

강자성 판의 열-자탄성학적 불안정성

Thermo-Magneto-Elastic Instability of Ferromagnetic Plates

이종세* 왕성철**

Lee, Jong Seh Wang, Xingzhe

Abstract

Based on a generalized variational principle for magneto-thermo-elasticity, a theoretical model is proposed to describe the coupled magneto-thermo-elastic interaction in soft ferromagnetic plates. Using the linearized theory of magneto-elasticity and perturbation technique, we analyze the magneto-elastic and magneto-thermo-elastic instability of simply supported ferromagnetic plates subjected to thermal and magnetic fields. A nonlinear finite element procedure is developed next to simulate the magneto-thermo-elastic behavior of a finite-size ferromagnetic plates. The effects of thermal and magnetic fields on the magneto-thermo-elastic bending and buckling is investigated in some detail.

1. 서론

근자에와서 핵융합로, 초전도에너지 보관장치(SMES), 그리고 자기성형장치 등과 같이 강한 자기장을 요구하는 구조물이 등장함에 따라 강자성 물질에서의 자기-열-탄성의 상호작용이 관심을 끌고있다(Moon, 1984; Lee, et al., 1993).

본 논문에서 우리는 자기장과 열하중이 재하된 강자성 구조물의 자기-열-탄성 상호작용 연구를 위해 자-탄성에 관한 일반화된 변분원리(Zhou et al. 1998)를 확장하였다. 강자성물체의 자기에너지와 열-탄성 자유에너지를 사용함으로써 맥스웰 응력텐서에 기초한 대부분의 기존모델과 달리, 일반화된 변분원리를 바탕으로 연성 강자성 판의 자기-열-탄성 상호작용에 관한 이론적인 모델을 제안하였고 이 모델은 기하학적 비선형과 온도의존성 자화를 포함하고 있다. 자기장 섭동법과 비선형 유한요소법을 통해 자기장과 열 그리고, 구조물 간의 상호작용을 해석했다. 연성 강자성 판의 자기-열-탄성 휨과 좌굴 그리고 후좌굴거동을 해석하였고, 좌굴거동에 대한 자기입사각의 효과와 온도효과에 대해 고찰하였다.

* 정희원·한양대학교 토목·환경공학과 교수

** 한양대학교 토목·환경공학과 박사후 과정

2. 일반화된 에너지 범함수

그림 1 과 같이 일정한 자기장 \mathbf{B}_0 와 온도장 $T(x, y, z)$ 속에 놓인 연성 강자성 평판을 고려해보자. 평판의 기하학적 상수는 각각 길이 a , 폭 b , 그리고 두께 h 로 주어진다. 전기장, 전류, 또는 전하가 없다고 가정하고 평판의 변위벡터를 $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ 라 한다면 자기에너지함수를 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\Pi_{em} \{\phi, \mathbf{u}\} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^+(\mathbf{u})} \mu_0 \mu_r (\nabla \phi^+)^2 dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-(\mathbf{u})} \mu_0 (\nabla \phi^-)^2 dv + \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \phi^- ds \quad (1)$$

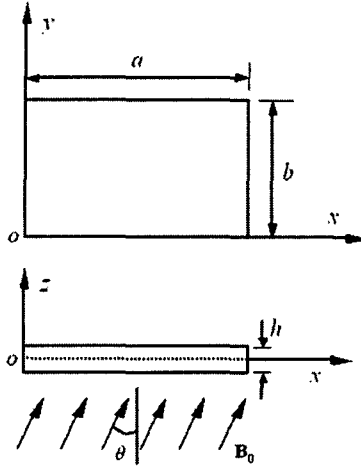


그림. 1 직사각형 강자성 판과 자기장

열-탄성 자유에너지 범함수를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{me} \{\phi, \mathbf{u}\} = \Pi_{me}^1 + \Pi_{me}^2 + \Pi_{me}^3 \quad (2)$$

여기서,

$$\Pi_{me}^1 = \frac{1}{2} \int_{S^+} C [(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2(1-\nu)(\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y)] ds \quad (3a)$$

$$\Pi_{me}^2 = \frac{1}{2} \int_{S^+} D [(\chi_x + \chi_y)^2 + 2(1-\nu)(\chi_{xy}^2 - \chi_x \chi_y)] ds \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{me}^3 = & -\frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{S^+} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \left[\int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) dz \right] ds + \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{S^+} (\chi_x + \chi_y) \left[\int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) z dz \right] ds \\ & - \left[\frac{C_E}{2T_0} + \frac{\alpha^2 Y (1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \right] \int_{S^+} \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0)^2 dz ds \end{aligned} \quad (3c)$$

기본 자기에너지와 열-탄성 자유에너지를 합하여, 계의 자기-열-탄성 에너지 범함수를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi \{\phi, \mathbf{u}\} = \Pi_{em} \{\phi, \mathbf{u}\} + \Pi_{me} \{\phi, \mathbf{u}\} \quad (4)$$

상 온도장의 가정아래 열흐름 포텐셜에너지 범함수는 다음과 같다.

$$\Pi_{th}\{T\} = \int_{\Omega^+} \left[\frac{1}{2} k (\nabla T)^2 - \rho h_r T \right] dv - \int_{S_p} \left[(\lambda_1 \bar{q} - \lambda_2 H_r \bar{T}) T - \frac{1}{2} \lambda_2 H_r T^2 \right] ds \quad (5)$$

3. 지배 방정식의 유도

변분이론을 사용하면 강자성 물체에 관한 자기장의 지배방정식과 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi^+ = 0 \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}) \quad (6a)$$

$$\nabla^2 \phi^- = 0 \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}) \quad (6b)$$

$$\phi^+ = \phi^-, \quad \mu_r \frac{\partial \phi^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \quad \text{on } S \quad (6c)$$

$$-\nabla \phi^- = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad \text{on } S_0 \quad (6d)$$

비슷한 방법을 적용하여 기하학적 비선형성을 갖는 강자성 판의 탄성장에 대한 평형방정식과 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (7a)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \nabla^2 (T - T_0) z dz - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q_z^{em}(x, y, T) \quad (7b)$$

경계조건은 여러 경우를 고려할 수 있겠으나 지면관계상 생략하기로 한다. 한편, 판에 가해지는 등가자기력은 다음 식과 같다.

$$q_z^{em}(x, y, T) = \frac{\mu_0 \chi(T)}{2} \left[\mu_r(T) (H_n^+)^2 - (H_r^+)^2 \right]_{z=-h/2}^{z=h/2} \quad (8)$$

여기서, 이 절의 유도 과정에서 자기장에 의한 열흐름의 영향과 자성화 관계식의 온도의존성은 무시되었다. 따라서, 열흐름의 포텐셜에너지 범함수로부터 지배방정식을 직접 얻을 수 있다. 열전도에 대한 지배방정식과 경계조건은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 T + \rho h_r = 0 \quad \text{in } \Omega^+ \quad (9a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_1 \bar{q} + \lambda_2 H_r (T - \bar{T}) \quad \text{on } S_p \quad (9b)$$

4. 강자성 판에서의 자기-열-탄성 좌굴

수직자기장(자기장의 입사각 $\theta=0^\circ$)에서의 연성 강자성 판의 자탄성 좌굴 현상에 대해서는 상당한 연구가 보고되었다(Lee, 1996; Zheng, et al., 1999). 여기서, 우리는 자기장과 열장 하에서 단순지지된 직사각형 강자성 판의 자기-열-탄성 좌굴거동을 고찰하고자 하였다. 아래의 해석은 강자성 판의 자기-열-탄성에 관해 전 장에서 개발된 이론적 모형에 기초하고 있다. 문제를 간소화하기 위해, 강자성 판에 대해 선형미소변형이론의 가정과 온도에 독립적인 자화율 χ 이 적용됐다. 식 (7a)에 의해서, 열장으로 부터 발생하는 막응력 합력을 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$N_x = -\frac{\alpha Y T h}{1-\nu}, \quad N_y = -\frac{\alpha Y T h}{1-\nu}, \quad N_{xy} = 0 \quad (10)$$

강자성 판의 자기장 해석을 위해서 선형화 이론(Pao and Yeh, 1973)을 사용하였다. 자기장은 두 상태 즉, 강제상태와 섭동상태로 나누어 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}_0^+ + \mathbf{h}^+ = -\nabla\Phi^+ - \nabla\phi^+ \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}) \quad (11a)$$

$$\mathbf{H}^- = \mathbf{H}_0^- + \mathbf{h}^- = -\nabla\Phi^- - \nabla\phi^- \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}) \quad (11b)$$

얇은 판(즉, $h/a \ll 1, h/b \ll 1$)의 기하학적 특징을 고려하고 경계자기장 효과를 무시하면 강제상태와 섭동상태 각각에 대해 지배방정식을 얻을 수 있으나 여기서는 지면관계상 생략하기로 한다. 강제상태의 지배방정식으로부터 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{H}_0^+ = -\nabla\Phi^+ = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0\mu_r} \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}=0) \quad (12a)$$

$$\mathbf{H}_0^- = -\nabla\Phi^- = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}=0) \quad (12b)$$

단순지지된 직사각형 판에 대해 다음 식과 같은 형태의 해를 가정하였다.

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (13)$$

여기서 m 과 n 은 양의 정수를 나타낸다. 식 (12)-(13)을 경계조건에 대입함으로써 섭동장을 구할 수 있으며 그 결과를 이용하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_m \sum_n A_{mn} \left[Dk_{mn}^4 - \frac{2B_0^2 \chi^2 k_{mn}}{\mu_0 \mu_r \Delta_{mn}} \sinh \frac{k_{mn} h}{2} - \frac{\alpha Y T h}{1-\nu} k_{mn}^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (14)$$

위 식으로 부터 자기장 B_0 와 온도장 T 가 작은 값일 때 $A_{mn}=0$ 또는 $w=0$ 이 됨을 알 수 있다. 이것은 강자성 판의 평형 상태로서 휨이 없는 상태를 나타낸다. 그러나, B_0 또는 T 가 증가함에 따라, 판의 좌굴을 의미하는 $A_{mn} \neq 0$ 또는 $w \neq 0$ 와 같은 상태가 나타나게 됨을 알 수 있다.

Case I: $T=0$ 와 $B_0 \neq 0$

이 경우는, 강자성 판에 자기장만 가해진 경우이다. 식 (14)로부터, 자-탄성 좌굴($m=n=1$)이 발생하는 자기장의 임계 값은 다음 식과 같다.

$$B_{0cr} = \left[\frac{\mu_0 \mu_r \Delta_{11} \pi^3}{24(1-\nu^2) \chi^2 \sinh(k_{11}/2)} \right]^{1/2} [1+(a/b)^2]^{3/4} (a/h)^{-3/2} \quad (15)$$

대부분의 경우 연성 강자성 물질의 자화율이 매우 큰 값(예, 철의 경우 $\chi > 10^4$)을 갖는다는 것과 얇은 판(즉, $h/a \ll 1, h/b \ll 1$)의 가정을 사용하면 식 (15)는 다음과 같은 무차원의 형태로 표현할 수 있다.

$$B_{cr}^* = \frac{B_{0cr}}{\sqrt{\mu_0 Y}} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{6(1-\nu^2)} \right]^{1/2} [1+(a/b)^2]^{3/4} (a/h)^{-3/2} \quad (16)$$

위 식에서 임계 자기장 B_{cr}^* 은 판의 기하학적 변수 a/h 의 $-3/2$ 승에 비례해 변함을 알 수 있는데 이것은 Moon and Pao (1968)의 결과와 일치하고 있다.

Case II: $T \neq 0$ 와 $B_0 = 0$

이 경우, 강자성 판은 온도장만 가해진 경우이며 열-탄성 좌굴이 발생하는 온도의 임계 값(무차원 값)은 다음과 같다.

$$T_{cr}^* = \alpha T_{cr} = \frac{\pi^2}{12(1+\nu)} [1+(a/b)^2] (a/h)^{-2} \quad (17)$$

Case III: $T \neq 0$ 와 $B_0 \neq 0$

이 경우는 강자성 판에 온도장과 자기장이 동시에 가해진 경우를 나타낸다. 이 경우, 자-탄성 좌굴에 대한 온도장의 영향과 열-탄성 좌굴에 대한 자기장의 영향을 각각 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$B_{cr}^* = \frac{\pi^3 h^3}{24(1-\nu^2) a^3} - \left[\frac{\pi h T^*}{2(1-\nu) a} \right]^{1/2} [1+(a/b)^2]^{1/4} \quad (18a)$$

$$T_{cr}^* = \frac{\pi^2}{12(1+\nu)} [1+(a/b)^2] (a/h)^{-2} - \frac{2(1-\nu)(B_{cr}^*)^2 a}{\pi \sqrt{1+(a/b)^2} h} \quad (18b)$$

그리고, 강자성 판에서의 자기-열-탄성 좌굴의 특이 곡선은 다음 식과 같다.

$$\left(\frac{B_{cr}^*}{B_{cr}^*} \right)^2 + \frac{T_{cr}^*}{T_{cr}^*} = 1 \quad (19)$$

여기서, B^* 과 T^* 은 각각 자기장과 온도장의 무차원 변수이다. 자기-열-탄성 좌굴에 해당하는 강자성 판의 처짐은 다음 식과 같다.

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (20)$$

그림 2(a)와 2(b)는 각각 단순지지된 강자성 판의 자-탄성 좌굴 값과 열-탄성 좌굴 값을 기하학적 변수 a/h 의 로그함수로 나타낸 것이다. 이것은 자탄성 좌굴의 임계 값이 a/h 의 $-3/2$ 승에 비례하고, 열탄성 좌굴 값은 a/h 의 -2 승에 비례하여 감소하는 것을 보여준다. 그림 3은 자기-열-탄성 좌굴의 특이곡선을 나타내고 여기서, B_{cr}^* 과 T_{cr}^* 는 각각 자기장 또는 온도장만이 가해진 판에서의 임계자기장과 임계온도장을 나타낸다. 그림에서, 특이곡선과 세로좌표축으로 둘러싸인 영역은 자기-열-탄성 좌굴이 발생하지 않는 안정영역을 나타낸다.

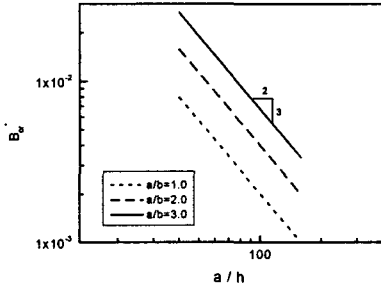


그림. 2(a) 자-탄성 좌굴

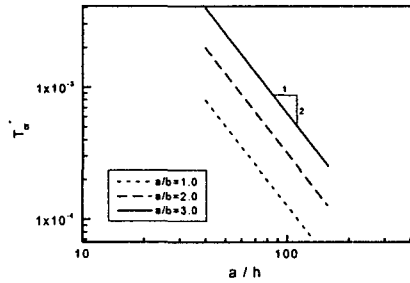


그림. 2(b) 열-탄성 좌굴

그림. 2 임계 값 과 기하매개변수 a/h 의 대수곡선

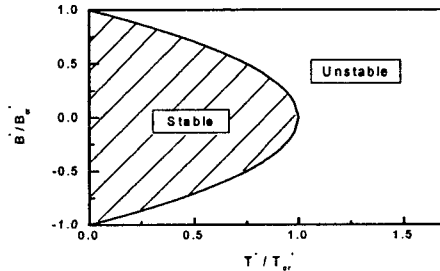


그림. 3 자기-열-탄성 좌굴의 특이곡선

5. 유한요소해석

자기-열-탄성학적 문제의 경우 방정식이 상호연계되었고 비선형이기 때문에 구조물의 기하학적 형태나 지지조건이 아주 단순한 경우를 제외하고는 해석적인 해를 얻는 것이 매우 어렵다. 이 장에서는 유한한 크기의 강자성 판의 변형, 자기장과 온도장의 분포를 해석하기 위하여 유한요소법에 기초한 수치해석 프로그램을 개발하였다. 그러나 지면의 제약으로 상세한 내용은 생략하기로 한다.

6. 수치 결과와 분석

여기서 자기장과 온도장에 의한 직사각형 강자성 판(그림. 1)의 자기-열-탄성 거동(휨, 좌굴, 후좌굴 등)을 위해서 몇 가지 수치예제를 고려하였다. 기하학적 상수와 재료의 성질은 표 1에 제시된 바와 같다.

표 1. 강자성 판의 기하적, 재료적 상수

길이 a (m)	폭 b (m)	두께 h (m)	영의계수 Y (Mpa)	포아손비 ν	상대도자율 μ_r	온도계수 α (1/°C)
0.1	0.1	0.001	1.2×10^5	0.3	1000	1.0×10^{-5}

먼저, 일정한 온도장이 재하된 강자성 판의 수치예제를 고려하기로 한다. 온도장에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$T = P \cos(\pi y/b), \quad \text{at } x=0; \quad T=0, \quad \text{at } x=a \quad (21a)$$

$$\partial T / \partial y = 0, \quad \text{at } y=0, b \quad (21b)$$

강자성 판의 온도장 분포는 판의 두께에 대해 독립적이며 따라서, $T=T(x, y)$ 이다. 그림 4 는 선택된 온도에 대해 재하자기장 B_0^* ($B_0^* = B_0 / \sqrt{\mu_0 Y} \times 10^4$)에 대한 강자성 판의 최대 휨을 보여준다. 그림으로부터, 자기-열-탄성 좌굴이 발생하는 것을 알 수 있으며 이 경우 자기장만 재하 됐을 때의 자탄성 좌굴과 거동이 유사하다는 것을 알 수 있다. 자기장 강도가 임계 값 이상이 될 때, 평판의 휨은 후좌굴거동을 보이며 판이 어느정도 재하 능력을 가지고 있음을 알 수 있다. 그림 5 는 재하 온도장에 대한 임계자기장을 나타내고 있다. 이 그림은 재하 온도가 평판에서 막응력을 증가시키므로 온도 P 가 커질수록 임계 자기장은 작아지는 것을 보여준다. 그림에서 보는 바와 같이, $P=200^\circ\text{C}$ 에서의 좌굴 값은 $P=0^\circ\text{C}$ (온도장 또는 평판의 자-탄성 좌굴이 없는) 값의 거의 절반수준이다. 자기장의 입사각 θ 는 강자성 평판의 자기-열-탄성 거동에 큰 영향을 줄 수 있다.

그림 6 은 $(x=a/4, y=b/2)$ 지점에서 재하자기장과 자기장의 입사각에 대한 평판의 휨을 보여준다. 그림에서 보는 바와 같이 자기장의 입사각이 판의 자기-열-탄성 좌굴거동에 상당한 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 그림으로부터, 자기장의 입사각이 작을 때는 좌굴이 발생하나 입사각이 크면 판은 일반적인 휨 거동만을 보여준다.

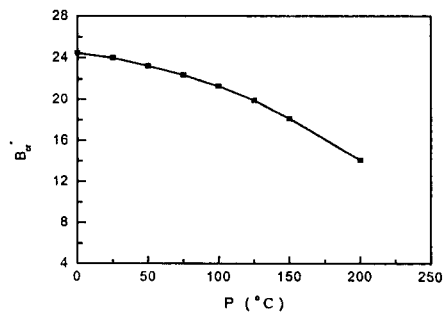
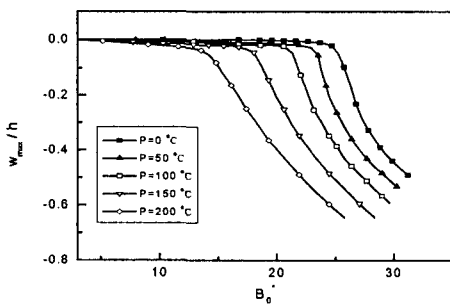


그림. 4 최대처짐 대 자기장 곡선(수직 자기장) 그림. 5 재하온도에 따른 자기-열-탄성좌굴임계자기장

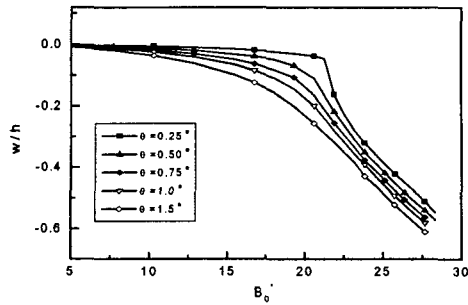


그림. 6 자기-열-탄성 휨의 처짐곡선 ($P = 100^{\circ}\text{C}$)

7. 결 론

기하학적 비선형과 온도 의존적 자화관계를 갖는 연성 강자성 판의 자기-열-탄성 상호작용을 위한 문제를 고찰하기 위해 일반화된 변분원리에 기초한 해석모형을 개발하였다. 개발된 기본식은 강한 비선형성과 상호연계성을 갖는 것을 볼 수 있다. 이에 대해 적절한 선형화와 섭동기법을 사용하여 단순지지된 사각형의 강자성 판의 자기-열-탄성학적 좌굴을 해석하였다. 자기-열-탄성학적 불안정영역을 구하였으며 기하적 변수와 자기장과 온도장의 강도에 따른 임계 값을 구했다. 해석적으로 고찰하기 어려운 문제를 모사하기 위해 비선형 유한요소법을 개발하여 해석에 사용하였다. 해석결과, 자기장과 온도장이 판에 동시에 재하된 경우 자기장이 특정한 임계 값에 도달하면 좌굴이 발생하며 이 임계 값의 크기가 재하온도장이 커짐에 따라 작아지는 것을 알 수 있었다. 자기장이 경사를 갖고 재하되는 경우, 입사각이 상대적으로 작을 때 좌굴이 발생하나 입사각이 크면 주로 자기-열-탄성학적 휨이 발생함을 알 수 있었다. 특히, 큰 경사를 갖는 강한 자기장이 가해질 경우, 온도 의존적인 자화 구성관계식이 판의 휨 거동에 큰 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 교육부의 BK21 프로그램과 과학기술부의 국가지정연구실에 의한 재정지원으로 이루어짐에 대해 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

1. Lee, J. S., Maugin, G. A., Shindo, Y., Eds., "Mechanics of electromagnetic materials and structures", Am. Soc. of Mech. Engrs, New York, 1993.
2. Lee, J. S., "Dynamic stability of conduction beam-plates in transverse fields", J. Eng. Mech. 122(2), 89-94, 1996.
3. Moon, F. C., "Magneto-solid mechanics". John Wiley and Sons, New York, 1984.
4. Pao, Y. H., Yeh, C. S., "A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids", Int. J. Engng Sci. 11(4), 415-436, 1973.
5. Zheng, X. J., Zhou, Y. H., Wang, X., Lee, J. S., "Bending and buckling of ferroelastic plates", J. Eng. Mech. 125, 180-185, 1999.
6. Zhou, Y. H., Zheng, X. J., "A general expression of magnetic force for soft ferromagnetic plates in complex magnetic fields", Int. J. Engng Sci. 35(15), 1405-1417, 1997.