

유클리드 norm에 기반한 최적 비정규 리사이징 알고리즘

L_2 -Norm Based Optimal Nonuniform Resampling

엄지윤, 이학무, 강문기

연세대학교 전기전자공학과

Jiyoon Um, Hak Moo Lee, and Moon Gi Kang

Dept. of Electric and Electronic Engineering, Yonsei Univ.

요약

보간법은 기본적으로 원래의 영상을 연속적인 함수 모형으로 나타내고 이 함수로부터 다시 샘플링을 하여 원하는 영상을 얻는 방식으로 접근한다. 본 논문에서는 다른 연속 함수 모형보다 진동이 적고 필터 계수가 적은 $B-spline$ 함수를 사용한다. 본 논문의 최적 보간 방법은 원래의 신호와 얻고자 하는 신호를 각각 spline함수로 나타내고, 이 둘의 차이가 가장 작은 것을 선택하는 것이다. 그러기 위해서는 여러 개의 $spline$ 계수 중에서 원래 신호와 의 L_2-norm 이 가장 작은 것을 선택해야 한다. 이러한 최적 보간법을 일반화하기 위해서 $spline$ 함수로 표현된 신호를 다시 샘플링하여 신호를 얻고, 그 신호를 공간에 따라 변화하는 $spline$ 함수의 합으로 나타낸다. 그리고 이렇게 나타낸 함수들 중에서 원래의 함수와 가장 가까운 것을 선택하도록 함으로써 일반화될 수 있다. 이러한 최적화된 비정규점 리사이징 알고리즘은 다른 알고리즘에 비해서 더 적은 오차를 나타냄을 확인할 수 있다.

I. 서론

리사이징은 영상의 크기를 늘이고 줄이거나 영상왜곡을 보정하는 등 영상처리 분야에서 필요하다. 기본적으로 연속된 모델 중 가장 많이 이용되어 온 것 중 하나는 Shannon의 표본화 이론의 sinc 함수이다 [1]. 그러나, sinc에 기반한 함수의 여러 가지 문제점이 있으므로 sinc에 기반한 함수보다 수학적으로 다루기 쉬운 다항식[2]에 기반한 함수, 그중에 $B-spline$ 함수가 연속된 모델에 많이 이용되기 시작했다. 다항 $spline$ 알고리즘의 성능은 정해진 n 차의 연

속 모델이 원래 다항식을 얼마나 정확하게 표현할 수 있는지가 관건이다[3][4]. 높은 차수의 모델이 낮은 차수의 모델에 비해 영상 리사이징에서 잘 작용하지만 그것은 정보 손실을 최소화하지 않으므로 최적의 결과를 보이지 않는다. 최근에, Unser 등[5] 같은 $spline$ 함수를 이용하면서 리사이징 전에 연속적인 전필터를 통괄키는 방법을 고안하였다. 위 논문에서는 원영상에 리사이징된 영상을 직교 투사하여 최소 제곱적으로 최적의 영상을 구한다. 그러나 위 방법은 높은 차수의 $spline$ 의 최적 필터를 정확히 구현하기가 어렵고, 리샘플링되는 점들

간의 공간이 일정하다는데 있다. 그리하여 기하학적 변환이나 비정규적인 간격의 고해상도 영상의 복원의 리사이징에 응용할 수 없다.

본 논문에서는 선형 변환에 근거를 둔 이전의 최적 리사이징을, 비선형으로 변환된 영상을 원래의 샘플링 공간으로 직교 투사 시킴으로써 비선형 변환에 근거를 둔 최적 리사이징으로 확장한다. 이를 통해 기존의 리사이징 방법으로는 접근할 수 없었던 응용 분야로까지 확장 가능성을 볼 수 있다.

II. 다항 spline 함수

1. spline 다항식 공간

최적 리사이징을 식으로 나타낼 때, 신호는 스플라인 다항식으로 나타낼 수 있다. 이 함수는 평활화 조건을 갖는 n 차의 구간 다항식이며 다항식과 다항식의 $(n-1)$ 차까지의 미분식은 연속적이어야 한다. spline 함수 공간 S_1^n 은 다음과 같이 정의된다[6].

$$S_1^n = \{s^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\beta^n(x-k) : c \in l_2\} \quad (1)$$

여기 $\beta^n(x)$ 는 대칭적인 n 차 spline 다항식이고 l_2 는 이차 이산 벡터 공간이다. 데이터의 값을 위와 같은 모델로 표현하려면 이산 신호 $\{s(k)\}_{k \in Z}$ 를 보간할 $s^n(x)$ 의 B -spline 계수를 구해야 한다. 식(1)을 초기 비율로 리샘플링한 데이터열을 $s(k')$ 라고 한다면, $s(k')$ 는 계수와 이산 spline의 이산 컨벌루션과 같은 연산으로 표현될 수 있다.

$$s(k') = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)\beta_n(k'-k) \quad (2)$$

여기서 k 는 $k=0, 1, \dots, N-1$ 이며 N

은 주어진 데이터열의 개수이다. 이 식은 다음과 같은 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$s_1 = B_1 c_1 \quad (3)$$

여기서,

$$B_1 = \begin{bmatrix} \beta^n(0) & \beta^n(1) & \dots & \beta^n(N-1) \\ \beta^n(1) & \beta^n(0) & \dots & \beta^n(N-2) \\ \beta^n(2) & \beta^n(1) & \dots & \beta^n(N-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^n(N-1) & \beta^n(N-2) & \dots & \beta^n(0) \end{bmatrix}$$

$$s_1 = [s(0) \ s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N-1)]^T$$

$$c_1 = [c(0) \ c(1) \ c(2) \ \dots \ c(N-1)]^T \quad (4)$$

행렬 B_1 은 Toeplitz 행렬이며 정방 행렬이므로 계수는 다음식에 의해 간단히 구할 수 있다.

$$c_1 = B_1^{-1} s_1 \quad (5)$$

행렬 B_1 의 구조적인 특성에 의해 Levinson 알고리즘과 같이 빠른 알고리즘을 이용해 역행렬 B_1^{-1} 을 훨씬 빠르게 계산할 수 있다.

spline 다항식의 일반화된 근사화를 위해 샘플링률이 변환함수 $r(x)$ 에 의존하는 비정규 샘플링이 가능한 일반화된 spline 다항식을 다음과 같이 정의한다.

$$S_r^n = \{s_r^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k)\beta^n(r(x)-k) : c_r(k) \in l_2\} \quad (6)$$

2. 힐버트 공간에서의 근사화 문제

벡터 해석의 측면에서 볼때, 신호 $s(x)$ 를 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{i=1}^m c_i p_i(x) + e(x) \\
&= \hat{s}(x) + e(x)
\end{aligned}
\tag{7}$$

위의 식은 $\|e(x)\| = \|s(x) - \hat{s}(x)\|$ 을 최소화하며, $p_i(x)$ 는 함수 공간의 기저 함수 중 하나이고, c_i 는 그에 해당되는 계수이다. 근사 오류 $\|e(x)\|$ 를 나타내는 norm을 내적으로부터 유도된다면, 직교 조건으로 최소화를 만족시킬 수 있다. 최소 norm 오류는 각 벡터 p_j 에 직교해야 한다.

$$\left\langle s(x) - \sum_{i=1}^m c_i p_i(x), p_j(x) \right\rangle = 0
\tag{8}$$

여기서 j 는 $j=1, 2, \dots, m$ 이며, 이 식으로부터 다음의 m 개의 변수를 가진 m 개의 식을 유도할 수 있다.

$$Rc = p
\tag{9}$$

여기서 각 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$R = \begin{bmatrix} \langle p_1(x), p_1(x) \rangle & \cdots & \langle p_m(x), p_1(x) \rangle \\ \langle p_1(x), p_2(x) \rangle & \cdots & \langle p_m(x), p_2(x) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle p_1(x), p_m(x) \rangle & \cdots & \langle p_m(x), p_m(x) \rangle \end{bmatrix}$$

$$p = [\langle s(x), p_1(x) \rangle \cdots \langle s(x), p_m(x) \rangle]^T$$

$$c = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m]^T
\tag{10}$$

식(10)의 행렬 R 은 그레미안 행렬이라고 하며 그에 관한 이론은 다음과 같다.

Theorem 2.1 그레미안 행렬 R 은 항상 반양정의이며, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ 이 선형적으로 독립적일 때 양정의이다.

최적 비정규 리사이징 알고리즘을 위한 행렬 R 의 역행렬이 존재함을 III장에서 증명하게 된다.

III. 최적 비정규 리사이징 알고리즘

1. 최적 계수 구하기

우리가 구하는 샘플링점은 변환함수 $r(x)$ 에 의존하는 비정규 샘플링에 의해 구해지므로, 다음과 같은 가변 구간 길이 $r^{-1}(k)$ 를 갖는 n 차의 spline 공간을 정의할 수 있다.

$$S_r^n = \{s_r^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k) \beta^n(r(x)-k) : c_r(k) \in L_2\}
\tag{11}$$

L_2 공간에서 최소의 오류 근사값을 갖는 $s_r^n(x) \in S_r^n$ 을 찾으려면 패러미터 $c_r(k)$ 에 의한 오류 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
e(c_r(k)) &= |s_1(x) - s_r(x)|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1(k) \beta^n(x-k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k) \beta^n(r(x)-k) \right)^2 dx
\end{aligned}
\tag{12}$$

최적의 계수를 얻기 위해서는 최소 제곱법을 사용한다[6].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(c_r(k))}{\partial c_r(n)} &= \int_x^x (2 \sum_{k=-x}^x c_r(k) \beta^n(r(x)-k)) (\beta^n(r(x)-n)) \\
&\quad - 2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1(k) \beta^n(x-k) \right) \beta^n(r(x)-n) dx = 0
\end{aligned}$$

이는 선형 표현식이므로 이산합과 적분의

순서를 바꿀 수 있으며 $c_1(k)$ 와 $c_r(k)$ 의 샘플 개수를 N 개와 N'' 로 제한하면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^{N''-1} c_r(k) \int_{-\infty}^{\infty} \beta^n(r(x)-k) \beta^n(r(x)-m) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N''-1} c_1(k) \beta^n(x-k) \right) \beta^n(r(x)-m) dx \quad (13)$$

최적 변환된 계수는 다음의 행렬식으로부터 얻을 수 있다.

$$K_r = A_r c_r \quad (14)$$

여기서

$$A_r = \begin{bmatrix} a(0,0) & \cdots & a(0, N''-1) \\ a(1,0) & \cdots & a(1, N''-1) \\ a(2,0) & \cdots & a(2, N''-1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(N''-1,0) & \cdots & a(N''-1, N''-1) \end{bmatrix}$$

$$c_r = [c_r(0) \quad c_r(1) \quad \cdots \quad c_r(N''-1)]^T$$

$$K_r = [K_r(0) \quad K_r(1) \quad \cdots \quad K_r(N''-1)]^T \quad (15)$$

이고 여기서,

$$a(n,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^3(r(x)-k) \beta^3(r(x)-n) dx$$

$$K_r(n) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^3(x) \beta^3(r(x)-n) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \beta^3(x-k) \right) \beta^3(r(x)-n) dx$$

이다. 위의 식은 표기의 편의를 위하여 *spline*의 차수를 3으로 한 것이다. Theorem 2.1로부터, 변환함수에 의한 공간 S_r^n 의 기저 함수는 선형적으로 독립적이므로 행렬 A_r 은 역행렬이 존재한다. 따라서, 다음과 같이 최적 *spline* 근사의 계수를 구할 수 있다.

$$C_r = A_r^{-1} K_r$$

(16)

이러한 개념은 2차원으로 쉽게 확장될 수

있다. 주어진 공간 $S_1^n(2D)$ 에서의 신호

$s_1(x,y)$ 의 최적 근사를 구하려면, 위에서 언급한 것과 같은 비슷한 선형식을 통해 계

수 $c_{r_x, r_y}(x_k, y_k)$ 를 결정할 수 있다.

2. 알고리즘의 구현

지금까지의 과정은 카디널(cardinal) *spline* 표현에 의해 구현될 수 있다. 제안된 전체 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 주어진 샘플값 $s_1(k)$ 을 직접 *B-spline* 변환식인 Eq.(5)에 대입해 *B-spline* 계수 $c_1(k)$ 를 구한다.
- 2) Eq.(16)에 따라서 최적 비정규 리사이징을 수행한다.
- 3) 최적 *spline* 근사의 계수를 Eq.(3)과 비슷한 간접 *B-spline* 변환으로 최적의 샘플값으로 변환한다.

IV. 최적 비정규 리사이징의 응용분야

1. 로그함수에 의한 영상의 변환

이 알고리즘은 로그 함수에 의해 결정된 비정규 리사이징 샘플값에 적용될 수 있다. 다음과 같은 로그 함수에 대해 고려해 보면

$$r_x(x,y) = 100 \log(7x+200)$$

$$r_y(x,y) = 100 \log(7y+200)$$

(17)

그리고 역변환은 다음과 같다.

$$r_x^{-1}(x,y) = 0.005 \left(\exp\left(\frac{x}{100}\right) - 200 \right)$$

$$r_y^{-1}(x,y) = 0.005 \left(\exp\left(\frac{y}{100}\right) - 200 \right)$$

(18)

Fig.1는 이 경우에 본 논문의 알고리즘을 적용했을 때의 결과를 나타낸다.

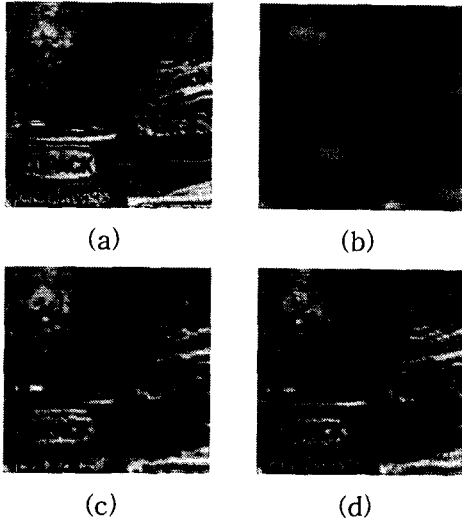


Fig 1. 10번의 연속적인 변환과 역변환을 적용한 쇼펩 영상

- (a) 원 영상 (b) 선형보간법을 이용한 영상
 (c) 3차 *spline* 리사이징을 이용한 영상 (d) 비정규 3차(cubic) *spline* 리사이징 이용한 영상

2. 카메라 모델링에 의한 영상의 변환

바늘구멍(pinhole) 모델은 가장 널리 사용되는 카메라 모델이다[8]. 렌즈의 초점 거리를 λ , (x, y, z) 와 (X, Y, Z) 은 각각 카메라와 사물의 좌표 시스템을 나타낼 때, 3D 점을 2차원의 영상 평면으로 투영시키는 연산은 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \\ \frac{\lambda Y}{\lambda - Z} \\ \frac{\lambda Z}{\lambda - Z} \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서 우리는 두 좌표 시스템이 서로 맞추어져 있지 않은 일반적인 문제를 고려하였다. 카메라는 θ 의 패닝(panning)과 α 의 기울기(tilting)가 가능한 받침 위에 올려져 있다고 가정하자. 패닝은 x 와 X 축이 이루는 각도이며, 기울기는 z 와 Z 축이 이루는

각도이다. (X_0, Y_0, Z_0) 는 사물 좌표의 중심으로부터 받침대의 중심까지의 거리를 나타낸다. 이 패러미터 값들로부터, 변환 함수는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다

$$\begin{aligned} x &= \lambda \frac{A(X - X_0) + B(Y - Y_0) + C(Z - Z_0)}{\lambda - (I(X - X_0) + J(Y - Y_0) + K(Z - Z_0))} \\ y &= \lambda \frac{E(X - X_0) + F(Y - Y_0) + G(Z - Z_0)}{\lambda - (I(X - X_0) + J(Y - Y_0) + K(Z - Z_0))} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 변수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A &= \cos\theta - \sin\theta\sin\alpha, & B &= \sin\theta + \cos\theta\sin\alpha, \\ C &= -\cos\alpha, & E &= -\sin\theta\cos\alpha, & F &= \cos\theta\cos\alpha, \\ G &= \sin\alpha, & I &= \cos\theta + \sin\theta\sin\alpha, \\ J &= \sin\theta - \cos\theta\sin\alpha, & K &= \cos\alpha \end{aligned}$$

이러한 변환으로부터, x 와 y 는 원래 영역에서의 변수이며, $r_x(x, y)$ 와 $r_y(x, y)$ 는 2차원 변환 함수일 때, 다음과 같이 카메라 모델링의 2차원 변환식을 이끌어 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} r_x(x, y) &= \lambda \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0)}{\lambda - (I(x - x_0) + J(y - y_0))} \\ r_y(x, y) &= \lambda \frac{E(x - x_0) + F(y - y_0)}{\lambda - (I(x - x_0) + J(y - y_0))} \end{aligned} \quad (21)$$

이 응용분야에서는 두 좌표 사이의 변환식이 비선형이므로 변환하였을 때 데이터 값들이 비정규적으로 분포하게 된다. 따라서 이러한 응용 분야에 제한한 알고리즘을 적용할 수 있다. Fig. 2은 Eq.(21)에 의해 결정된 변환된 결과 영상을 보여주고 있다.

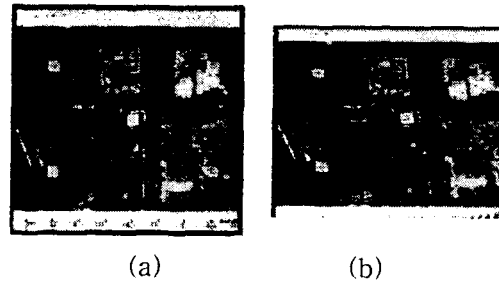


Fig.2. (a) 원래의 항공 사진 (b) 카메라 모

델링에 의해 변환된 영상

V. 결론

본 논문에서는 B -spline 모델링을 기반으로 원영상과 리사이징된 영상과의 차이에러를 최소화할 수 있는 최적 비정규 알고리즘을 제안하였다. 먼저, 정규적으로 분포되어 있는 샘플값으로부터 비정규 분포된 정보를 이용한 연속 함수를 정의하였다. 다음으로, 이 연속 함수는 변환된 스플라인의 기저 함수로부터 형성된 변환 함수 공간으로 투사된다. 이 알고리즘은 정규 최적 리샘플링 알고리즘과 비슷하나, 단 본 알고리즘은 변환 함수 $r(x)$ 에 의존하는 수정된 샘플값을 이용한다는 점에서 다르다. 따라서 정규 최적 리샘플링 알고리즘은 비정규 최적 리샘플링 알고리즘의 특별한 경우로 볼 수 있다. 이는 기존의 정수 단위 위주로만 리사이징되는 알고리즘의 한계를 극복하여 비정규적인 리사이징이 필요한 변환을 이용하여 여러 응용분야에 유용하다.

VI. 참고문헌

- [1] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. I.R.E.*, vol. 37, pp. 10--21, 1949.
- [2] Michael Unser, "Splines : A Perfect Fit for Signal and Image Processing", *IEEE Signal Processing magazine*, November 1999, Vol. 16, No. 6
- [3] F. Strang, and G. Fix, *Constructive Aspect of Functional Analysis*, Rome, Italy: Edizioni Cremonese, 1971.
- [4] C. de boor, *Computation of Curves and Surfaces*, Boston MA: Kluwer, 1990.
- [5] Michael Unser, Akram Aldroubi, and Murray Eden, "Enlargement or Reduction of Digital Images with Minimum Loss of

Information", *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 3, pp. 247--258, March 1995.

[6] I. J. Schoenberg, "Cardinal Interpolation and Spline Functions", *J. Approximation of Theory*, vol. 2, pp. 167--206, 1969.

[7] Todd K. Moon and Wynn C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms*, NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1999.

[8] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods, *Digital Image Processing*, Addison-Wesley, 1993.