

사상 함수의 변분을 이용한 유한요소 해석의 오차 분석

A Posteriori Error Estimation Based On The Variation Of Mapping Function For Finite Element Method

박시형¹ 김지환²
Park , Si-Hyong Kim, Ji-Hwan

ABSTRACT

A new error estimation method is proposed. This utilizes the variation of energy functional about the mapping function between the global and the master elements. The resultant system of equations is the weak form of the generalized conservation checks. However, This formulation has an important information about the relations between the connected elements. In other words, some relations between the connected elements are obtained and these can be used very usefully to measure a posteriori error. In this paper, the explicit formulations are presented for the 1-dimensional model and the 2-dimensional model problems. Numerical results are provided for first order shear deformation theory of beam model and the plane stress problem.

1. 서론

일반적으로 유한요소법에 의거한 수치해의 오차의 크기는 각각의 변위 오차를 변형률 에너지 관계식에 대입하여 얻어지는 오차 에너지로써 나타낸다. 오차 에너지를 얻는 방법으로 주류를 이루는 것은 두가지로 분류할 수 있으며, 첫째로는 수치해가 만족시키지 못하는 방정식의 잉여 부분에 근거한 오차의 계산 방법이다. 이러한 방법은 Babuska와 Rheinboldt⁽¹⁾에 의해 처음으로 소개되었으며 그 후로 많은 연구가 진행되었다.^{(2),(3)} 두번째 방법은 수치해의 결과중에서 변형률에 해당하는 부분의 후처리를 통하여, 정해에 가까운 변형률을 계산하여 수치해의 오차 에너지를 얻는 것이다. 다시 말하면 개선된 변형률을 정해를 대신하여 이용하는 방법이며 계산상의 효율성에 있어서 매우 뛰어난 것으로 알려져 있다. 이러한 방법에 관한 연구는 참고문헌^{(4),(5)}에서 찾아볼 수 있다. 지금까지 열거한 두가지 방법은 기본적으로 오차의 에너지를 오차의 양을 나타내는 척도로 정의하고 있으며, 이에 반하여 다른 종류의 척도를 기준으로 이용하여 오차의 양을 계산하는 방법들이 있다. McFee 등⁽⁶⁾은 유한요소의 절점이 변화함에 따라 감소하는 전체 에너지의 양으로 오차를 규정하였으며 이에 관한 공식의 유도 과정에서 유한요소

¹서울대학교 기계항공공학부 박사과정

²정회원, 서울대학교 기계항공공학부 교수

의 강성 행렬과 하중 벡터를 적분 단계 이전에 절점의 위치에 대해 미분함으로서 얻어내었다. Tabarrok 등⁽⁷⁾은 유한요소법에서 다루는 지배 방정식의 공간 좌표를 시간 좌표로 가정하여 동역학에서 성립하는 운동 에너지와 위치 에너지의 보존성을 공간 좌표계에 대하여 유도하였다. 이 연구의 결과는 앞에서 언급한 참고문헌⁽⁶⁾의 연구와 같은 결과를 얻게 되지만 오차의 크기를 정의하는 부분에 있어서 다른 양을 이용하였다. 이러한 연구들은 새롭게 오차의 양을 정의하고 그 계산 과정을 요소 단위에서 명료하게 이끌어내었다는 면에서 의미를 찾을 수 있으나 기존의 연구들에서 다루는 오차 에너지와의 상호관계가 정의되지 않았으며 오차의 양을 나타내는 척도로서 검증되려면 더욱 많은 연구를 필요로 한다.

본 연구에서는 사상함수의 변분을 이용하여 유한요소법의 해가 만족하지 못하는 방정식의 에너지 관계식을 유도하고 이를 이용하여 오차 에너지를 계산하는 방법을 제시하였다. 사상함수의 변분을 통하여 얻게되는 관계식은 참고문헌⁽⁶⁾에서 유도된 식을 포괄하고 있으며 참고문헌⁽⁷⁾에서 언급된 에너지 보존 원리를 적분 방정식으로 표현한 것과 같게 된다. 이를 통하여 오차 에너지를 계산하는 부분에서는 먼저 전체 에너지 관계식의 변분과 오차 에너지의 변분 결과가 같음을 증명하고 이를 통하여 요소간의 인접 면에서 상호 교환되는 오차 에너지의 양을 환산하여 인접한 요소간의 오차 에너지 차이를 이용한다. 오차를 계산하는 모든 관계식은 요소 단위에서 이루어지므로 계산 과정이 매우 간단한 장점을 가진다. 기존의 방법들과의 차이는 1차원과 2차원 예제를 통하여 비교하였다.

2. 사상함수의 변분 원리

먼저 다음과 같은 1차원 지배 방정식을 고찰해보자.

$$-Tu_{,xx} + ku = f \quad (1)$$

사상함수의 변분에 대한 쉬운 이해를 위하여 T 와 k 는 상수로 가정하고 균일한 분포 하중의 경우만을 고려하자. 경계 조건은 다음과 같이 양 끝단이 고정되어 있는 경우로 가정한다.

$$u(0) = 0, u(l) = 0 \quad (2)$$

식 (1), (2)와 같은 지배 방정식과 경계조건에 대한 해는 다음과 같은 전체 에너지를 최소화 하는 함수가 된다.

$$E(u) = \frac{a(u, u)}{2} - L(u) \quad (3)$$

변형 에너지와 외력에 의한 일은 각각 다음과 같다.

$$a(u, v) = \int_0^l (Tu_{,x}v_{,x} + kuv)dx \quad (4)$$

$$L(v) = \int_0^l fvdv \quad (5)$$

사상함수의 변분을 위하여 모든 적분의 좌표계를 요소 좌표계로 이동한다. 다음과 같은 요소집합 I

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = l \quad (6)$$

는 전체 영역을 N개의 요소로 나누고 있다. i 번째 요소의 변위를 요소 좌표계로 변환하여 표현하면 다음과 같다.

$$u(x) = u(x(\xi)) = \hat{u}_i(\xi), -1 < \xi < 1 \quad (7)$$

위의 식에서 사상함수 s_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$s_i(x(\xi)) = x(\xi) \quad (8)$$

사상함수와 요소 좌표계를 이용하여 전체 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$E(u) = \sum_i \int_{-1}^1 \left(\frac{T}{2} \hat{u}_{i,\xi}^2 s_{i,\xi}^{-2} + \frac{k}{2} \hat{u}_i^2 - f \hat{u}_i \right) s_{i,\xi} d\xi \quad (9)$$

식 (9)를 s_i 에 관하여 변분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\delta E = \sum_i \int_{-1}^1 \left(-\frac{T}{2} \hat{u}_{i,\xi}^2 s_{i,\xi}^{-2} + \frac{k}{2} \hat{u}_i^2 - f \hat{u}_i \right) \delta s_{i,\xi} d\xi \quad (10)$$

이 식을 원래의 좌표계로 재변환 하면 변분의 결과로서 다음 식을 얻게 된다.

$$\delta E = \int_0^l \left(-\frac{T}{2} u_{,x}^2 + \frac{k}{2} u^2 - f u \right) \delta s_{,dx} dx \quad (11)$$

식 (11)은 전체 에너지를 사상함수에 관하여 변분한 것으로서 지배 방정식 (1)의 정해는 이 식을 0으로 만들게 된다. 식 (1)에서 T, k 그리고 f 가 일정하지 않은 경우에는 다음과 같이 조금 다른 결과가 나오게 되는데, 그 유도 과정은 생략한다.

$$\delta E = \int_0^l \left(-\frac{T}{2} u_{,x}^2 + \frac{k}{2} u^2 - f u \right) \delta s_{,dx} + \left(\frac{T_{,x}}{2} u_{,x}^2 + \frac{k_{,x}}{2} u^2 - f_{,x} u \right) \delta s dx \quad (12)$$

위 식에서 식 (11)과 다른 부분은 계수들에 대한 미분항들이며 이 부분은 사상함수의 변분에 의하여 좌표가 전체적으로 움직이는 효과를 나타낸다. 이와 같이 사상함수에 대한 변분법을 이용하여 유한요소법에 의한 해의 오차의 에너지가 어떻게 변분되는지 고찰해보자. 일반적으로 오차의 에너지는 다음 식을 이용한다.

$$\|e\| = \int \left(\frac{T}{2} e_x^2 + \frac{k}{2} e^2 \right) dx \quad (13)$$

이 식에서 e 부분을 $u - u_h$ 로 치환하고 u_h 에 대하여 변분하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\delta \|e\| = \int \left(-\frac{T}{2} u_{h,x}^2 + \frac{k}{2} u_h^2 - k u u_h \right) \delta s_{,x} + \left(-T u_{,xx} u_{h,x} - k u_{,x} u_h \right) \delta s dx \quad (14)$$

위의 결과는 식 (11)의 유도과정과 같이 T, k, f 를 상수로 가정하고 계산한 결과이다. 이 식에서 마지막 항을 부분적분 하고 지배 방정식 (1)을 대입하면 식 (11)과 같은 식을 얻게 된다. 결론적으로 사상함수의 변분에 의한 전체 에너지의 변화량은 오차 에너지의 변화량과 같다는 것을 알 수 있다.

3. 2차원에서의 사상함수 변분

2차원에서의 사상함수 변분은 1차원의 원리를 이용하여 쉽게 전개할수 있다. 다음과 같은 평면 응력 문제를 예를 들어 고찰해 보도록 한다.

$$\begin{aligned}(C_1 u_{x,x} + C_2 u_{y,y})_x + (C_3 u_{x,y} + C_3 u_{y,x})_y &= f_x \\ (C_1 u_{y,y} + C_2 u_{x,x})_y + (C_3 u_{x,y} + C_3 u_{y,x})_x &= f_y\end{aligned}\quad (15)$$

지배 방정식 (15)는 일반적인 경계조건(경계에서 외력이나 변위가 없음)을 가진다고 가정하면 그 해는 다음의 전체 에너지를 최소화한다.

$$E(\mathbf{u}) = \frac{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2} - L(\mathbf{u}) \quad (16)$$

변형 에너지와 외력은 다음과 같이 정의된다.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} C_1 u_{x,x}^2 + C_1 u_{y,y}^2 + 2C_2 u_{x,x} u_{y,y} + C_3 (u_{x,y} + u_{y,x})^2 dA \quad (17)$$

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} f_x u_x + f_y u_y dA \quad (18)$$

식 (16)을 사상함수에 관하여 변분하는 과정은 매우 복잡하므로 다음과 같은 간단한 예를 들어 그 원리만을 살펴보자.

$$\delta \int_{\Omega} u_x dA = \int_{\Omega} -u_{x,x} \delta s_x - u_{x,y} \delta s_y dA \quad (19)$$

이와 같은 방법으로 전체 에너지의 모든 항에 대하여 변분을 취하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta E = \int_{\Omega} & -C_1 u_{x,x} (u_{x,x} \delta s_x + u_{x,y} \delta s_y)_x - C_1 u_{y,y} (u_{y,x} \delta s_x + u_{y,y} \delta s_y)_y \\ & - C_2 u_{x,x} (u_{y,x} \delta s_x + u_{y,y} \delta s_y)_y - C_2 u_{y,y} (u_{x,x} \delta s_x + u_{x,y} \delta s_y)_x \\ & - C_3 (u_{x,y} + u_{y,x}) (u_{x,x} \delta s_x + u_{x,y} \delta s_y)_y - C_3 (u_{x,y} + u_{y,x}) (u_{y,x} \delta s_x + u_{y,y} \delta s_y)_x \\ & + f_x (u_{x,x} \delta s_x + u_{x,y} \delta s_y) + f_y (u_{y,x} \delta s_x + u_{y,y} \delta s_y) dA\end{aligned}\quad (20)$$

위 식을 부분적분 과정을 거쳐서 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta E = \int_{\Omega} & C_1 \left(\frac{1}{2} (u_{y,y}^2 - u_{x,x}^2) \delta s_{x,x} + \frac{1}{2} (u_{x,x}^2 - u_{y,y}^2) \delta s_{y,y} - u_{x,x} u_{x,y} \delta s_{y,x} - u_{y,x} u_{y,y} \delta s_{x,y} \right) \\ & + C_2 (-u_{x,x} u_{y,x} \delta s_{x,y} - u_{x,y} u_{y,y} \delta s_{y,x}) \\ & + C_3 \left(\frac{1}{2} (u_{x,y}^2 - u_{y,x}^2) \delta s_{x,x} + \frac{1}{2} (u_{y,x}^2 - u_{x,y}^2) \delta s_{y,y} - (u_{y,x} + u_{x,y}) (u_{x,x} \delta s_{x,y} + u_{y,y} \delta s_{y,x}) \right) \\ & + f_x (u_{x,x} \delta s_x + u_{x,y} \delta s_y) + f_y (u_{y,x} \delta s_x + u_{y,y} \delta s_y) dA\end{aligned}\quad (21)$$

식 (21)의 유도 과정은 물성치와 하중(C_i, f_i)이 일정한 경우에 해당하며 앞에서 언급한 바와 같이 그 값이 변하는 경우에는 약간의 항이 추가된다. 1차원 문제에서와 같이 오차 에너지를 다음과 같이 정의하고 그 값을 변분해보자.

$$\|e\| = \int_{\Omega} \frac{1}{2} C_1 e_{x,x}^2 + \frac{1}{2} C_1 e_{y,y}^2 + C_2 e_{x,x} e_{y,y} + \frac{1}{2} C_3 (e_{x,y} + e_{y,x})^2 dA \quad (22)$$

위 식에 $e_i = u_i - u_{hi}$ 를 대입하고 변분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta||e|| = & \int_{\Omega} C_1 e_{x,x}(u_{hx,x}\delta s_x + u_{hx,y}\delta s_y)_{,x} + C_1 e_{y,y}(u_{hy,x}\delta s_x + u_{hy,y}\delta s_y)_{,y} \\ & + C_2 e_{x,x}(u_{hy,x}\delta s_x + u_{hy,y}\delta s_y)_{,y} + C_2 e_{y,y}(u_{hx,x}\delta s_x + u_{hx,y}\delta s_y)_{,x} \\ & + C_3(e_{x,y} + e_{y,x})((u_{hx,x}\delta s_x + u_{hx,y}\delta s_y)_{,y} + (u_{hy,x}\delta s_x + u_{hy,y}\delta s_y)_{,x})dA \end{aligned} \quad (23)$$

위 식의 경우도 1차원과 같은 방법으로 부분적분과 지배 방정식 (15)를 이용하면 식 (21)과 같게 되며 사상함수의 변분에 의한 전체 에너지 변화와 오차 에너지 변화의 양은 같게 된다는 1차원 예제의 결과는 2차원에서도 성립함을 알 수 있다.

4. 사상함수의 변분을 이용한 오차 에너지의 계산방법

지금까지 고찰한 바와 같이 사상함수의 변분에 의한 전체 에너지의 변화는 오차 에너지의 변화와 일치하게 된다. 그림 1은 오차 에너지의 변화가 생겨나는 원리를 간단하게 표현한 것이다. 일반적으로 C^0 연속성을 가지는 요소를 사용할 경우에 방정식의 해가 C^1 이상의 연속성을 가지게 되면 요소와 요소 사이에서 오차 에너지의 불연속이 존재하게 된다. 그 차이를 $\Delta|e|$ 라 하면 요소의 절점에 대하여 변분할 경우에 오차 에너지의 변화는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\delta||e|| = \Delta|e|\delta s(x_i) \quad (24)$$

앞에서 예제로 다루었던 1차원 문제의 경우에 대하여 이 식을 이용하면 다음과 같이 절점에서의 응력 관계식을 얻을 수 있다.

$$\delta||e|| = \Delta|e|\delta s(x_i) = T(u_{i,x} - \bar{u}_{hi,x})(\Delta u_{hi,x})\delta s(x_i) \quad (25)$$

이 식을 이용하여 절점에서의 응력을 계산하면 C^1 의 연속성을 가지는 응력의 분포를 구할 수 있다. 식 (24)의 관계식은 절점에 관한 변분을 취할 경우에 발생하는 요소 내부의 오차 에너지 변화가 없다는 가정에서 이루어진 것이며 이러한 가정의 타당성 여부를 응용 문제를 통하여 살펴보자.

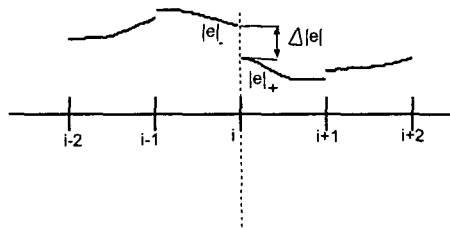


그림 1: 유한요소의 절점에서 오차 에너지의 이동

5. 응용문제

분포 하중 $q(x)$ 를 받는 1차 전단 변형 보 이론에 근거한 전체 에너지를 사상함수에 대하여 변분하면 다음 식으로 표현된다.

$$\delta E = \int_0^l -\frac{1}{2}EI\phi_x^2\delta s_x - \frac{1}{2}kGAw_x^2\delta s_x + \frac{1}{2}kGA\phi^2\delta s_x - qw\delta s_x dx \quad (26)$$

참고문헌⁽⁷⁾에서는 위의 식을 에너지 보존에 의하여 구하였고 참고문헌⁽⁶⁾에서는 유한요소법의 강성행렬을 절점에 대하여 직접 미분하여 구한 바 있다. 오차의 양을 나타내는 방법으로는 두 연구에서 공통적으로 위 식을 만족하는 정도를 이용하였으나 본 연구에서는 일반적으로 이용되는 오차 에너지를 구해보고자 한다. 그림 2는 각 요소의 유효지수를 계산하여 그린 것으로 참고문헌^{(4),(8)}에서 제시된 방법과 비교하였으며 방정식의 정해는 매우 세분화된 격자를 이용하여 구하였다. 유효지수는 계산된 오차 에너지와 실제 오차 에너지의 비율로서 다음과 같이 정의된다.

$$\theta_i = \frac{\|e\|_i^*}{\|e\|_i} \quad (27)$$

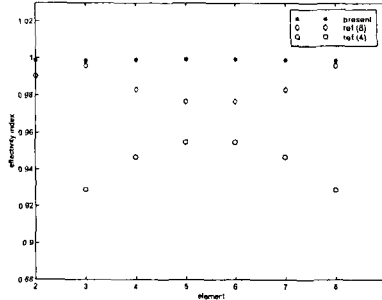


그림 2: 각 요소에서의 유효 지수 (균일한 하중을 받는 보)

2차원 문제에 대한 예제로서 평면응력 문제를 살펴보자. 그림 3은 끝단에 집중하중을 두꺼운 보 모델이며 이 문제를 2차원 평면응력 문제로 다루어 본다. 이 문제에 대한 정해는 다음과 같이 알려져 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{P(L-x)y}{EI} \\ \epsilon_y &= \frac{P\nu(L-x)y}{EI} \\ \gamma_{xy} &= \frac{P}{GI}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \end{aligned} \quad (28)$$

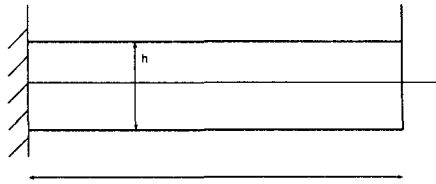


그림 3: 집중하중을 받는 두꺼운 보

그림 4와 5는 유한요소 격자의 구성과 각 요소에서의 유효지수를 참고문헌⁽⁴⁾의 방법과 본 연구의 방법을 이용하여 계산한 결과이다. 1차원의 경우와 같이 본 연구의 결과가 매우 정확함을 알 수 있다.

| | | | | | | | |
|--|--|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | | | | | | |
| | | 1.114 | 0.80496 | 0.89578 | 0.86544 | 0.88075 | 0.88038 |
| | | 1.1064 | 0.80446 | 0.89547 | 0.86533 | 0.87741 | 0.91168 |
| | | | | | | | |

그림 4: 평면 응력 문제의 유효 지수(ref (4))

| | | | | | | | |
|--|--|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | | | | | | |
| | | 1.0274 | 0.94684 | 0.9727 | 0.96432 | 0.96859 | 0.96865 |
| | | 1.0261 | 0.94786 | 0.97278 | 0.96448 | 0.96763 | 0.97715 |
| | | | | | | | |

그림 5: 평면 응력 문제의 유효 지수(present)

6. 결론

에너지 관계식에 대한 사상함수의 변분 방법에 대하여 고찰하고 이를 이용하여 오차 에너지를 계산하는 방법을 제시하였다. 사상함수의 변분을 통하여 얻게되는 관계식을 요소간의 인접면에서의 오차 에너지 이동량과 비교하여 연속성을 가지는 응력 분포를 구할 수 있었으며 이를 통한 오차 에너지의 값은 기존의 방법들에 비하여 매우 정확한 값을 나타내었다. 오차를 계산하는 모든 관계식은 요소 단위에서 이루어지므로 계산 과정이 매우 간단한 장점을 가지며 특히 경계 부근에서도 정확한 오차 에너지를 구할 수 있었다.

참고 문헌

1. Babuska, I. and Rheinboldt, W.C., "A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.12, 1978, pp.1597-1615
2. Kelly, D.W., "The Self-equilibration of Residuals and Complementary a Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.20, 1984, pp.1491-1506
3. Bank, R.E. and Miller, A., "Some Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations," *Math. Comput.*, Vol.44, 1985, pp.283-301
4. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.24, 1987, pp.337-357
5. Wilberg, N.E. and Abdulwahab, F., "Patch Recovery Based on the Superconvergent Derivatives and Equilibrium," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.36, 1993, pp.2703-2724
6. McFee, S. and Giannacopoulos, D., "Optimal Discretizations in Adaptive Finite Element Electromagnetics," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.52, 2001, pp.939-978
7. Tabarrok, B., Qin, Z. and Stylianou, M., "Generalized Conservation Checks in Finite Element Analysis," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.43, 1998, pp.1295-1307
8. Zhu, J.Z., "A Posteriori Error Estimation-the Relationship between Different Procedures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.150, 1997, pp.411-422