

ESO기법을 이용한 스트럿-타이 모델의 결정

Determination of Strut-and-Tie Models using Evolutionary Structural Optimization

곽효경* 노상훈**

Kwak, Hyo-Gyoung Noh, Sang-Hoon

ABSTRACT

This paper introduces a method to determine strut-tie models in reinforced concrete (RC) structures using the evolutionary structural optimization (ESO). Even though strut-tie models are broadly adapted in design of reinforced concrete members subjected to shear and torsion, conventional methods can hardly give correct models in RC members subjected to complex loadings and geometry conditions. In this paper, the basic idea of the ESO method is used to determine more rational strut-tie models. Since an optimum topology of structures, finally obtained by the ESO method, usually represents a truss-like structure, the ESO method can effectively be used in finding the best strut-tie model in RC structures. Several example structures are provided to demonstrate the capability of the proposed method in finding the best strut-tie model of each RC structure and to verify its efficiency in application to real design problems.

1. 서 론

트러스 유사법 (truss analogy)은 스위스의 Ritter⁽⁹⁾와 독일의 Mörsch⁽⁷⁾가 1899년과 1912년에 각각 독립적으로 RC 보의 전단력에 대한 적절한 배근방법으로 이를 이용한 것에서부터 시작한 이후 많은 연구와 개선을 통해 오늘날 진단과 비틀림을 받는 RC 부재의 균열 후 거동에 대한 합리적이고 효과적인 이론으로 인식되고 있다.⁽³⁾ 그러나 일반적인 트러스 유사법은 응력의 도입부, 단면이 변화하는 부분 등, 내력의 분포가 급격하여 D-영역으로 구분되는 교란영역 (disturbed regions) 또는 불연속영역 (discontinuity regions)에는 효과적으로 적용할 수가 없으며 콘크리트의 응력상태에 대한 명확한 검토 또한 한계가 있는 것이 사실이다. 따라서 구조물의 모든 부분에 적용할 수 있는 일괄된 이론이 요구되었으며 근자에 들어 트러스유사법의 발전된 형태인 스트럿-타이 모델이 그 적절한 접근 방법으로 제안되고 있다.⁽⁴⁾

* 정회원 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 부교수·khg@kaist.ac.kr

** 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 박사과정·nohsan@kaist.ac.kr

그러나 현재 쓰이고 있는 스트럿-타이 모델은 모델을 구성하는 과정에 있어서 B-영역과 D-영역을 구분하는 경계를 설정하는 방법에 대한 엄밀하고 명확한 수학적 근거가 부족하고, 모델을 이루는 부재를 배치하는 과정에서 대부분 설계자의 공학적인 감각이나 경험에 의존하는 바가 크다.⁽⁹⁾ 따라서 보다 합리적이고 이론적인 접근방법을 통한 스트럿-타이 모델의 적용을 위한 모델을 설정할 필요가 있으며 이러한 문제를 해결하기 위해 이 논문에서는 근자에 들어 구조물의 형상최적화에 널리 사용되고 있는 점진적 구조 최적화 기법 (Evolutionary Structural Optimization, ESO)의 개념^(11,14)을 도입하고자 한다. 일반적으로 구조물을 설계함에 있어서 스트럿-타이 모델을 구성할 때 주응력방향을 토대로 한 힘의 경로를 참고로 하는 것과 유사하게 ESO 역시 궁극적으로 힘을 가장 효율적으로 받는 구조를 찾기 위한 방법이라는 사실과 ESO로 얻어지는 최종형상이 트러스 구조물과 유사하다는 사실에 기인하여 스트럿-타이 모델에 ESO의 개념을 도입한다면 상호보완의 효과를 얻을 수 있을 것으로 기대할 수 있다. 이러한 배경을 토대로 이 논문에서는 ESO에 대한 기본사항과 해석절차 등을 검토하고 ESO기법을 이용한 스트럿-타이 모델의 구성에 대한 기본사항과 방법 및 해석 절차 등을 소개하고 있다. 나아가 철근콘크리트 구조물의 전단설계에 관한 대표적인 몇 개의 예제 구조물을 선택하여 ESO과정을 통해 얻어진 스트럿-타이 모델과 기존에 제안된 모델들을 비교하여 제안된 방식의 설계에의 적용성을 확인하였다.

2. 점진적 구조 최적화 (ESO) 기법

2.1 ESO 기법에 의한 최적화 단계

점진적 구조 최적화 (ESO) 기법은 구조물의 초기 설계영역을 구성하는 요소들 가운데 불필요한 요소들을 단계적으로 제거해감으로써 점차 구조물의 형상을 최적화해 나가는 방법을 의미한다. ESO (evolutionary structural optimization) 개념이 도입된 초기에는 매 단계별 요소를 없애는 소거기준으로 응력을 채택하였으나⁽¹¹⁾ 근자에 들어 구조물에서 특정 부분에서의 변위를 제어함과 동시에 요소를 소거시킬 수 있는 민감도 (sensitivity)⁽¹⁴⁾나 가상변형에너지⁽¹⁵⁾ 등의 설계인자들이 소거기준으로 채택되고 있다. 이 논문에서는 민감도나 가상 변형에너지 보다 손쉽게 계산이 가능한 반면 ESO과정에서 요소소거기준으로 채택하기에 적절한 변형에너지를 소거기준으로 채택하였으며 초기설계영역을 구성할 때, 기존의 ESO기법에서 주로 사용되었던 평면요소⁽¹¹⁾ 대신 트러스 요소의 사용을 시도하였다. 이는 트러스 요소가 평면요소에 비해 유한요소해석이 간편할 뿐만 아니라 이 논문의 목적이 ESO기법을 토대로 한 보다 개선된 구조물의 스트럿-타이 모델을 구성하는데 있기 때문이다. 트러스 요소는 부재의 축력을 통해 힘이 전달되므로 ESO에 의해 결정된 최종형상이 스트럿-타이 모델을 구성하는데 있어 보다 적합한 형상을 나타낼 것이라는 예상에서부터 비롯되었고, 실제 문제에 적용하여 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

일반적으로 ESO과정은 크게 4단계의 해석과정을 반복적으로 진행하게 되는데 먼저 구조물을 아주 작은 크기의 요소로 모델링 한 초기설계영역으로부터 유한요소해석을 수행하고 그 결과를 바탕으로 소거기준을 토대로 기준 이하의 요소들을 소거한 다음, 소거되지 않은 요소들로 이뤄진 기하학적 형상을 새로운 입력자료로 하여 동일한 과정을 최적해를 구할 때까지 반복하게 된다.^(12,14) 이 논문에서 적용된 ESO과정 역시 이러한 절차를 따르게 되는데, 각 단계별 세부사항을 소개하고 특징을 정리하면 다음과 같다

- (1) 설계영역의 설정 : 최적화하는 구조물을 충분히 포함하는 설계영역 (design domain)을 설정한다.
- (2) 소거기준의 선정 : 구성된 평형방정식에 의해 질점 변형이 산정되면 각 요소의 소거여부를 결정하

기 위한 부재의 변형에너지를 계산하게 된다. 그러나 요소내 일부 구간의 강성이 제거되는 평면요소의 경우와 달리 트러스 구조물의 경우 절점에서 여러 부재의 연결에 의해 안정구조물의 상태를 유지하고 있는 관계로 한 절점에서 임의의 한 부재가 소거될 경우 전체 구조계가 불안정 구조로 급격히 변화하는 가능성을 가지게 된다. 따라서 이 논문에서는 이러한 특성을 제거하고 나아가 구조적인 안정성을 도모함과 동시에 격자형 트러스 시스템의 변형을 통해 전단변형에 의한 영향을 간접적으로 표현할 수 있도록 하기 위해 단일 부재 각각에 대해 소거기준을 적용시키기 보다는 요소그룹에 의해 구성되는 격자 트러스 시스템(그림 1의 1,4,5,2 참조) 각각에 대해 소거기준을 적용하였다. 즉 그림 1과 같은 구조물에서 절점 1,4,5,2 중 두개의 절점을 지나는 6개의 부재들(수직재, 수평재, 사재 각각 2개씩)이 하나의 요소그룹을 이루고, 마찬가지로 절점 2,5,6,3 중 두개의 절점을 지나는 부재들에 의해서 새로운 요소그룹이 이뤄진다. 이 때 절점 2와 절점 5를 연결하는 부재는 두개의 요소그룹에 공통으로 속하게 되는데, 이 부재의 경우에서와 같이 두 개의 요소그룹에 속하는 부재들은 그것들이 속한 모든 요소그룹들이 소거 기준에 부합되어 모두 소거될 때 소거 시키도록 고려하였다.

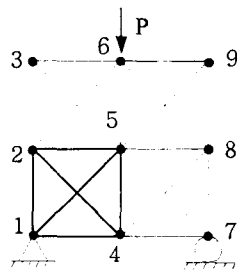


그림 1 소거 기준 계산을 위한 요소그룹 설정

각 반복단계에서 소거 여부를 결정하는 각 요소그룹의 변형에너지는 아래의 식(1)에 의해 산정한다.

$$E_i = \sum_{e=1}^6 E_{ei} = \sum_{e=1}^6 F_{ei} \cdot \Delta L_{ei} / 2 = \sum_{e=1}^6 F_{ei} \cdot \mathcal{E}_{ei} \cdot L_{ei} / 2 = \sum_{e=1}^6 F_{ei}^2 \cdot L_{ei} / 2EA_{ei} \quad (1)$$

- 여기서, F_{ei} : i 번째 요소그룹을 이루는 각 요소에 발생하는 힘
 \mathcal{E}_{ei} : i 번째 요소그룹을 이루는 각 요소에 발생하는 변형율
 L_{ei} : i 번째 요소그룹을 이루는 각 요소의 길이
 E_{ei} : i 번째 요소그룹을 이루는 각 요소의 변형에너지
 E_i : i 번째 요소그룹에 속한 요소들의 변형에너지 합
 EA_{ei} : i 번째 요소그룹의 각 요소의 단면 강성

(3) 유한요소해석 : 유한요소해석을 수행하고 얻어진 결과로부터 식 (1)에 따라 각 요소들의 변형에너지를 계산하고 나아가 각 요소의 변형에너지 합을 통해 각 트러스 시스템별 변형에너지의 합을 산정한다.

(4) 소거단계 : 유한요소해석의 결과로부터 요소소거비율 ERR (Element Removal Ratio)에 따라 요소그룹별 변형에너지의 합이 기준에 못 미치는 값을 갖는 그룹에 속한 부재들을 순차적으로 소거하게 된다. Xie 와 Steven의 연구⁽¹⁴⁾에서는 ERR을 작게 설정하는 것이 일반적으로 구조물의 최적화를 이루는 경향은 있으나 모든 경우에 동일한 결과를 주는 것은 아님을 언급하고 있다. 또 ERR을 낮게 설정할 경우 해석

의 반복횟수 (number of iterations)가 증가하므로 그만큼 더 결과를 도출하는데 시간이 오래 걸리게 된다. 기존의 연구들^(14,15,16)에 따르면 1~3% 범위 내에서 ERR을 설정하는 것이 일반적이고 상당수의 연구에 있어 ERR=1% 로 설정하여 구조물을 최적화하였는데 이 논문에서는 제안된 방법의 효율성을 살펴보기 위해서 ERR을 상대적으로 큰 값인 2~3% 범위 내에서 설정하였다.

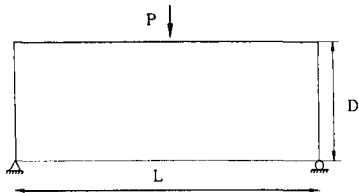
(5) 최적해의 수렴 : (3)-(4)의 과정을 모든 요소 그룹의 변형에너지 수준이 특정 범위 안에 속할때 까지 반복하여 수행함으로써 최종적으로 최적화된 형상을 얻는다.

4. ESO기법을 이용한 스트럿-타이 모델의 결정

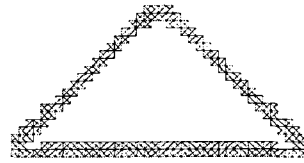
근자에 이르기까지 스트럿-타이 모델은 철근콘크리트 구조물의 합리적인 전단설계를 위해 발전해 왔고 ESO는 구조물의 무게 최소화 등의 목적함수를 만족시키기 위한 방향으로 스트럿-타이 모델과는 독립적으로 발전해왔다. 따라서 ESO기법을 스트럿-타이 모델의 결정에 적용시키기 위한 연구가 필요한데 최근 Xie 등^(15,16)은 스트럿-타이 모델의 형상최적화에 가상의 변형에너지를 요소소거기준으로 한 ESO기법을 적용하여 몇몇 구조물에 있어서 괄목할만한 결과를 얻었고 향후 이 분야에 있어서의 발전가능성을 제시한 바 있다. 그러나 이들의 연구는 기존의 형상최적화(ESO)에서 사용되었던 목적함수인 가상의 변형에너지를 동일하게 사용하고 있는 관계로 ESO에서 산출된 모델을 토대로 콘크리트 구조물의 전단설계 등을 위한 스트럿-타이 모델을 구성하기에는 어려움이 따르게 된다. 나아가 ESO를 토대로 최종 결정된 결과들이 스트럿-타이 모델을 구성하기에 복잡한 경우에는 어떤 방식으로 간단한 모델을 구성할 지에 대한 고찰 또한 부족한 실정이다.⁽¹⁵⁾ 따라서 이 논문에서는 이러한 문제점을 개선하기 위해 스트럿-타이 모델의 결정에 ESO기법을 적용함에 있어서 평면요소 대신 트러스 요소들로 구조물을 세분화 함으로써 해석의 간편성을 도모하고 나아가 스트럿-타이 모델에서 하중이 전달되는 메커니즘과 동일한 방식으로 부재의 축력을 통해 하중을 전달하도록 함으로써 해석의 일관성을 유지하고자 하였다. 이러한 사항들을 실제 예제 문제에 적용하였을 때 ERR을 높게 설정한 경우와 요소의 크기를 상대적으로 크게 설정한 경우에도 구조물의 조건에 적합한 스트럿-타이 모델을 구성할 수 있는 결과를 얻을 수 있는지 살펴보기 위해 다음의 구조물들에 대한 예제 해석이 수행되었다.

4.1 보 구조물

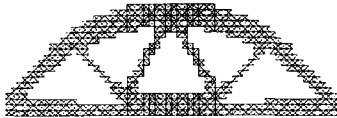
이 예제에서는 트러스 요소를 이용한 ESO과정을 통해 얻어진 단순지지된 보들의 스트럿-타이 모델이 높이 대 길이비(L/D)에 따라 어떠한 영향을 받고 최종형상에서 어떠한 차이를 보이게 되는지를 검토하고자 한다. 나아가 평면요소를 사용한 기존의 연구결과⁽¹⁵⁾와의 비교를 통해 트러스 요소 사용의 효율성을 살펴보고자 한다. 대상 구조물은 L/D=2, 3, 4를 갖는 구조물로서 각 경우에서 모델들을 높이방향으로 20 등분한 유한요소들로, 길이방향으로는 높이방향과 같은 유한요소의 크기로 L/D 에 따라 구역을 각각 세분화 하였으며 ESO과정을 수행할 때 ERR=2%로 상대적으로 큰 값의 요소소거비율을 사용하였다. 그림 2는 대상 구조물 각각에 대해 중앙에 집중하중이 작용하는 경우 트러스 요소를 이용한 ESO를 통해 얻어진 최종형상들을 나타내었다. 그림 2에 명시한 제안된 방식에 의해 얻어진 최종형상들을 그림 3의 기존의 평면요소를 이용한 경우⁽¹⁵⁾의 결과들과 비교했을 때 큰 차이가 없고 경우에 따라서는 보다 자연스러운 형상들을 나타내고 있음을 볼 수 있다. 즉 높이 대 길이비(L/D)가 4인 경우에 대해 트러스 요소를 이용한



(a) 구조물의 하중과 지지조건



(b) L/D=2의 경우 (반복 수행=40일 때)



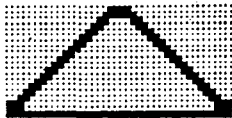
(c) L/D=3의 경우 (반복 수행=32일 때)



(d) L/D=4의 경우 (반복 수행=35일 때)

그림 2 (L/D)에 따른 단순지지 보의 최종형상 (트리스 요소)

경우와 평면요소를 이용한 경우의 최종형상을 비교해보면 그림 3(c)의 평면요소를 이용한 경우에는 상부에서 하부로 힘을 전달하는 하중경로에서의 부재들의 배치가 두 갈래로 나눠졌다가 다시 합쳐짐으로써 하중경로가 겹치지 않는다는 스트럿-타이 모델 구성의 기본 가정에 위배된다. 반면 그림 2(d)의 트리스 요소를 이용한 경우에는 부재들의 배치가 일직선상에 놓인 채 자연스럽게 연결되어 있음을 확인할 수 있다. 이러한 사실로부터 스트럿-타이 모델을 구성하는데 있어 트리스 요소를 사용하는 것이 기존의 평면요소를 사용하는 경우보다 개선된 결과를 얻을 수 있었으며 RC구조물의 전단설계에 있어 트리스 요소를 이용한 ESO기법의 적용이 가능할 것으로 판단된다.



(a) L/D=2의 경우



(b) L/D=3의 경우



(c) L/D=4의 경우

그림 3 (L/D)에 따른 단순지지 보의 최종형상(평면요소)[20]

4.2 기둥과 연결된 코벨(corbel) 구조물

그림 4(a)에서 볼 수 있는 바와 같이 부재의 중앙에 코벨부를 갖는 양단이 고정된 기둥에 그림에서 보는 바와 같이 집중하중이 작용하는 경우의 수치해석이 수행되었다. 이 구조물은 Xie 등이 평면요소를 사용한 ESO과정을 통해 그림 11에 언급한 바와 같이 대상구조물의 스트럿-타이 모델을 제시한 바 있다.^[15]

Xie 등은 이 ESO과정을 수행하기 위해서 각 절점간의 거리가 25mm인 4절점 평면요소를 사용하여 2985개의 절점과 2832개의 평면요소로 구조물을 세분화하였고, 하중이 작용하는 부분의 수평방향의 변위에 제약을 둔 채 요소소거비율 ERR=1%로 설정하여 최적화 과정을 수행하였다. 이 논문에서는 동일한 구조물에 대해서 트리스 요소를 이용하여 ESO과정을 수행하였으며 Xie 등에 의한 결과와의 비교가 이루어졌다. ESO과정을 수행함에 있어 먼저 기존의 방식과 동일한 2985개의 절점을 갖는 트리스 요소들로 구조물을 세분화하였고, ERR=2%로 상대적으로 큰 값의 요소소거비율을 사용하였음에도 불구하고 그림 5(d)에서 볼 수 있는 바와 같이 그림 4(d)의 평면요소를 이용한 경우와 유사한 최종 형상을 나타내고

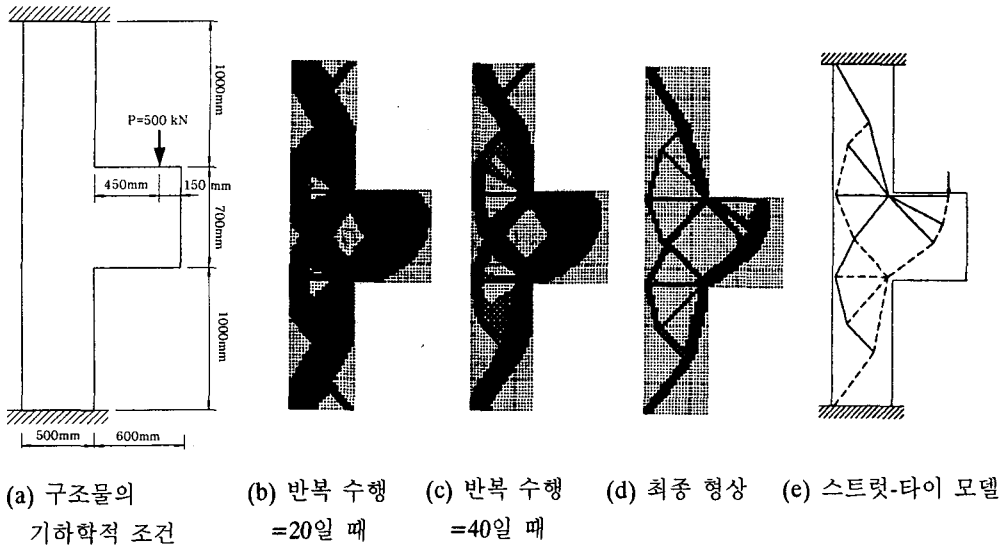


그림 4 평면요소를 이용한 코벨의 형상 최적화 과정과 스트럿-타이 모델⁽¹⁵⁾

있다. 일반적으로 ERR을 크게 잡으면 구조물 내부에서 힘을 전달하는 부재들이 조밀하게 나타나지 않는 경향이 있는데,⁽¹⁴⁾ 트러스 요소를 사용한 경우에는 평면요소를 사용한 경우에 비해 ERR을 두배로 증가시켰음에도 불구하고 최종 형상에 있어서 구조물 내부 부재들의 배치가 거의 일치함을 볼 수 있다. 따라서 상대적으로 큰 ERR과 적은 반복횟수로 구조물에 적합한 스트럿-타이 모델을 얻을 수 있다는 사실로부터 트러스 요소를 사용하는 경우의 효율성을 확인할 수 있다.

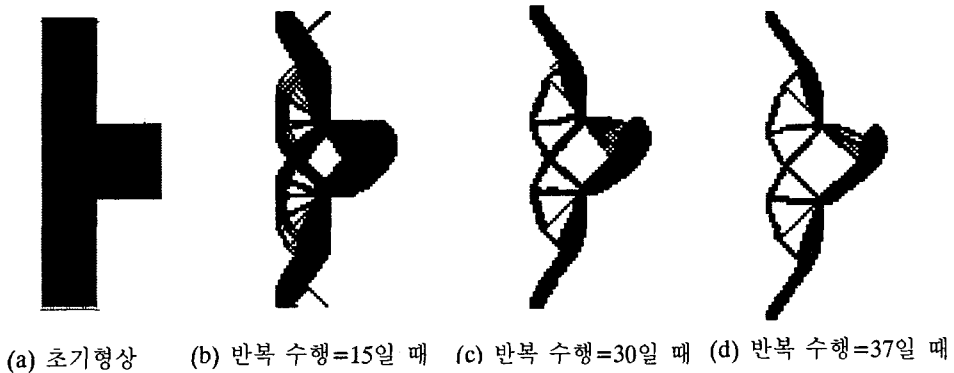
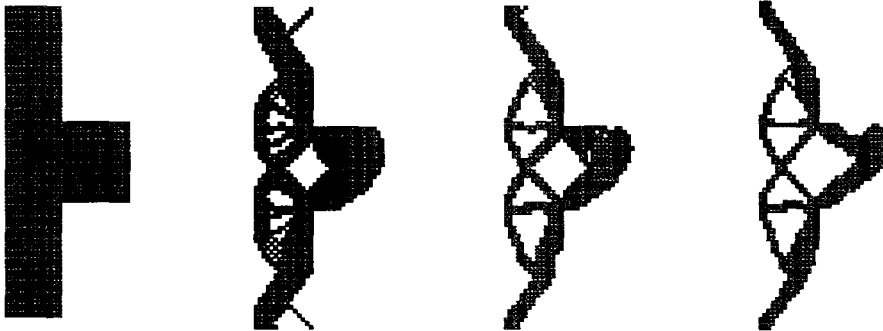


그림 5 2985개 절점의 트러스 요소를 이용한 코벨의 형상 최적화 과정

한편 고전적인 ESO기법은 구조물의 초기형상을 모델링함에 있어 사용하는 요소의 크기에 따라 계산되는 응력과 에너지의 상대적인 크기가 다르게 산정되므로 해석 결과 또한 요소의 크기에 영향을 받게 된다. 즉 평면요소의 경우 요소의 수가 적어지면 유한요소해석에 있어서 계산시간은 감소하는 반면 최종형상에 있어서 내부 부재의 배치가 조밀하지 못한 경향이 나타나는 등 요소크기에 많은 영향을 받는 것으

로 알려져 있다[19]. 이러한 사실에 비추어 트러스 요소를 이용하여 모델링한 경우에 요소의 크기에 따른 영향을 살펴보기 위해 동일한 예제 구조물에 대한 또 다른 연구가 수행되었다. 그림 5의 2985개의 절점을 사용한 모델링과 달리 1708개의 절점을 이용한 동일 구조물의 해석결과를 그림 6에 나타내었다.



(a) 초기형상 (b) 반복 수행=15일 때 (c) 반복 수행=25일 때 (d) 반복 수행=34일 때

그림6 1708개 절점의 트러스 요소를 이용한 코벨의 형상 최적화 과정

이 그림에서 살펴볼 수 있는 바와 같이 상대적으로 작은 수의 트러스 요소를 사용하는 경우에 있어서도 많은 수의 트러스 요소를 사용하는 경우와 매우 유사한 결과를 주고 있으며 나아가 ESO를 통한 스트럿-타이 모델을 구성하는데 있어서는 문제가 없을 것으로 판단된다. 따라서 이를 통해 트러스 요소의 사용을 통한 ESO의 효율성을 간접적으로 살펴볼 수 있다. 구조물을 세분화하는 과정에서 절점의 수를 줄여 요소의 크기를 상대적으로 크게 하여 해석을 하였을 경우에 얻어지는 결과가 절점의 수가 많은 경우와 큰 차이가 없다는 사실은 단지 계산 시간을 절약할 수 있는 장점을 가질 뿐만 아니라 구조물 내부에서의 힘의 흐름이 트러스 요소를 통해 전달될 경우 요소 크기에 큰 영향을 받지 않고 내부 부재들의 기하학적 배치에 있어서의 경향성이 유지됨을 보여준다. 이러한 사실들로부터 트러스 요소를 통해 스트럿-타이 모델의 구성을 정식화 하는 방법의 효율성을 살펴볼 수 있다.

5. 결론

이 논문에서는 구조물을 트러스 요소로 세분화한 모델로부터 ESO과정을 수행하여 최종적으로 얻어진 구조물의 형상을 바탕으로 스트럿-타이 모델을 구성하는 방식을 제안하였다. 이 방식을 세경우의 예제에 적용하여 기존에 평면요소를 이용하여 ESO과정을 수행하는 경우에 비해 계산이 간편하고 요소소거비용(ERR)이나 요소의 크기 변화에 민감하지 않아서 계산 시간을 줄일 수 있을 뿐만 아니라 이를 바탕으로 스트럿-타이 모델을 구성할 때 일관성을 줄 수 있음을 확인하였다. 그리고 기존의 평면응력요소를 사용하면 경우에 따라서는 얻어진 최종 구조물 형상에서 내부 부재들의 배치가 응력의 흐름을 자연스럽게 나타내지 못하는 등의 문제점을 지니고 있는 반면 이 논문에서 제안된 방식을 따르면 이러한 문제점들이 나타나지 않는다는 사실도 확인할 수 있었다. 그리고 제안된 방식에 따른 모델을 기존에 잘 알려지고 검증된 모델들과 비교하였을 경우에 있어서도 유사한 결과를 얻을 수 있었으며 향후 보다 폭넓은 이론적인 연구가 보완된다면 다양한 구조물 설계에 있어서의 적용이 가능할 것이라 사료된다.

감사의 글

본 연구는 SMART 사회기반시설 연구센터 (SISTEC)의 연구비 지원에 의해 이루어졌음을 밝히며 이 지원에 대하여 깊이 감사 드립니다.

참고 문헌

1. 홍성걸, 트러스 모델을 통해 본 철근콘크리트 구조설계 방법론, 발언, 1996
2. ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete. *American Concrete Institute*, Farmington Hills, MI, 1997
3. ASCE-ACI Committee 445, Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete. *Journal of Structural Engineering*, 1998, Vol.124., No. 12, pp 1375-1471
4. J.Schlaich, K.Schäfer, M.Jennewein, Toward a consistent Design of Strutral Concrete,. *J.PCI*,1987, Vol.32.No.3 pp. 74-147.
5. J.Schlaich, The Need for Consistent and Translucent Models, *IABSE Colloquium 'Structural Concrete'*, Stuttgart, 1991, pp. 169-
6. Ali, M. A. and White, R. N., Formulation of Optimal Strut-and-Tie Models in Design of Reinforced Concrete Structures. *ACI special publications*, 2000, 193, pp 979-998
7. Mörsch, E., Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung (Reinforced Concrete, Theory and Application), 1912, *Verlag Konrad Wittwer*, Stuttgart.
8. M. Schüller, High Corbel Wall. *IABSE Workshop India*, 1993, pp. 130-140
9. Ritter, W., Die Bauweise Hennebique (The Hennebique System), *Schweizerische Bauzeitung*, Bd. XXXIII, NO.7, 1899, January.
10. Wang , B. ; Tong , L. Nonlinear analysis of axisymmetric reinforced concrete structures. *Structural engineering and mechanics*., 2000, Vol.9, pt.1, pp. 89-98
11. Y. M. Xie, G. P. Steven, A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization, *Computers and Structures*, Vol. 19, 1993, pp. 885-896.
12. Y. M. Xie, G. P. Steven Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure, *Comput.*, 1994, 11, pp. 295-302.
13. Y. M. Xie, G. P. Steven D.Nha Chu , A. Hira, Evolutionary Structural Optimization for problems with stiffness constraints, *Finite Elements in Analysis and Design*, 1996, 21, pp. 239-251.
14. Y. M. Xie, G. P. Steven ,D.Nha Chu , A. Hira, On Various aspects of Evolutionary Structural Optimization for problems with stiffness constraints. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997, 24, pp. 197-212.
15. Y. M. Xie, G. P. Steven, .Liang,Q.Q., Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure. *ACI structural journal* , 2000, Vol.97, No.2 Mar.-Apr. pp. 322-330.
16. Y. M. Xie, G. P. Steven, .Liang,Q.Q., Generating Optimal Strut-and-Tie Models in Prestressed Concrete Beams by Performance-Based Optimization. *ACI structural journal* , 2001, V98, No.2 , pp. 226-232.