

다실 박스거더의 뒤틀림에 저항하는 강성 산정

Evaluation of Stiffness Resisting Distortion of Multicell Box Girder

박남희*

최영준**

한금호***

강영종****

Park, Nam-Hoi Choi, Young-Joon Han, Keum-Ho Kang, Young-Jong

ABSTRACT

In a multicell box structure, distortional warping normal stress due to warping of cross section and transverse bending normal stress of walls due to distortion of cross section may consider as significant stresses unless distortion of box section is appropriately restricted. Nevertheless, during the past decades, no evaluation of distortional warping and transverse bending resistances for the multicell box section has been performed owing to geometric complexity and insufficient information with respect to the distortion of multicell box section. The objective of present study is to evaluate the distortional warping and transverse bending resistances for the distortion of multicell box section and to validate the resistances through box girder analyses using multicell box beam element developed and conventional shell element. This developed box beam element has nine degrees of freedom per node including the effect of distortion.

1. 서 론

박스 거더 교량은 현재까지 비틀림에 대한 우수한 강성발현 측면과 미적인 측면에서의 장점으로 인해 과거 수 십년 동안 많은 시공결과를 보여왔다. 그러나 국내외적으로 많은 다실 박스 구조물이 건설되어졌음에도 불구하고 현재까지 뒤틀림 현상에 대한 명확한 규명은 이루어지지 않고 있는 실정이다. 그러한 뒤틀림 현상에 대한 규명이 수행되지 않아 다실 박스거더 교량의 뒤틀림 강성들 즉 교축방향 강성과 횡방향 강성에 대한 연구들 또한 수행되지 않았다. 다실 박스에 비해 상대적으로 뒤틀림 거동이 단순한 단실 박스거더의 뒤틀림에 대한 초기 연구는 Dabro-

* 고려대학교 토목환경공학과 연구조교수
** 현대산업개발 토목설계팀 과장
*** 고려대학교 토목환경공학과 박사과정
**** 고려대학교 토목환경공학과 부교수

wski(1968)¹⁾에 의해서 수행되었다. 이후 Maisel(1985)²⁾이 다실 박스 단면의 개략적인 뒤틀림 모드를 설명하였고, Nakai 와 Yoo(1988)⁴⁾가 단실 박스 단면의 뒤틀림 현상을 역학적으로 규명하였다. 그러나 이들의 연구는 단지 뒤틀림 현상에 대한 개략적이고 해석적인 방법론(methodology)을 제시하는 수준의 연구 결과였다.

따라서, 본 연구에서는 다실 박스거더 교량에 발생하는 뒤틀림 현상을 힘의 평형의 원리에 의해서 정확하게 규명하고, 이를 근거로 하여 뒤틀림에 저항하는 교축방향 및 횡방향 뒤틀림 강성식들을 유도하였다. 유도된 강성식들에 대한 검증은 본 연구에서 개발된 보 요소와 범용프로그램(LUSAS)³⁾의 셀 요소를 사용한 응력 값들의 비교를 통해서 검증되었다. 본 연구에서 개발된 보 요소는 절점 당 9자유도를 갖는 요소인데, 일반적인 6자유도 보 요소에 비틀림 뒎과 2개의 뒤틀림 자유도를 갖는 요소이다.

2. 박스 거더의 뒤틀림

다실 박스거더 교량에 편심하중이 작용한다면 그 단면은 휨(flexure), 비틀림(torsion), 그리고 뒤틀림(distortion) 현상들을 경험하게 될 것이다. 뒤틀림 현상은 휨, 비틀림과는 다르게 셀(cell)의 수에 따라 뒤틀림 형태가 발생한다. 그림 1은 2개의 셀을 갖는 박스거더의 외력에 대한 힘의 평형을 보여주고 있다. 그림 1에서 B, H, e, C 는 각각 셀의 폭, 셀의 높이, 편심된 거리, 단면의 도심을 의미한다. 그림 1(d)에 나타나 있듯이 휨과 비틀림을 유발하는 수직력과 평형을 만족하기 위해서 두 번째 뒤틀림 현상이 나타나고, 그림 2에 보이듯이 비틀림만의 힘의 평형을 만족하기 위해서 첫번째 뒤틀림 현상이 발생한다. 그림 1을 통해서 뒤틀림 현상을 상세히 설명하면, 단위 길이 당 등분포 편심하중 P 는 휨과 비틀림을 유발하는 수직력 $P/3$ 와 $P/2$ 로 각각 분할되지만 [그림 1(a)~1(c)] 이는 힘의 평형조건을 만족하지 못하여 결국 뒤틀림(2nd)을 유발하는 수직력 $P/6$ 를 발생하게 한다[그림 1(d)]. 또한, 그림 1(c)의 비틀림을 유발하는 수직력 $P/2$ 와 $-P/2$ 또는 torque m_T 는 순수비틀림(pure torsion)과 뒤틀림(1st)을 유발한다. 순수비틀림과 뒤틀림(1st) 현상은 각각 전단 중심과 뒤틀림 중심을 단면의 기준점으로 설정하고 있고, 뒤틀림 하중들은 그 자체로서 힘의 평형을 유지한다.

결론적으로 다실 박스거더 단면의 뒤틀림 현상은 휨과 비틀림을 유발하는 하중들과의 평형조건을 만족하기 위해서 발생하는 뒤틀림 하중에 의해서 그 현상이 유발된다. 이러한 뒤틀림에 의해서 박스거더는 뒤틀림 뒎 법선응력(distortional warping normal stress), 뒤틀림 뒎 전단응력(distortional warping shear stress), 그리고 플랜지나 웨브의 두께방향으로 발생하는 횡방향 휨 법선응력(transverse bending normal stress)을 경험하게 된다.

그림 2는 그림 1(c)의 하중에 의해서 단면이 뒤틀림 변형을 발생시킨다는 것을 보여주고 있다. 그림 2에서 실선은 박스 단면의 실제 뒤틀림 변형(deformed shape)을 나타내고 점선은 각 플레이트(plate)의 연결부(junction point)를 연결시킨 선이다. 그리고 D, θ 는 각각 뒤틀림 중심

(distortional center)과 뒤틀림 각(distortional angle)을 의미한다.

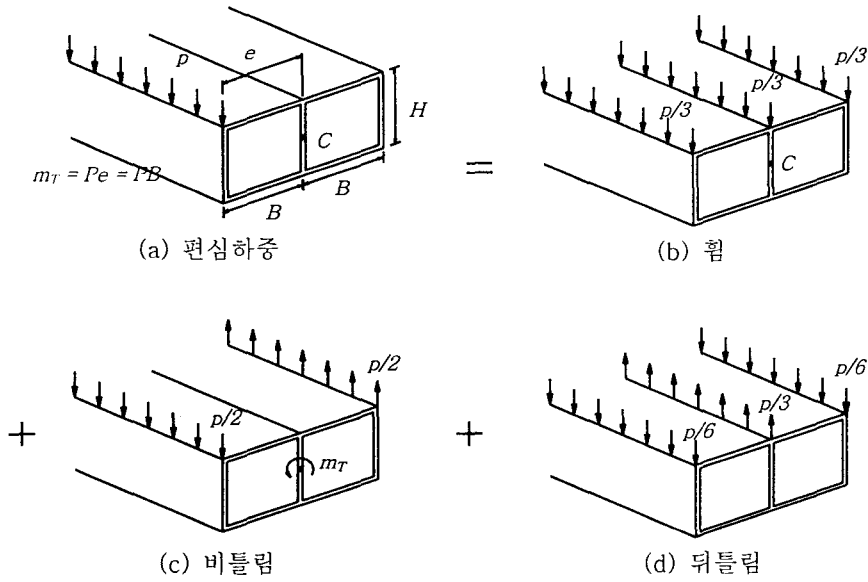


그림 1 셀이 2개인 박스 단면의 힘의 평형

그림 2 뒤틀림에 의한 박스 단면의 변형(two-cell)

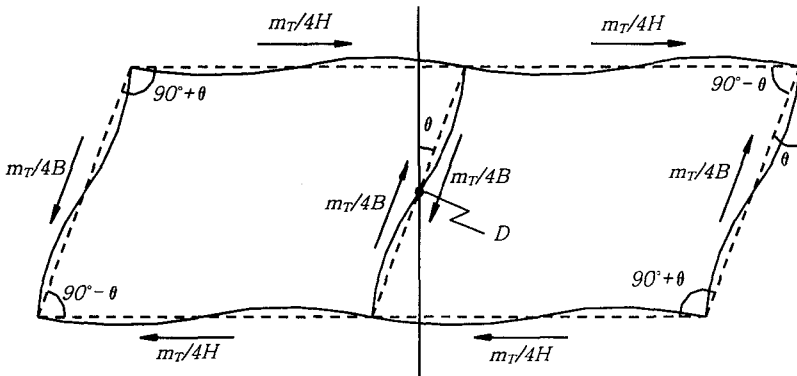


그림 3은 3개의 셀을 갖는 박스 단면의 뒤틀림 하중에 의한 뒤틀림과 횡방향 휨 변형 형상을 보여주고 있다. 셀이 3개인 박스 단면에 발생하는 뒤틀림 하중은 상기에서 언급한 셀이 2개인 박스 단면과 동일한 개념 및 절차를 통해서 구해진다. 셀이 3개인 경우에도 2개인 경우와 마찬가지로 뒤틀림 중심에 대한 각도로서 그 변형 형상이 설명되어질 수 있다. 본 연구에서는 현재 건설되어지고 있는 다실 박스거더 단면이 광폭화 됨으로 인해 셀이 3개인 박스거더 교량에 대해서까지

만 뒤틀림 현상을 규명하였다.

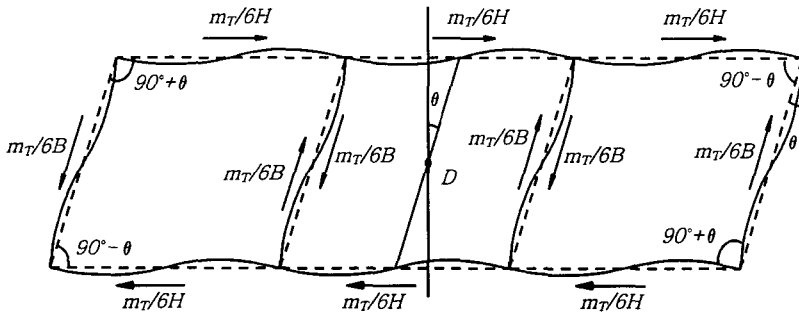


그림 3 뒤틀림에 의한 박스 단면의 변형(three-cell)

3. 뒤틀림 강성 산정

박스 단면의 각 플레이트에 발생하는 뒤틀림에 대한 전단 변형률은 두께방향으로 일정하지만 그 크기가 무시할 만큼 적기 때문에 플레이트 중심선(centerline)에서의 전단 변형률 γ 은 다음 식(1)과 같이 표현될 수 있다. 즉 뒤틀림에 의한 전단 변형률을 “0”으로 가정한다(Dabrowski 1968; Nakai and Yoo 1988).

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

여기서 w 와 v 는 각각 z 축과 y 축에 대응하는 변위이고 s 는 sectorial 좌표계이다. 식 (1)을 교축방향의 뒤틀림 변위 w_d 로 표현하면 식 (2)와 같다. θ , ρ_d , ω_d , C_2 는 각각 뒤틀림 각, 뒤틀림 중심에서 박스 플레이트까지의 수직거리, 뒤틀림에 관한 단위 뒸 함수(unit warping function for distortion) 그리고 초기 뒸 값(initial warping value)에 관한 적분 상수이다. 식 (2)에 Hooke의 법칙을 적용하면 뒤틀림 뒸 법선응력 σ_{dw} 은 식 (3)과 같이 표현된다.

$$w = w_d = -\theta' \int_0^s \rho_d ds + C_2 = -\theta' \omega_d + C_2 \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma_{dw} = E \varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = E(-\theta'' \omega_d + C_2') \quad (3)$$

여기서 E , ε_z 는 각각 탄성계수와 교축방향 법선 변형률이다.

그림 1(d)에서 볼 수 있듯이, 뒤틀림은 그 자체적으로 평형상태(self-equilibrium)에 있으므로 뒤틀림에 의한 추가적인 축력(N)과 휨 모멘트(M_x , M_y)는 발생되지 않는다. 이를 수식적으로 표현하면 다음과 같다.

$$N = \int_0^b \sigma_{dw} t ds = 0 \quad (4)$$

$$M_x = \int_0^b \sigma_{dw} y t ds = 0 \quad (5)$$

$$M_y = \int_0^b \sigma_{dw} x t ds = 0 \quad (6)$$

기호 t , x 와 y 는 각각 플레이트의 두께 그리고 직교 좌표계를 나타낸다. 식 (3)을 식(4)에 대입하여 교축방향 변위로 정리하면 식 (7)과 같다. 여기서 A 는 박스거더 단면의 면적이다.

$$\begin{aligned} w_d &= -\theta' \omega_d + \frac{\theta'}{A} \int_0^b \omega_d t ds = \theta' \left[\frac{1}{A} \int_0^b \omega_d t ds - \omega_d \right] \\ &= \omega_{nd} \theta' \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)로부터 뒤틀림에 관한 정규화된 뒹 함수(normalized warping function for distortion) ω_{nd} 를 구할 수 있다.

$$\omega_{nd} = \frac{1}{A} \int_0^b \omega_d t ds - \omega_d \quad (8)$$

식 (7)과 (8)을 이용하면 뒤틀림 뒹 법선응력 식 (3)은 다음과 같이 변형된다.

$$\sigma_{dw} = \frac{B_d}{I_{dw}} \omega_{nd} \quad (9)$$

여기서 뒤틀림 뒹에 대한 바이모멘트(bimoment) B_d 와 2 차모멘트(distortional warping moment of inertia) I_{dw} 는 식 (10)과 같다.

$$B_d = -EI_{dw} \theta'', \quad I_{dw} = \int_0^b \omega_{nd}^2 t ds \quad (10)$$

뒤틀림에 대한 교축방향 뒤틀림 강성은 결국 식 (10)의 두 번째 식처럼 표현된다. 다시 말하면, 정규화된 뒤틀림 뒹 함수의 제곱을 박스 단면의 둘레(perimeter)인 0에서 b까지의 면적 적분하면 계산되어진다.

셀을 2 개 갖는 박스 단면의 뒤틀림 강성은 그림 4 에 보이듯이 각 연결부(junction point)에서 평형조건과 적합조건을 이용하면 구할 수 있는데, 단면이 대칭임으로 4 개의 연결부에서 총 8 개의 평형과 적합방정식을 세울 수 있다. 8 개의 연립방정식을 풀면 셀이 2 개인 박스 단면의 횡방향 뒤틀림 강성을 구할 수 있는데 식 (11)과 같이 계산된다. 여기서 $B, H, I_u, I_b, I_t, \Gamma_i \sim \Gamma_i$ 는 각각 셀의 폭, 셀의 높이, 상부플랜지, 웨브, 하부플랜지의 단면 2 차 모멘트, $\theta_i \sim \theta_i$ 에 대응하는 평형조건과 적합조건을 만족하기 위한 계수들을 의미한다.

셀이 3개인 박스 단면의 횡방향 뒤틀림 강성을 구하는 절차는 2개인 경우와 마찬가지로 각 연

결부에서 평형조건과 적합조건을 이용하면 구할 수 있다. 유도된 셀이 3개인 박스 단면의 횡향 뒤틀림 강성은 식 (12)와 같다.

$$K_d = \frac{8EI_u}{B}(\Gamma_i^2 + \Gamma_i\Gamma_l + \Gamma_l^2) + \frac{8EI_h}{H}(\Gamma_m^2 + \Gamma_m\Gamma_l + \Gamma_l^2) \quad (11)$$

$$+ \frac{8EI_l}{B}(\Gamma_q^2 + \Gamma_q\Gamma_s + \Gamma_s^2) + \frac{4EI_h}{H}(\Gamma_j^2 + \Gamma_j\Gamma_p + \Gamma_p^2)$$

$$K_d = \frac{12EI_u}{B}(\Gamma_i^2 + \Gamma_i\Gamma_l + \Gamma_l^2) + \frac{8EI_h}{H}(\Gamma_m^2 + \Gamma_m\Gamma_l + \Gamma_l^2) \quad (12)$$

$$+ \frac{12EI_l}{B}(\Gamma_q^2 + \Gamma_q\Gamma_s + \Gamma_s^2) + \frac{8EI_h}{H}(\Gamma_j^2 + \Gamma_j\Gamma_p + \Gamma_p^2)$$

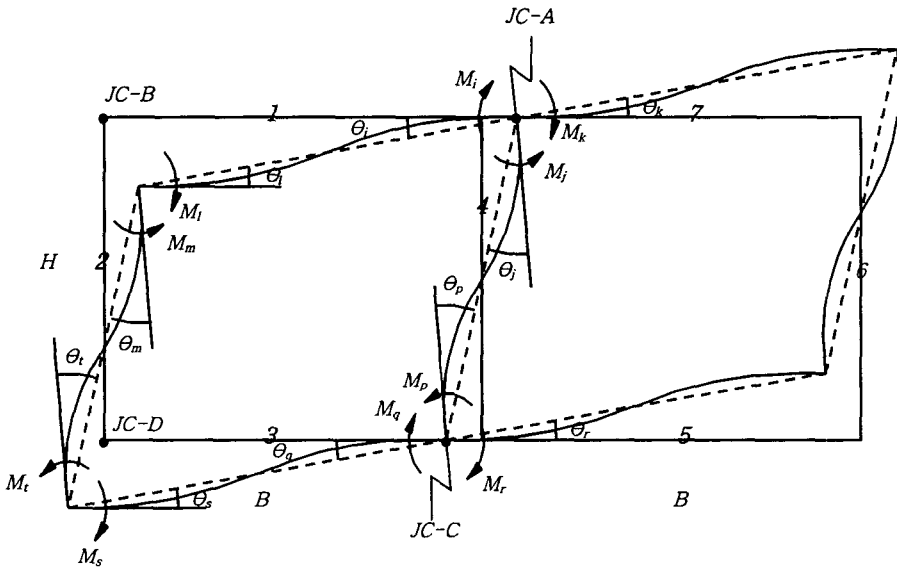


그림 4 박스거더 연결부의 평형과 적합조건

4. 박스 보 요소

본 연구에서 개발된 다실 박스 보 요소는 뒤틀림을 포함하여 총 절점 당 9 자유도를 갖는 보 요소이다. 개발된 보 요소의 변형에너지의 1 차변분(first variation of strain energy), 비틀림과 뒤틀림에 대한 미분 방정식과 강성매트릭스는 다음과 같다.

$$\delta\bar{U} = \delta\bar{U}_{axial} + \delta\bar{U}_{shear} + \delta\bar{U}_{trans} \quad (13)$$

$$= \int_V \sigma_z \delta e_z dV + \int_V [\tau_{xz} \delta e_{xz} + \tau_{yz} \delta e_{yz}] dV + \int_V \sigma_{ts} \delta \epsilon_{ts} dV$$

$$EI_w \beta^{IV} - GK_T \beta'' = m_T + m'_w + y_s q_x - y_s m'_y, \quad EI_{d_w} \theta^{IV} + K_d \theta = \frac{1}{2} m_T \quad (14)$$

$$K_i = EI_w \int_L (N''_{4i} N''_{4j}) dz + GK_T \int_L (N'_{4i} N'_{4j}) dz \quad (15)$$

$$+ EI_{d_w} \int_L (N''_{5i} N''_{5j}) dz + K_d \int_L (N_{5i} N_{5j}) dz$$

여기서 E , G , I_w , K_T , I_{d_w} , K_d , 그리고 N 은 각각 탄성계수, 전단탄성계수, 비틀림 뒀에 관한 2차 모멘트(torsional warping moment of inertia), 순수 비틀림상수(pure torsional constant), 뒀틀림 뒀에 관한 2차 모멘트, 뒀틀림 강성, 그리고 형상함수 매트릭스(shape function matrix)이다. 또한 β , θ 는 각각 비틀림과 뒀틀림에 대한 변위이다.

5. 수치 예제

본 연구에서 유도된 뒀틀림 단면상수 검증을 위해서 현재 현업에서 설계되어지고 있는 강 박스 표준단면을 사용하여 다실 박스 교량의 해석을 수행하였다. 그림 5는 2개의 셀을 갖는 강 박스 거더 교량의 해석 단면인데, 양단에 격벽(3cm 두께)이 설치되어 있다. 해석에 사용된 요소 수는 보와 셸의 경우 각각 34와 8,180요소를 사용하였다. 대상 단면의 교축방향 뒀틀림 강성(I_{d_w}) 및 횡방향 뒀틀림 강성(K_d)은 각각 $0.276849m^6$, $1215.84kN-m$ 이고, 정규화된 뒀틀림 뒀 함수(ω_{nd})의 분포는 그림 6과 같다. 또한, 도심(C)에서 전단 중심(S)과 뒀틀림 중심(D)까지의 거리는 각각 6.5cm 와 5.2cm이다. 그림 7은 대상교량의 보와 셸 요소를 사용한 응력들을 비교 분석한 그림인데, 두 요소를 사용한 응력의 차이는 5%이내에서 잘 일치함을 알 수 있다.

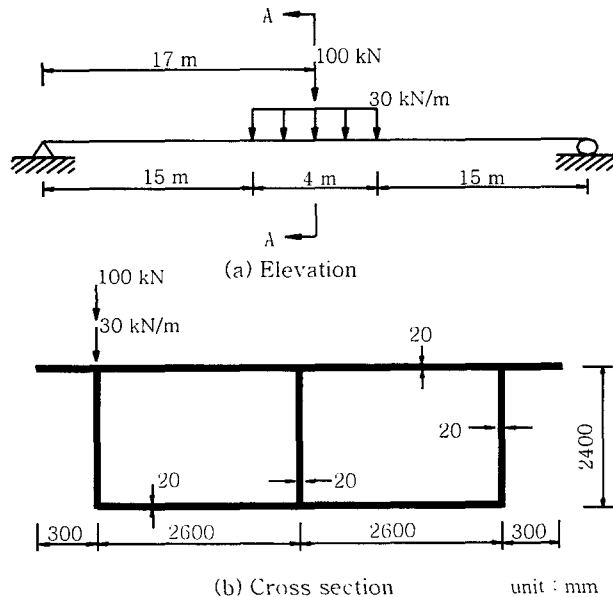


그림 5 대상교량의 측면도 및 단면도

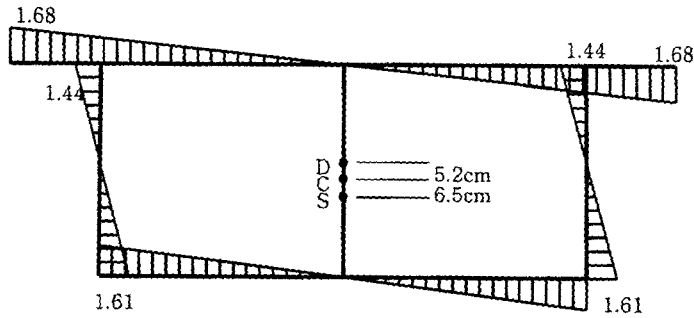


그림 6 대상교량의 정규화된 뒤틀림 텀 함수 (단위: m^2)

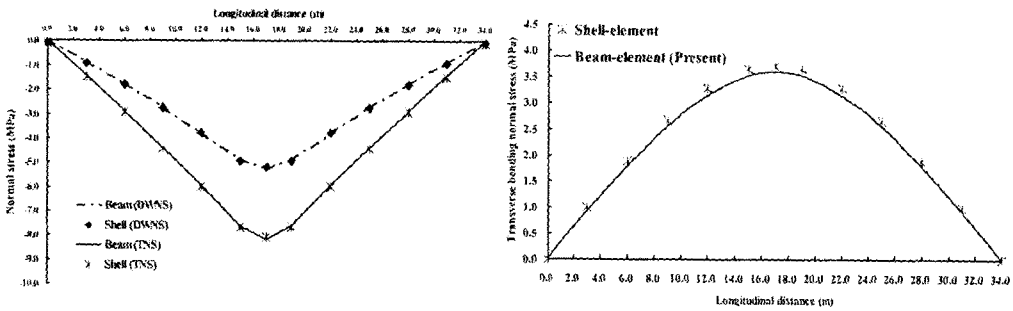


그림 7 대상교량의 보와 셸 요소에 의한 응력들 (JCT B)

6. 결론

본 연구에서는 다실 박스거더의 뒤틀림 현상을 힘의 평형의 원리에 의해서 역학적으로 규명하고, 규명된 다실 박스의 뒤틀림 현상에 근거하여 뒤틀림에 저항하는 교축방향과 횡방향 뒤틀림 강성식들을 유도하였다. 유도된 강성들은 수치예제를 통해서 검증되었는데, 보와 셸 요소를 사용한 응력들의 차이가 5%이내에서 잘 일치함을 알 수 있었다. 이는 결국 유도된 단면상수의 정확성을 입증해주는 결과이다.

참고 문헌

1. Dabrowski, R. *Curved Thin-Walled Girders Theory and Analysis*. Cement and Concrete Association, 1968.
2. Maisel, B. I. "Analysis of Concrete Box Beams Using Small Computer Capacity", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 12, 1985, pp. 265-278.
3. *LUSAS Finite Element Analysis System, User's Manual*. Finite Element Analysis Ltd., London, 1999.
4. Nakai, H. and Yoo, C. H. *Analysis and Design of Curved Steel Bridges*. McGraw-Hill, New York, 1988.