내 비틀림에 의해 불안정 현상이 발생하고, 이는 평형궤도의 분기를 나타내는 분기좌굴이다.
3. Geiger형 케이블 돔이 본 연구에서 사용한 Zetlin형 케이블 돔에 비해 임계하중이 18% 정도 더 높아, Geiger 시스템이 좀 더 안정적임을 알 수 있었다.

## 참고문헌

1. Pecknold, D. A., Ghaboussi, J. and Healey, T. J., "Snap-through and bifurcation in a simple structure," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 7, July, 1985, pp.909~922
2. See, T. and McConnel, R. E., "Large displacement elastic buckling of space structure," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 7, May, 1986, pp.1052~1069
3. Kani, I. M. and McConnel, R. E., "Collapse of shallow lattice domes," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, No. 8, 1987, pp.1806~1819
4. 林曉光, 複合케이블구조의構造安定解析, 修士學位論文, 東京大學, 1990
5. 金勝德, 偏平構造物の動的安定に関する研究, 博士學位論文, 東京大學, 1990
6. 김승덕, "기하학적 비선형을 고려한 얇은 타원포물곡면셸의 동적 불안정 현상," 대한건축학회 논문집, 제 10권 6호, 1994, pp.121~132
7. Kim, S. D., Kim, H. S., Sohn, S. D., Kang, M. M., Lee, S. G., Kwun, T. J., "Dynamic Instability of Hybrid Cable Dome Structures", IASS Symposium 2001, Nagoya, TP055
8. 김승덕, 손수덕, 김형석, 강문명, "Hybrid 구조물의 비선형 불안정 거동에 관한 연구(1)-초기형상 불완전에 의한 정적 면내비틀림 좌굴 특성-", 한국강구조학회 논문집, 제13권 제5호, 2001, pp.587~598
9. 김승덕, 김형석, 강문명, "Hybrid 구조물의 비선형 불안정 거동에 관한 연구(2)-STEP 하중에서의 동적 면내비틀림 좌굴 특성-", 한국강구조학회 논문집, 제 13권 제 5호, 2001, pp.599~608
10. Kim, H. S., Kim, S. D., Kang, M. M., Park, S. W. and Kwun, T. J., "Effects of the Bifurcation of Hybrid Cable Dome by Improving the Structural System", Proceedings of the International Symposium, Warsaw, Poland, 24-28 June, 2002, pp.855~860