

# 점탄성층을 갖는 복합재보의 축하중 작용시 진동해석

## Vibration Analysis of Axially-Stressed Composite Beam with Viscoelastic Layer

이 덕 규\*  
Lee, Deog-Gyu

---

### ABSTRACT

Dynamic analysis of laminated beams with a embedded damping layer under tension or compression axial load is investigated. Layer-Wise Zig-Zag Beam Theory and Interdependent Kinematic Relation using the governing equations of motion are incorporated to model the laminated beams with a damping layer and a corresponding beam zig-zag finite element is developed. Flexural frequencies and modal loss factors under tension or compression axial load are calculated based on Complex Eigenvalue Method. The effects of the axial tension and compression load on the frequencies and loss factors are discussed.

---

## 1. 서 론

점탄성물질을 복합재료 구조물에 접합하여 심는 방법은 피로에 민감한 진동을 감소시키는데 효과적이다. 접합된 점탄성물질은 진동중 전단변형을 통하여 에너지를 발산 하므로 두께방향으로 각층의 기계적특성, 층의 두께, 감쇠계수가 급격히 변하는 적층 복합재료 구조물의 거동을 정확히 예측할수 있는 층이론의 개발이 필요하다. 또한 축방향 인장및 압축응력의 변화에 따라 고유진동수와 감쇠계수는 그특성이 급격히 변한다.

Di Taranto 는 점탄성 코어를 갖는 샌드위치 보의 6 차 운동방정식을 유도하였다. 표면의 전단변형은 무시되었고 코어의 축방향 응력은 고려되지 않았다.<sup>(1)</sup> Mead 와 Markus 그리고 Mead 는 6 차 운동방정식을 유도하였고 복소수 모드의 직교성을 증명 하였다. 보의 두께가 얇은 구역에서 높은 고유진동수를 예측하고 경계면상에서 불연속한 응력분포를 나타낸다.<sup>(2),(3),(4)</sup> Averill 은 1 차 와 3 차 지그재그이론을 이용하여 보 유한요소를 개발하여 적층보의 굽힘을 해석하였다.<sup>(5),(6)</sup>

본연구에서는 3 차 지그재그 이론과 지배방정식을 이용한 기하학적상관기법을 이용하여 2 절점 보 유한요소를 개발하였다. 전단변위는 기하학적상관기법을 이용 소거되어 절점당 자유도의 갯수는 3 개로 이는 평면변위, 횡변위 그리고 단면회전변위이다. 이 보 요소를 이용하여 축방향 하중상태의 점탄성물질이 심어진 단순지지와 외팔 복합재료보의 자유진동을 해석하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였고 인장및 압축응력의 영향을 규명하였다.

## 2. 이론전개

### 2.1 Zig-Zag 변형장

다층으로 구성된 보의  $k$  층의 지그재그 변위는 다음과 같이 정의된다.<sup>(7)</sup>

---

\* 정회원. 한국항공우주연구원 위성운영센터 위성응용연구그룹

$$u^{(k)} = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + h^{(k)}(z) \phi, \quad (1)$$

$$w^{(k)} = w$$

위식에서  $h^{(k)}$ 는  $k$  층의 물질의 특성을 나타내는 함수다.<sup>(7)</sup>

## 2.2 구성방정식

평면응력상태를 가정한 점탄성물질의 복소수 형태의 이방성 구성방정식은 다음과 같이 정의된다,

$$\{\sigma\}^{(\omega)} = \left( [\bar{C}]^{(\omega)} + i [C]^{(\omega)} [\bar{\eta}]^{(\omega)} \right) \{e\}^{(\omega)} \quad (2)$$

## 2.3 지배방정식

Hamilton의 원리를 이용하여 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다,

$$\delta u: \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\delta u: \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\delta w: \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + b p_z = 0 \quad (5)$$

### 2.4.2 절점 보 유한요소

2 절점 보 요소는 식 (3)와 (4)을 통하여 고차전단변형  $\phi$ 를 평면변위  $u$ 와 횡변위  $w$  및 단면회전변위  $\frac{\partial w}{\partial x}$ 로

치환한다. 각절점당 자유도의 갯수는 3개이며 이는  $\left( u, v, \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ . 평면변위는 다음과 같이 보간된다,

$$u = u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3, \quad (6)$$

위식에서  $m_1, m_2, m_3$ 는 다음과 같이 정의된다,

$$m_1 = 1 - 3 \frac{x}{L} + 2 \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad m_2 = 4 \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right), \quad m_3 = \frac{x}{L} \left( 2 \frac{x}{L} - 1 \right) \quad (7)$$

고차전단 변위는 다음과 같이 보간된다,

$$\phi = \phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + \phi_3 m_3, \quad (8)$$

횡변위는 다음과 같이 보간된다,

$$w = n_1 w_1 + n_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + n_3 w_2 + n_4 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (9)$$

위식에서  $n_1, n_2, n_3, n_4$ 는 다음과 같이 정의된다,

$$n_1 = 2\frac{x^3}{L^2} - 3\frac{x^2}{L^2} + 1, n_2 = \frac{x^3}{L^2} - 2\frac{x^2}{L} + x, n_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}, n_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (10)$$

식 (6), (8), (9)을 식 (3)와 (4)에 대입하여  $u_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ 를 제거하면  $u, \phi$ 는 다음과 같이 정의 된다,

$$u = M_1 u_1 + M_2 u_2 + N_1 w_1 + N_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_3 w_2 + N_4 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (11)$$

$$\phi = P_1 w_1 + P_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + P_3 w_2 + P_4 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (12)$$

위식에서,

$$M_1 = 1 - \frac{x}{L}, M_2 = \frac{x}{L} \quad (13)$$

$$N_1 = -\frac{3B}{2AL} m_2, N_2 = -\frac{3B}{4A} m_2, N_3 = -N_1, N_4 = N_2 \quad (14)$$

$$P_1 = \frac{12(BQ - EA)}{FAL'}, P_2 = \frac{6(BQ - EA)}{FAL'}, P_3 = -P_1, P_4 = P_2 \quad (15)$$

위식에서  $(A, B, E, F, Q)$ 는 단면의 강성계수이다.

## 2.5 Damping 해석

복소수 형태의 지배방정식은 유한요소법을 이용하여 다음과 같이 유도된다,

$$[M]\{d\} + ([K] + [K_r] + i[K_v])\{d\} = \{0\} \quad (16)$$

식(16)의 자유진동을 해석하여 모드의 감쇠계수 ( $\eta_i$ )를 다음과 같이 구하였다,

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} \quad (17)$$

위식에서  $\lambda_i$ 와  $\lambda_r$ 는 유일모드의 허수와 실수값이다.

## 3. 수치해석

### 3.1 축방향 하중을 받는 점탄성물질이 심어진 복합재료 보의 자유진동

2 절점 지그재그 보 요소를 이용하여 인장및 압축하중하의 점탄성물질이 코어에 심어진 적층보의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였다. 복합재료판은 Graphite/Epoxy 로 구성되었고 탄성계수는 다음과 같다,

$$\begin{aligned} L &= 270\text{mm}, b = 15\text{mm}, \\ E_x^{(i)} &= E_x^{(s)} = 45,540 / \text{mm}^2, G_x^{(i)} = G_x^{(s)} = 4190\text{N} / \text{mm}^2, \\ \nu^{(i)} &= \nu^{(s)} = 0.33, \rho^{(i)} = \rho^{(s)} = 2.04 \times 10^{-9} \text{N} \cdot \text{sec}^2 / \text{mm}^4, \\ \eta_x^{(i)} &= \eta_x^{(s)} = \eta_x^{(i)} = \eta_x^{(s)} = 0 \end{aligned}$$

Damping 코어의 기계적 특성은 다음과 같다,

$$\begin{aligned} E_x^{(s)} &= 15.9\text{N} / \text{mm}^2, G_x^{(s)} = 5.5\text{N} / \text{mm}^2, \nu^{(s)} = 0.45, \\ \rho^{(s)} &= 1.2 \times 10^{-9} \text{N} \cdot \text{sec}^2 / \text{mm}^4, \eta_x^{(s)} = \eta_x^{(s)} = 1 \end{aligned}$$

진동수는 아래와 같이 무차원화 되었다.

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho L'}{D_i}}, \quad \rho = \rho^{(1)} h_1 + \rho^{(2)} h_2 + \rho^{(3)} h_3,$$

$$D_i = E_x^{(1)} \frac{h_1^3}{12} + E_x^{(2)} \frac{h_2^3}{12}$$

그림 1 과 2 는 단면비가 30 일때의 점탄성 코어를 가는 단순지지 샌드위치 보의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 인장응력이 증가함에 따라 고유진동수는 증가하는 반면 감쇠계수는 감소하는데 이는 인장하중이 보의 강성계수를 증가시켜 점탄성 코어에서의 전단변형을 감소시키고 그리하여 에너지의 발산을 저하시킨다. 압축응력이 작용할 경우에 고유진동수는 감소하고 1 차 굽힘진동수는 압축하중 90N 에서 0 이되고 이하중은 좌굴하중으로 정의 된다. 감쇠계수는 증가하며 1 차 감쇠계수는 이 좌굴하중점에서 무한대가 된다.

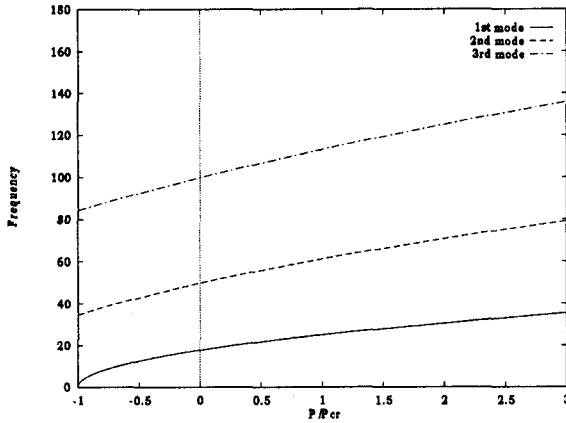


그림 1. 축방향 하중을 받는 점탄성 코어를 가는 단순지지 샌드위치보의 고유진동수 ( $a/h = 30$ ).

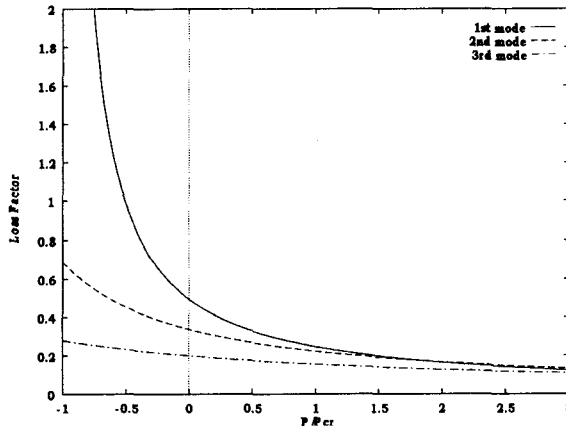


그림 2. 축방향 하중을 받는 점탄성 코어를 가는 단순지지 샌드위치보의 감쇠계수 ( $a/h = 30$ ).

그림 3 과 4 는 단면비가 30 일때의 점탄성 코어를 가는 외팔지지 샌드위치 보의 고유진동수와 감쇠계수를 보여 주는데 인장응력이 증가함에 따라 고유진동수는 증가하고 감쇠계수는 감소한다. 압축응력이 작용

할 경우에는 고유진동수는 감소하고 감쇠계수는 증가하는데 1 차 고유진동수는 압축하중이 53N 일때 0 가 되고 감쇠계수는 무한대가 된다.

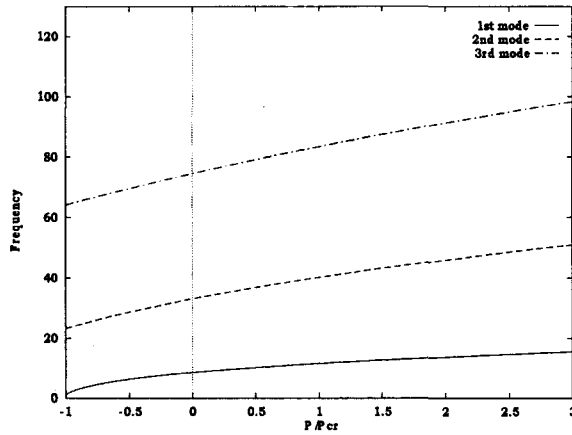


그림 3. 축방향 하중을 받는 점탄성 코어를 갖는 외팔지지 샌드위치보의 고유진동수 ( $a/h = 30$ ).

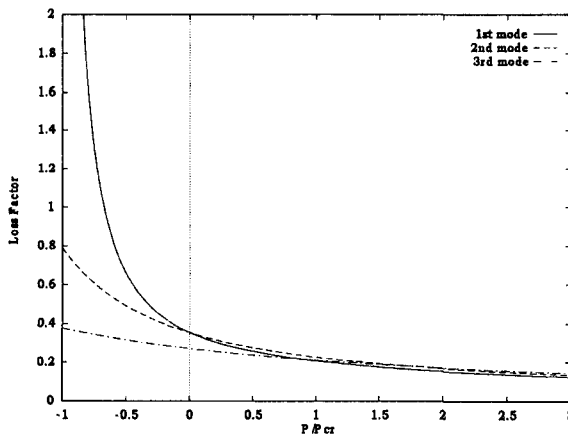


그림 4. 축방향 하중을 받는 점탄성 코어를 갖는 외팔지지 샌드위치보의 감쇠계수 ( $a/h = 30$ ).

#### 4. 결론

3 차 지그재그이론과 지배방정식을 이용한 기하학적 상관기법을 이용하여 고차 전단변위를 제거한 2 절 점 보 요소를 개발하여 축방향 인장및 압축하중을 받는 점탄성 코어를 갖는 샌드위치 보의 자유진동을 해석 하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였다. 인장하중이 작용할때 고유진동수는 증가하고 감쇠계수는 감소 한다. 압축하중이 작용할때 고유진동수는 감소하고 감쇠계수는 증가하는데 진동수가 0 가되는 압축하중을 좌굴하중으로 정의한다.

## 참고문헌

1. R. A. Di Taranto, "Theory of Vibration Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 87, 1965, pp. 881-886.
2. D. J. Mead and S. Markus, "The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10, 1969, pp. 163-175.
3. D. J. Mead and S. Markus, "Loss Factors and Resonant Frequencies of Encastre Damped Sandwich Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, 1970, pp. 99-112.
4. D. J. Mead, "A Comparison of Some Equations for the Flexural Vibration of Damped Sandwich Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 83, 1982, pp. 363-377.
5. R. C. Averill, "Static and Dynamic Response of Moderately Thick Laminated Beams with Damage", *Composite Engineering*, Vol. 4, 1994, pp. 381-395.
6. R. C. Averill and Y. C. Yip, "Development of Simple, Robust Finite Elements Based on Refined Theories for Thick Laminated Beams", *Computers & Structures*, Vol. 59, 1996, pp. 529-546.
7. D. G. Lee and J. B. Kosmatka, "Passively Damped Vibration of Composite Plates with Zig-Zag Elements", The 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, April 3--6, 2000. Paper No. AIAA-2000-1473.