

# 점탄성층을 갖는 비틀린 복합재판의 감쇠해석

## Damping Analysis of Pretwisted Composite Plates with Viscoelastic Layer

이 덕 규\*  
Lee, Deog-Gyu

---

### ABSTRACT

A three node triangular element with drilling rotations incorporating Improved Layerwise Zig-Zag Theory(HZZT) is developed to analyze the vibration of spinning pretwisted composite blades with embedded damping layer. Matching conditions at the interfaces between the damping material and the border material are enforced by setting the shear forces matched and different shear strains along the interfaces. The natural frequencies and modal loss factors of cantilevered pretwisted composite blade with damping core are calculated with the present triangular element enforcing the matching conditions and compared to experimental results and MSC/NASTRAN results using a layered combination of plate and solid elements.

---

### 1. 서 론

점탄성물질을 복합재료 구조물에 접합하여 심는 방법은 피로에 민감한 진동을 감소시키는데 효과적이다. 접합된 점탄성물질은 진동중 전단변형을 통하여 에너지를 발산 하므로 두께방향으로 각층의 기계적특성, 층의 두께, 감쇠계수가 급격히 변하는 적층 복합재료 구조물의 거동을 정확히 예측할수 있는 층이론의 개발이 필요하다.

Saravanos<sup>(1)</sup>는 불연속 층이론을 이용하여 점탄성층을 갖는 복합재료판을 해석하였는데 불연속 층이론은 복합재료를 구성하는 각층이 독립된 변형장을 갖으나 두께방향으로 연속이며 기울기는 불연속이다. 불연속 층이론의 자유도 갯수는 두께방향으로의 소분의 갯수에 따라 늘어남으로 점탄성물질이 접합된 적층구조물의 응력분포를 정확히 계산하는데는 많은 계산량을 필요로 한다.

Di Sciuva<sup>(2)</sup>는 고차원 지그재그 이론을 유도하고 3 절점 적합(Conforming)삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 갯수는 10 개로 이는 2 개의 평면변위, 2 개의 전단변위, 횡변위 그리고 단면회전과 곡률변위이다. 이요소를 이용하여 복합재료판의 굽힘과 자유진동을 해석하였다. Cho 와 Parmeter<sup>(3)</sup>는 고차원 지그재그 이론과 Specht<sup>(4)</sup>가 제안한 보간법을 이용하여 패치테스트를 통과하는 비적합(Nonconforming) 삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 갯수는 5 개로 이는 2 개의 전단변위, 횡변위 그리고 2 개의 단면회전이다.

본연구에서는 지그재그 이론과 Specht<sup>(4)</sup>가 제안한 보간법을 이용하여 패치테스트를 통과하는 비적합 3 절점 삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 갯수는 9 개로 이는 3 개의 병진변위, 3 개의 단면회전변위 그리고 3 개의 고차회전변위이다. 또한 평면상의 경계물질과 점탄성물질사이의 탄성계수가 급격히 변하므로 경계면상에서 전단응력 적합조건이 사용되었다. 이 삼각형요소를 이용하여 점탄성물질이 심어진 비틀린 복합재료판의 자유진동을 해석하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였고 실험치와 비교하였다.

---

\* 정회원. 한국항공우주연구원 위성운영센터 위성응용연구그룹

## 2. 이론전개

### 2.1 Zig-Zag 변형장

다층으로 구성된 판의  $k$  층의 지그재그 변위는 다음과 같이 정의된다<sup>(5)</sup>,

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + h_{11}^{(k)} \phi_x + h_{12}^{(k)} \phi_y, \\ v^{(k)} &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + h_{21}^{(k)} \phi_x + h_{22}^{(k)} \phi_y, \\ w^{(k)} &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

위식에서  $u_0, v_0$  는 평면변위이고,  $w_0$  는 횡변위이며  $\phi_x, \phi_y$  는 전단변위이다.  $h_{11}^{(k)}, h_{12}^{(k)}, h_{21}^{(k)}, h_{22}^{(k)}$  는  $k$  층의 물질의 특성을 나타내는 함수다.<sup>(5)</sup>

### 2.2 구성방정식

평면응력상태를 가정한 점탄성물질의 복소수 형태의 이방성 구성방정식은 다음과 같이 정의된다,

$$\{\sigma\}^{(\omega)} = \left( [\bar{C}]^{(\omega)} + i [C]^{(\omega)} [\bar{\eta}]^{(\omega)} \right) \{\epsilon\}^{(\omega)} \quad (2)$$

### 2.3 3 절점 삼각형 유한요소

3 절점 삼각형 요소를 지그재그 이론을 이용하여 개발하였는데 평면변위 ( $u_0, v_0$ ) 와 고차전단변위 ( $\phi_x, \phi_y$ ) 는 선형으로 보간되며 횡변위  $w_0$  는 Specht<sup>(4)</sup>의 방법에 의하여 보간된다.  $\theta_i$  는 Allman<sup>(6),(7)</sup>의 방법에 따라 도입되고  $\phi_i$  는 가상강성행렬을 통하여 도입되며 강제모드는 절점에서의 회전변위를 삼각형요소 중앙에서의 평면회전에 탄성적으로 연결하여 제거한다. 개발된 삼각형요소는 비적합 이지만 패치테스트를 통과하며 각절점당 자유도의 갯수는 9 개이며 이는 ( $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ ) 인데 여기서  $\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$  로 정의된다.

### 2.4 경계면상의 적합조건

평면상의 경계물질과 점탄성물질사이의 탄성계수가 급격히 변하므로 경계면상에서 전단응력 적합조건이 다음과 같이 적용되었다,

$$\{F_i^s\} = \{F_i^o\}, \quad (3)$$

$$[D_i^s] \{\gamma^s\} = [D_i^o] \{\gamma^o\} \quad (4)$$

위식에서  $[D_i^s]$  와  $[D_i^o]$  는 각각 경계물질과 점탄성물질의 전단계수를 나타내고  $\{\gamma^s\}$  와  $\{\gamma^o\}$  는 각각 경계물질과 점탄성물질의 전단변형율을 나타낸다. 위식으로부터 경계물질의 전단변형율은 다음과 같이 나타낸다,

$$\{\gamma^s\} = [T_i] \{\gamma^o\}, \quad (5)$$

$$\{\gamma^s\} = [T_i] \{\gamma^o\} \quad (6)$$

위의 적합조건은 경계요소의 강성행렬에 적용되는데 유한요소의 이산화가 증가함에 따라 위의 적합조건은 더정확히 만족된다.

## 2.5 지배방정식 및 Damping 해석

Hamilton의 원리를 이용하여 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다,

$$[M]\{\ddot{a}\} + ([K] + i[K_o])\{a\} = \{0\} \quad (7)$$

부공간반복법을 이용하여 식(7)의 자유진동을 해석하여 모달변형에너지법으로 모드의 감쇠계수( $\eta_n$ )를 다음과 같이 구하였다,

$$\eta_n = \frac{\{x_n\}^T [K_o] \{x_n\}}{\{x_n\}^T [K] \{x_n\}} \quad (8)$$

## 3. 수치해석

3절점 지그재그 삼각형요소를 이용하여 점탄성물질이 코어에 심어진 비틀린 복합재료 적층판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치와 비교하였다. 복합재료판은 Graphite/Epoxy로 구성되었고 탄성계수는 다음과 같다.

$$E_L = 2 \times 10^7 \text{ psi}, E_T = 1.4 \times 10^6 \text{ psi}, G_{LT} = 8 \times 10^5 \text{ psi}, G_{TT} = 5 \times 10^5 \text{ psi}, \nu_{LT} = 0.3, \rho = 0.0567 \text{ lb/in}^3, h_{ply} = 0.0025 \text{ inch}$$

코어의 점탄성물질로 3M ISD113가 사용되었는데 전단계수와 감쇠계수는  $68^\circ F$ 에서 계산도표(그림 1과 2 참조)를 읽어 구하고 밀도는  $\rho_{ISD113} = 0.035 \text{ lb/in}^3$ 이다. 경계물질로는 AF32가 사용되었고 전단계수와 감쇠계수는 계산도표로부터 구한다.

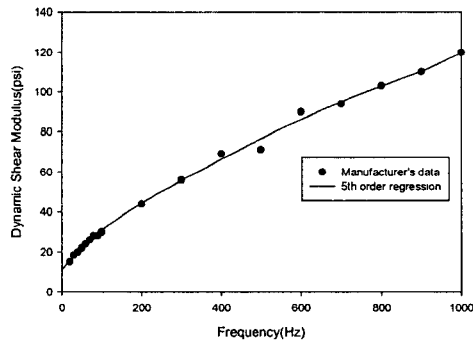


그림 1. 3M ISD113 점탄성물질의 전단계수.

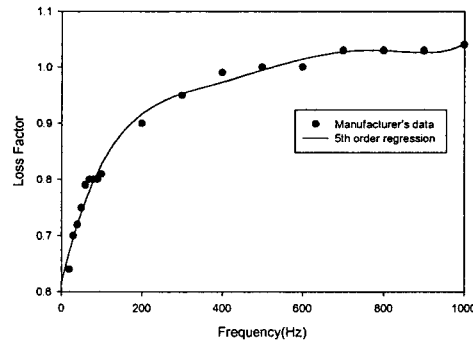


그림 2. 3M ISD113 점탄성물질의 감쇠계수.

그림 3 과 4 는 Damped 복합재료판의 구성과 치수를 보여준다. 판의 가장자리에서 엽렬현상을 방지하기 위하여 경계요소를 점탄성물질의 가장자리에 사용하였다.

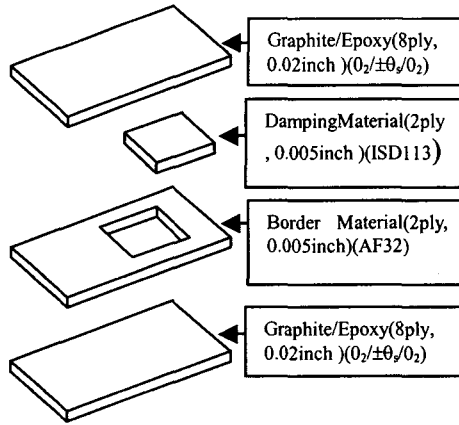


그림 3. Damped 복합재료 판의 구성.

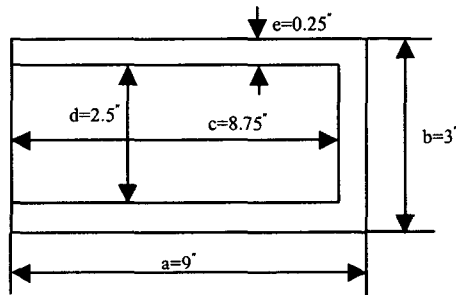


그림 4. 점탄성 코어층의 치수.

표 1 과 2 는 점탄성 물질이 심어진 외팔 평판의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 이연구에서 개발된 지그재그 요소는 실험치에 비교하여 상당히 정확한 고유진동수와 감쇠계수를 예측한다 이는 지그재그 요소가 점탄성물질 코어의 층방향 전단변위를 정확히 예측하기 때문이다.

	$\omega(Hz)$		$\eta$	
	Experiment	Present (THZ3V)	Experiment	Present (THZ3V)
1B	27.4	30.1 (1.1)	0.026	0.029 (1.1)
2B	160.7	158.9 (1.0)	0.078	0.079 (1.0)
1T	88.0	93.1 (1.1)	0.034	0.035 (1.0)

표 1. 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수 및 감쇠계수  $[0_2/\pm 15_2/0_2][ISD113 - AF32][0_2/\pm 15_2/0_2]$ .

	$\omega(Hz)$		$\eta$	
	Experiment	Present (THZ3V)	Experiment	Present (THZ3V)
1B	24.0	26.5 (1.1)	0.017	0.022 (1.3)
2B	144.0	149.7 (1.0)	0.052	0.047 (0.9)
1T	119.7	119.8 (1.0)	0.033	0.035 (1.1)

표 2. 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수 및 감쇠계수  $[0_2^\circ / \pm 45^\circ / 0_2^\circ][ISD113 - AF32][0_2^\circ / \pm 45^\circ / 0_2^\circ]$ .

표 3 과 4 는 점탄성 물질이 심어진 비틀림외팔 복합재판의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 지그재그 요소는 실험치에 상당히 근접한 고유진동수와 감쇠계수를 예측하며 유한요소의 이산화의 정도에 따라 정확도를 더 높일수 있다. 평판에 비하여 비틀림모드의 고유진동수가 큰폭으로 증가하였는데 이는 비틀림으로 인한 비틀림 강성계수가 증가하였기 때문이다.

	$\omega(Hz)$		$\eta$	
	Experiment	Present (THZ3V)	Experiment	Present (THZ3V)
1B	30.6	30.6 (1.0)	0.037	0.038 (1.0)
2B	149.1	145.9 (1.0)	0.098	0.072 (0.7)
1T	347.7	405.0 (1.2)	0.019	0.023 (1.4)

표 3. 비틀림 ( $\phi = 30^\circ$ ) 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수 및 감쇠계수  $[0_2^\circ / \pm 15^\circ / 0_2^\circ][ISD113 - AF32][0_2^\circ / \pm 15^\circ / 0_2^\circ]$ .

	$\omega(Hz)$		$\eta$	
	Experiment	Present (THZ3V)	Experiment	Present (THZ3V)
1B	31.6	26.7 (0.9)	0.026	0.027 (1.0)
2B	150.3	136.1 (0.9)	0.068	0.051 (0.8)
1T	342.0	358.3 (1.1)	0.020	0.026 (1.3)

표 4. 비틀림 ( $\phi = 30^\circ$ ) 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수 및 감쇠계수  $[0_2^\circ / \pm 45^\circ / 0_2^\circ][ISD113 - AF32][0_2^\circ / \pm 45^\circ / 0_2^\circ]$ .

#### 4. 결 론

지그재그 이론과 적합조건을 이용하여 3 절점 삼각형요소를 개발하여 점탄성물질이 심어진 비틀림 복합재

료판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치와 비교하였다. 지그재그이론은 두께방향으로 기계적특성이 급격히 변하는 적층구조물의 전단변형을 정확히 예측함으로써 전단변형을 통하여 에너지를 발산하는 점탄성물질의 동적거동을 해석하는데 적합하다.

#### 참고문헌

1. D. A. Saravanos and J. M. Pereira, "Effects of Interply Damping Layers on the Dynamic Characteristics of Composite Plates", *AIAA journal*, 30, 2906–2913(1992).
2. M. Di Sciuva, "A Third-Order Triangular Multilayered Plate Finite Element with Continuous Interlaminar Stresses", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1–26 (1995).
3. M. Cho and R. R. Parmerter, "Finite Element for Composite Plate Bending Based on Efficient Higher Order Theory", *AIAA Journal*, 32, 2241–2248 (1994).
4. B. Specht, "Modified Shape Functions for the Three-Node Plate Bending Element Passing the Patch Test", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 705–715 (1988).
5. D. G. Lee and J. B. Kosmatka, "Passively Damped Vibration of Composite Plates with Zig-Zag Elements", The 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, April 3--6, 2000. Paper No. AIAA-2000-1473.
6. D. J. Allman, "Evaluation of the Constant Strain Triangle with Drilling Rotations", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 2645–2655 (1988).
7. D. J. Allman, "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis", *Comput. Struct.*, 19, 1–8 (1984).