Rational function interpolation 을 이용한 높은 Deborah 수 유동 해석

권영돈, 김시조*
성균관대학교 응용화학부
안동대학교 기계공학부*

High Deborah Number Flow Modeling with the Implementation of Rational Function Interpolation

Youngdon Kwon, See Jo Kim*
School of Applied Chemistry and Chemical Engineering, Sungkyunkwan University
Department of Mechanical Engineering, Andong National University*

서론

점탄성 유동의 고전적 문제로 여겨지는 정상상태 4:1 평면 축소관 유동의 유한요소법 해석을 다룬다. 이 문제는 현재까지 해결되지 않은 점탄성 유동해석의 대표적 문제로 볼 수 있다.

4:1 축소관 유동해석에서는 일반적으로 유한요소법 mesh 가 세밀해질수록 계산과정의 불안정성이 증대되어 도달될수 있는 유동속도(여기서는 Deborah 수)의 한계값이 현저하게 감소된다. 이러한 현상은 일반 수치해석의 결과와는 상반되는 현상으로 점탄성 유동현상의 수치모사에서 가장 큰 문제점으로 여겨지고 있다. 본 연구에서는 먼저 수학적 그리고 열역학적 일치성을 갖는 점탄성 구성방정식을 지배방정식으로 선택하며, 또한 rational function interpolation 을 이용한 새로운 수치해석 알고리즘을 제시하여 위의 문제를 해결하고자 한다.

이론

점탄성 유체의 역학적 성질을 기술하기 위한 구성방정식으로 Leonov 모델을 선택하였으며, 운동방정식, 연속방정식과 함께 다음과 같이 표현된다.

$$\overset{\nabla}{\mathbf{c}}+\frac{1}{2\theta}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^m\left(\mathbf{c}^2+\frac{I_2-I_1}{3}\mathbf{c}-\boldsymbol{\delta}\right)=\underline{\underline{0}},\quad \boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{\delta}+2\eta_0 s\mathbf{e}+(1-s)G\left(\frac{I_1}{3}\right)^n\mathbf{c},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0,\qquad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot \tag{1}$$

위에서 c는 탄성변형률, θ는 완화시간, δ는 unit tensor, σ는 응력, p는 압력, η_0 는 영전단률 점도, s는 retardation parameter, e는 변형률 속도 텐서, G는 전단 탄성계수, v는 속도, ρ은 밀도, I_1과 I_2는 c의 first와 second invariant이다. Leonov 모델은 이전 연구에 의하여 Hadamard 안정성과 소산안정성의 두 가지 조건을 모두 만족시키며, 또한 실험치와의 일치성도 우수한 유일한 점탄성 구성방정식이라 할 수 있다.

유동해석을 위한 기본 알고리즘으로 SU (streamline upwinding)와 DEVSS (discrete elastic viscous stress splitting)을 적용하였다. 또한 높은 Deborah수 유동에서 수치적으로 안정한 계산을 위하여 다음의 rational function interpolation을 제시한다.

$$\mu_1(z) = -\frac{1}{2}z(1-z)\frac{1-b}{1+bz}, \quad \mu_2(z) = (1-z)(1+z)\frac{1}{1-b^2z^2}, \quad \mu_3(z) = \frac{1}{2}z(1+z)\frac{1-b}{1-bz}, \tag{3}$$

위의 새로운 interpolation function에는 -1에서 1사이의 범위를 갖는 parameter b가 있다. 이 parameter는 계산의 안정성을 위한 최적의 값으로 정하여진다. 또한 b=0일때 위의 interpolation function은 일반 quadratic function으로 바뀐다. (3)식에서 보여지는 1차원 interpolation function을 삼각형과 사각형 유한요소에 맞도록 2차원으로 확장하여 사용한다.

결과 및 고찰

본 계산에서 사용한 mesh중 1가지가 Fig.1에 보여진다. 그림에서 회색조로 표현된 영역이 rational interpolation이 사용된 element를 나타낸다. 점탄성 유동에서 stress가 무한대의 값으로 발산하는 것으로 알려진 축소관의 모서리 부분에 rational function interpolation을 부여하였다. Fig.2에 rational interpolation이 사용되지 않았을 때 얻어진 가장 높은 유동속도에서의 streamline이 보여진다. 한계 Deborah수는 40이며, 본 mesh 조건에서 현재의 수준으로 얻어질 수 있는 가장 높은 수의 유동속도에 해당된다고 할 수 있다. Fig.3는 해당 mesh element에 c tensor에 대해서만 rational interpolation을 적용하였을 때 얻을 수 있는 최대 유동속도에서의 streamline이다. 이때 Deborah수는 207로 한계 유속이 5배로 증가되어 수치해석 알고리즘의 안정성이 현저히 증가된 것을 알 수 있다. 수학적 안정성 분석에 의하면 c tensor의 positive definiteness가 Hadamard 안정성의 필요조건으로 증명되었다. 본 연구에서 제시된 알고리즘을 이 필요조건의 충족여부와 비교하였을 때 rational interpolation에 의한 수치연산의 안정성 증대의 이유를 밝힐 수 있다. 이러한 결과에 의하여 rational function은 stress가 singularity를 갖는 contraction corner에서 수치적 안정성의 파괴 없이 높은 solution의 gradient를 적절히 표현하는 것으로 해석된다.

여기에서 제시된 알고리즘은 원칙적으로 어떠한 유동 구조나 조건에도 적용될 수 있는 기법으로 일반성이 있으나, rational function interpolation의 대상이 되는 element의 선정, parameter b값의 결정, 그리고 알고리즘의 수학적 타당성 증명 등 해결되지 않은 부분이 많이 남아있다.

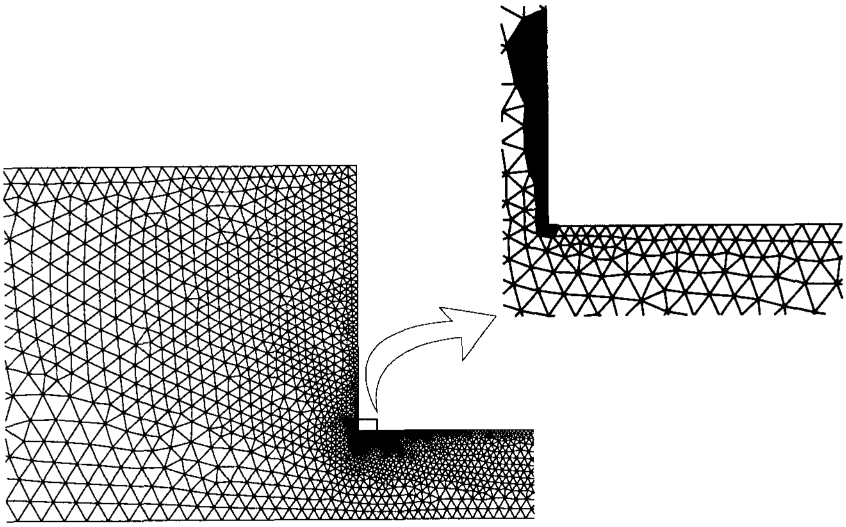

Fig.1. Detailed view of the mesh and elements (▲) with rational interpolation functions around the contraction.

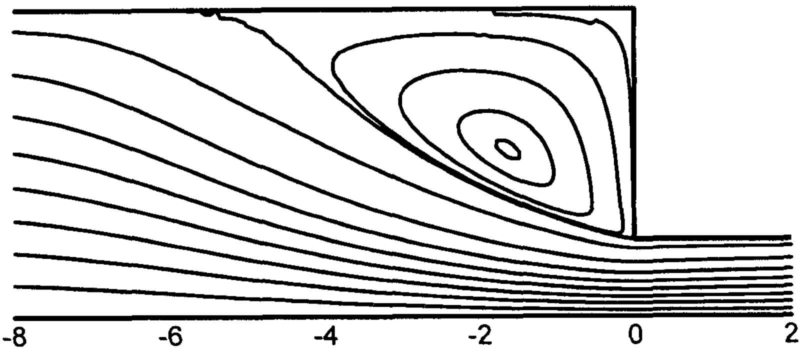

Fig.8.Streamlines of the highest Deborah number flow obtained with the conventional quadratic interpolation; *De*=40.

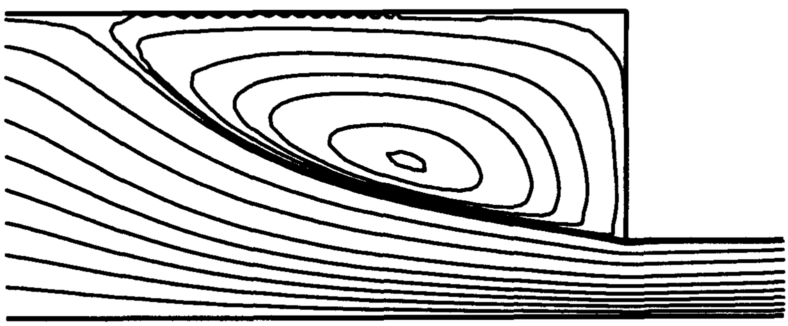

Fig.11.Streamlines of the highest Deborah number flow obtained with rational interpolation; *De*=207.