

궤도 설계 동하중 산정을 위한 차량/궤도 상호작용 해석기법 개발

Development of a Numerical Analysis Method of Train/Track Interaction for Evaluation of Dynamic Track Design Load

양 신 추*

Yang, Sin-Chu

ABSTRACT

In this paper, a numerical method for vehicle-track interaction analysis is developed to evaluate vertical dynamic force subjected to rail surface. A vehicle is modelled by lumped masses system and track by multi layered continuous beam system. The equation of motion of vehicle and track interaction system is derived by considering compatibility condition at the contact points between wheel and rail. The input vibration source is given by the empirical formula of power spectral density of track irregularity, which is suggested by FRA. Using this method, dynamic impact factors with the train speed are evaluated.

1. 서론

궤도를 설계할 때 설계하중은 차량의 중량에 의한 축중과 차량과 궤도와의 상호작용에 의한 동하중을 나타내는 충격하중을 고려하여 결정한다. 이때 충격하중은 매우 많은 개소에서 계측된 충격하중을 통계적으로 처리하여 적정 신뢰도 수준을 갖도록 안전율을 고려하여 결정하는데, 이에 대응하는 충격하중은 특정선구에 대한 충격하중이라기 보다는 일반적 궤도에 적용되는 안전하중이라 할 수 있다. 그러나 실제 특정 선구를 대상으로 궤도를 상세설계 하는 경우는 대상선로의 궤도 및 차량운영 조건을 고려하여 설계하중을 비교적 정확히 정할 필요가 있다.

이 연구에서는 도시철도 궤도의 설계시 궤도 및 차량조건과 열차속도를 고려한 수직방향 설계 동하중을 산정하기 위한 차량/궤도 상호작용 해석기법을 제시하였다. 차량을 차체, 대차, 스프링하질을 1,2차 현수장치로 연결된 질점모델로 모형화하였으며, 궤도는 다층 연속보모델로 모형화하여 상호작용을 해석하였다. 진동을 유발하는 기본 가진원을 나타내는 궤도틀림에 대해서는 미국 철도연맹(FRA)에서 제시한 파워스펙트럴덴시티(PSD) 경험식을 사용하였다. 이 연구의 해석기법을 이용하여 열차속도에 따른 충격계수를 구한 후, 이들의 특성을 분석하였다.

2. 차량/궤도 상호작용 운동방정식의 유도

2.1 차륜/레일 상호작용력 계산

윤증을 계산하기 위하여 차량의 운동을 수직방향만 고려할 때 차량/궤도 상호작용에 대한 해석 모형은 그림 1과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{K}_H(\mathbf{y}_w - \mathbf{y}_r - \mathbf{y}_{r/w}) \quad (1)$$

* 양신추 한국철도기술연구원, 책임연구원, 정회원

여기서 \mathbf{y}_r 및 \mathbf{y}_w , $\mathbf{y}_{r/w}$ 는 차륜/접촉점에서의 레일, 차륜, 그리고 차륜/레일의 상대표면조도의 변위벡터들이고, K_H 는 차륜과 레일의 접촉면에서의 헤르쯔안(Hertzian) 스프링상수이다.

차륜/접촉점에서 작용하는 조도하중과 이에 따른 변위와의 관계를 나타내는 어드미턴스(Admittance)의 정의로부터 차륜 및 레일변위는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}_w \mathbf{F}_H = -\mathbf{y}_w \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_r \mathbf{F}_H = \mathbf{y}_r \quad (3)$$

여기서 \mathbf{A}_w , \mathbf{A}_r 는 각각 차륜/접촉점에서 차륜 및 레일의 어드미턴스 행렬이다.

식 (1), (2), (3)로부터 상호작용력과 레일/차륜 상대조도와의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽¹⁾.

$$(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_r + 1/K_H \mathbf{I}) \mathbf{F}_H = -\mathbf{y}_{r/w} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{I} 는 4x4 단위행렬이다.

식(4)로부터 상호작용력은 다음과 같이 구할 수 있다.

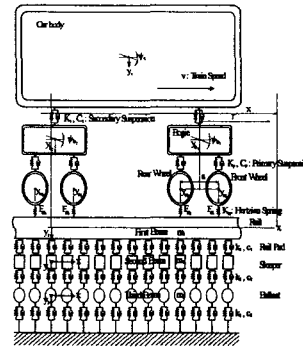


그림 1 방진슬래브 궤도의 연속보 해석모형

$$\mathbf{F}_H = -[\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_r + 1/K_H \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{y}_{r/w} \quad (5)$$

차륜/레일조도와 레일변위와의 관계는 식 (3), (4)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{H}_r(\omega) \mathbf{y}_{r/w} \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{H}_r(\omega)$ 은 단위 차륜/레일 조도에 대한 레일응답을 나타내는 전달함수(Transfer Function) 행렬로서 다음과 같이 나타내진다.

$$\mathbf{H}_r(\omega) = -\mathbf{A}_r [\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_r + 1/K_H \mathbf{I}]^{-1} \quad (7)$$

2.2 레일의 어드미턴스(Admittance) 계산

이동 조화하중(Harmonic excitation)을 받는 자갈도상궤도를 방진슬래브 및 슬래브패드를 제외한 3중보로 모형화할 경우 궤도부분계의 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + k_1^*(y_1 - y_2) &= F_H \delta(x - vt) e^{i\omega t} \\ E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + k_1^*(y_2 - y_1) + k_2^*(y_2 - y_3) &= 0 \\ E_3 I_3 \frac{\partial^4 y_3}{\partial x^4} + m_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} + k_2^*(y_3 - y_2) + k_3^* y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 k_1^* , k_2^* , k_3^* 는 각각 단위길이당 레일패드, 자갈도상 및 하부 구조물 기초의 복소스프링 계수이다.

조화하중에 대한 궤도부분계의 응답은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}(x, t) = \bar{\mathbf{y}}(x) e^{i\omega t} \quad (9)$$

x와 t에 관한 편미분은 상대좌표 $r = x - vt$ 에 대한 편미분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^n \bar{y}}{\partial x^n} = \frac{\partial^n \bar{y}}{\partial r^n} e^{i\alpha t}, \quad \frac{\partial^n \bar{y}}{\partial t^n} = (i\omega - v \frac{\partial}{\partial r})^n \bar{y} e^{i\alpha t} \quad (10)$$

식(9), (10)을 식(8)에 대입하면 운동방정식은 상대좌표 r의 함수로 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \frac{\partial^4 \bar{y}_1}{\partial r^4} + m_1 (i\omega - v \frac{\partial}{\partial r})^2 \bar{y}_1 + k_1^* (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) &= F_H \delta(r) \\ E_2 I_2 \frac{\partial^4 \bar{y}_2}{\partial r^4} + m_2 (i\omega - v \frac{\partial}{\partial r})^2 \bar{y}_2 + k_1^* (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + k_2^* (\bar{y}_2 - \bar{y}_3) &= 0 \\ E_3 I_3 \frac{\partial^4 \bar{y}_3}{\partial r^4} + m_3 (i\omega - v \frac{\partial}{\partial r})^2 \bar{y}_3 + k_2^* (\bar{y}_3 - \bar{y}_2) + k_3^* \bar{y}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)를 s-영역으로 후리에 변환하면 다음과 같이 되고

$$\begin{aligned} E_1 I_1 s^4 \bar{y}_1 - m_1 (\omega - vs)^2 \bar{y}_1 + k_1^* (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) &= F_H \\ E_2 I_2 s^4 \bar{y}_2 - m_2 (\omega - vs)^2 \bar{y}_2 + k_1^* (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + k_2^* (\bar{y}_2 - \bar{y}_3) &= 0 \\ E_3 I_3 s^4 \bar{y}_3 - m_3 (\omega - vs)^2 \bar{y}_3 + k_2^* (\bar{y}_3 - \bar{y}_2) + k_3^* \bar{y}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

다시 식(12)를 각각 $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ 에 대하여 정리하여 행렬형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{SYM} & & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ 는 식(13)의 해를 풀므로써 구할 수 있고, 이들의 후리에 역변환을 Jordan lemma와 유수정리(Residue theorem)를 적용하면 r-영역에서의 응답을 얻을 수 있다.

i 번째 접촉점에서의 단위 조화하중에 대한 j 번째 접촉점 위치에서 레일변위를 나타내는 계도 어드미턴스는 다음 식으로 구할 수 있다.,

$$A_r(i, j) = \bar{y}_{r,j} / F_{H,i} \quad (14)$$

2.4.3 차륜의 어드미턴스(Admittance) 계산

차량의 1, 2차 현가장치(Suspension)와 대차(Bogie) 및 차체의 질량을 고려할 경우 조도로 인한 차량의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} M_t \ddot{y}_t + C_s (2\dot{y}_t - \dot{y}_{b1} - \dot{y}_{b2}) + K_s (2y_t - y_{b1} - y_{b2}) &= 0 \\ I_t \ddot{\theta}_t + C_s d (2d\dot{\theta}_t - \dot{y}_{b1} + \dot{y}_{b2}) + K_s d (2d\theta_t - y_{b1} + y_{b2}) &= 0 \\ M_{b1} \ddot{y}_{b1} + C_s (\dot{y}_{b1} - \dot{y}_t - d\dot{\theta}_t) + C_p (2\dot{y}_{b1} - \dot{y}_{w1} - \dot{y}_{w2}) + K_s (y_{b1} - y_t - d\theta_t) + \\ &K_p (2y_{b1} - y_{w1} - y_{w2}) = 0 \\ I_{b1} \ddot{\theta}_{b1} + C_p a (2a\dot{\theta}_{b1} - \dot{y}_{w1} + \dot{y}_{w2}) + K_p a (2a\theta_{b1} - y_{w1} + y_{w2}) &= 0 \\ M_{b2} \ddot{y}_{b2} + C_s (\dot{y}_{b2} - \dot{y}_t + d\dot{\theta}_t) + C_p (2\dot{y}_{b2} - \dot{y}_{w3} - \dot{y}_{w4}) + K_s (y_{b2} - y_t + d\theta_t) + \\ &K_p (2y_{b2} - y_{w3} - y_{w4}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{b2} \ddot{\theta}_{b2} + C_p a (2a \dot{\theta}_{b2} - \dot{y}_{w3} + \dot{y}_{w4}) + K_p a (2a \theta_{b2} - y_{w3} + y_{w4}) &= 0 \\
M_{w1} \ddot{y}_{w1} + C_p (\dot{y}_{w1} - (\dot{y}_{b1} + a \dot{\theta}_{b1})) + K_p ((y_{w1} - (y_{b1} + a \theta_{b1}))) + K_H y_{w1} &= F_{H1} \\
M_{w2} \ddot{y}_{w2} + C_p (\dot{y}_{w2} - (\dot{y}_{b1} - a \dot{\theta}_{b1})) + K_p ((y_{w2} - (y_{b1} - a \theta_{b1}))) + K_H y_{w2} &= F_{H2} \\
M_{w3} \ddot{y}_{w3} + C_p (\dot{y}_{w3} - (\dot{y}_{b2} + a \dot{\theta}_{b2})) + K_p ((y_{w3} - (y_{b2} + a \theta_{b2}))) + K_H y_{w3} &= F_{H3} \\
M_{w4} \ddot{y}_{w4} + C_p (\dot{y}_{w4} - (\dot{y}_{b2} - a \dot{\theta}_{b2})) + K_p ((y_{w4} - (y_{b2} - a \theta_{b2}))) + K_H y_{w4} &= F_{H4}
\end{aligned} \tag{15}$$

여기서 M_t , M_b 는 차체 및 대차의 질량이며, M_w 는 차축 및 차륜을 포함한 현가 되지 않은 스프링하질량(Unsprung mass)이다. 또한 K_p , K_s 는 1차 및 2차 현가장치의 스프링계수이며, C_p , C_s 는 1차 및 2차 현가장치의 감쇠계수이다.

위의 식들을 Fourier Transform 후에 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_{tb} \\ \bar{\mathbf{y}}_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{F}}_H \end{Bmatrix} \tag{16}$$

여기서 \mathbf{y}_{tb} 는 차량과 보기의 변위벡터이며, \mathbf{y}_w 는 차륜의 변위벡터이고 \mathbf{F}_H 는 차륜에 작용하는 하중이다.

식 (16)으로부터 차륜의 Admittance는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}_w = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12})^{-1} \tag{17}$$

2.4.4 레일의 PSD 응답

동일지점 i 에 대한 궤도틀림 파워스펙트럼을 $S_{r/w}(\omega)$ 라 하면 그림 1에서와 같이 동일 레일상에 있는 두 지점에 대한 교차파워스펙트럼(CPSD; Cross Power Spectrum Density)은 자기상관함수(Autocorrelation Function)의 개념으로부터 아래와 같이 구할 수 있다. 두 지점에 i , j 에 대한 교차상관함수 $R_{r/w_i}(\tau)$ 는 정의로부터

$$R_{r/w_i}(\tau) = E[\bar{y}_{r/w_i}(t) \bar{y}_{r/w_i}(t + \tau)] \tag{18}$$

이고, 동일 레일상의 두 지점에 대한 차륜도달 시간차 $t_{ij} = (x_j - x_i)/v$ 를 고려하면

$$\bar{y}_{r/w_j}(t + \tau) = \bar{y}_{r/w_i}(t + \tau - t_{ij}) \tag{19}$$

이므로, 식 (18)은 다음과 같이 나타나게 된다.

$$R_{r/w_j}(\tau) = E[y_{r/w_i}(t) y_{r/w_i}(t + \tau - t_{ij})] = R_{r/w_i}(\tau - t_{ij}) \tag{20}$$

두 지점에 대한 CPSD는 Wiener-Khintchine 변형으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_{r/w_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{r/w_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_{r/w_i}(\omega) e^{-i\omega t_{ij}} \tag{21}$$

식 (21)으로부터 두 지점에서의 궤도틀림 스펙트럼행렬은 다음과 같이 나타내진다.

$$\mathbf{S}_{r/w}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\omega t_{12}} & e^{-i\omega t_{13}} & e^{-i\omega t_{14}} \\ e^{i\omega t_{12}} & 1 & e^{-i\omega t_{23}} & e^{-i\omega t_{24}} \\ e^{i\omega t_{13}} & e^{i\omega t_{23}} & 1 & e^{-i\omega t_{34}} \\ e^{i\omega t_{14}} & e^{i\omega t_{24}} & e^{i\omega t_{34}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}_{r/w_i}(\omega) \tag{22}$$

레일의 스펙트럼응답은 식 (7)과 식 (22)로부터

$$\mathbf{S}_r(\omega) = [\bar{\mathbf{H}}(\omega)] \mathbf{S}_{r/w}[\mathbf{H}_r(\omega)]^T \tag{23}$$

여기서 $[\bar{\mathbf{H}}_r(\omega)]$ 는 $[\mathbf{H}_r(\omega)]$ 의 공액복소수(Complex Conjugate)이다.

2.4.6 차량의 충격계수 산정

해석에 사용된 차량 및 궤도의 물성치는 표 1 과 같다.

표 1 궤도 및 차량의 물성치

차량물성치 및 제원(편측당)	물성치	궤도물성치 및 제원(편측당)	물성치
차체질량(t)	23.5	레일종류	KS60
차체피칭관성모멘트($t \cdot m^2$)		레일질량(kg/m)	60.8
2차 현가장치 스프링(kN/m)	300.0	레일탄성계수(kN/m ²)	210×10^6
2차 현가장치 댐핑(kN · s/m)	45.0	레일단면적(m ²)	7.75×10^{-3}
대차질량(t)	2.4	레일 휨강성	6.34×10^3
대차피칭관성모멘트($t \cdot m^2$)	1.5	레일패드 강성(kN/m)	6.0×10^4
1차 현가장치 스프링계수(kN/m)	30.0	레일패드 댐핑계수(kN · s/m)	98.0
1차 현가장치 댐핑계수(kN · s/m)	35.0	단위길이당 침목질량(kg)	110
축간거리(m)	2.1	단위길이당 지지강성	103.8×10^3
대차간 거리(m)	13.8	단위길이당 댐핑계수(kN · s/m)	980.0

궤도틀림 PSD는 미국철도연맹(FRA)에서 많은 측정자료를 기초로 제안한 다음 식으로 나타내지는 경험식⁽³⁾을 사용하였다.

$$G_{r/w_1}(\Omega) = \frac{A\Omega_2^2(\Omega^2 + \Omega_1^2)}{\Omega^4(\Omega^2 + \Omega_2^2)} \quad (m^3) \quad (24)$$

여기서 Ω 는 공간주파수이고, A, Ω_1 , 그리고 Ω_2 는 궤도등급에 따라 주어지는 상수로서 표 2와 같다. 공간주파수영역에서 각 등급에 대응하는 궤도틀림 PSD는 그림 2와 같다.

표 2 미국철도연맹에서 제안한 궤도등급별 궤도틀림 PSD를 정의하는데 사용되는 상수들

등급	1	2	3	4	5	6
A($\times 10^{-8} m^3$)	15.53	8.85	4.92	2.75	1.57	0.98
$\Omega_1(\times 10^{-3} m^{-1})$	23.3	23.3	23.3	23.3	23.3	23.3
$\Omega_2(\times 10^{-2} m^{-1})$	13.1	13.1	13.1	13.1	13.1	13.1

각주파수영역에서의 궤도틀림 PSD는 다음 식으로 주어진다.

$$G_{r/w_1}(\omega) = \frac{1}{v} G_{r/w_1}(\Omega = \frac{\omega}{v}) \quad (25)$$

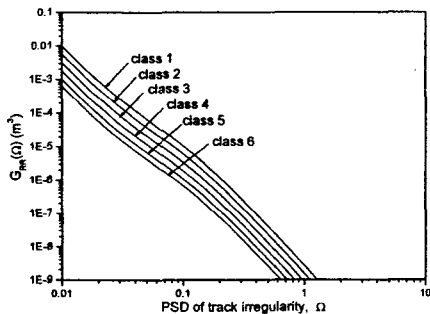


그림 2 FRA에서 제안한 궤도틀림 PSD

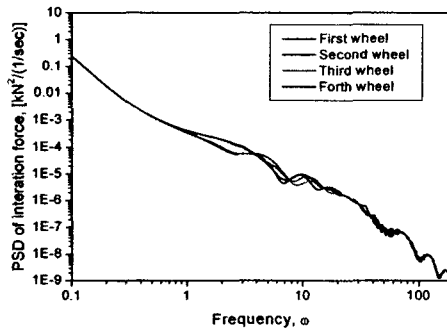


그림 3 차륜/레일 상호작용력 PSD

그림 3은 각 차륜에 대응하는 상호작용력의 PSD를 나타낸 것이다. 이 결과로부터 각 차륜에 대응하는 상호작용력은 주파수의 증가에 따라 기하급수적으로 감소하고, 주파수에 따라 차륜별 상호작용

용력의 크기 차이는 거의 없음을 알 수 있다. 따라서 수직방향 상호작용력을 산정하기 위한 해석 모형은 1 개차륜에 대응하는 직렬 질점모형을 사용해도 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

그림 4는 1등급 궤도의 열차속도에 따른 상호작용력 표준편차를 나타낸 것이며, 그림 5는 3σ에 대응하는 윤증변동율(3σ/P_{st})을 나타낸 것이다. 이들 결과로부터 차륜의 윤증변동율은 열차속도에 따라 2차원 다항식형태로 증가함을 알 수 있다. 또한 이들 결과로부터 궤도상태가 가량 불량한 1 등급 궤도를 기준으로 했을 때 속도충격율은 다음식으로 주어짐을 알 수 있다.

$$Y = 0.0043 v + 3.23663E-5 v^2 \tag{26}$$

여기서 v는 km/h의 열차속도이다.

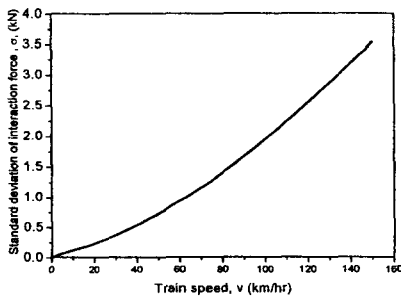


그림 4 차량속도에 따른 상호작용력의 표준편차 (FRA 1등급 궤도)

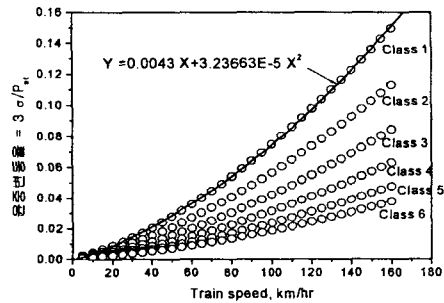


그림 5 차량속도에 따른 윤증변동율

4. 결론

이 연구에서는 도시철도 궤도의 설계시 궤도 및 차량조건과 열차속도를 고려한 수직방향 설계 동하중을 산정하기 위한 차량/궤도 상호작용 해석기법을 제시하였다. 개발된 해석기법은 특정 선구를 대상으로 궤도를 상세설계 하는 경우는 대상선로의 궤도 및 차량운영 조건을 고려한 설계동하중을 결정할 때 잘 활용될 수 있음을 알 수 있었다. 또한 제시된 해석기법은 궤도틀림 PSD를 입력자료로 활용할 수 있도록 주파수영역의 랜덤해석(Random analysis)의 기본이론을 바탕으로 개발되었기 때문에 대상 선로전국간의 궤도틀림을 통계적으로 해석할 수 있는 장점을 갖고 있음을 알 수 있었다. 제안된 해석기법을 사용하여 열차속도에 따른 충격계수를 산정한 결과들로부터 충격계수는 열차속도에 선형적으로 비례하는 일반적 설계공식과는 달리 2차원적으로 비례하는 것을 알 수 있다.

참고문헌

1. 한국고속철도건설공단, "열차주행시 하부구조물에 작용하는 동하중의 산정", 1995.
2. 三浦 重(1995), 軌道構造の動特性モデルの構築, RTRI REPORT Vol.9. No.12
3. L. Fryba, "Dynamics of railway bridges", Thomas Telford press, USA, 1996.