

박벽 곡선보의 엄밀한 탄성요소강도행렬 Exact Elastic Element Stiffness Matrix of Thin-Walled Curved Beam

김남일* 윤희택** 이병주*** 김문영****
Kim, Nam-Il Yun, Hee-Taek Lee, Byoung-Ju Kim, Moon-Young

ABSTRACT

Derivation procedures of exact elastic element stiffness matrix of thin-walled curved beams are rigorously presented for the static analysis. An exact elastic element stiffness matrix is established from governing equations for a uniform curved beam element with nonsymmetric thin-walled cross section. First this numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. Thus, the displacement functions of displacement parameters are exactly derived and finally exact stiffness matrices are determined using member force-displacement relationships. The displacement and normal stress of the section are evaluated and compared with thin-walled straight and curved beam element or results of the analysis using shell elements for the thin-walled curved beam structure in order to demonstrate the validity of this study.

1. 서론

박벽보 구조의 좌굴해석을 위한 엄밀한 정적강도행렬유도에 관한 연구는 Leung¹⁾ 및 Banerjee와 Williams²⁾ 그리고 Willamas 와 Wittrick³⁾ 등에 의하여 이루어 졌으며 최근 김등^{4,5)}은 박벽 직선보 구조의 동적 및 정적강도행렬을 엄밀히 산정하는 방법을 제시하였다. 본 연구에서는 비대칭단면을 갖는 박벽 곡선보 요소의 응력해석을 수행하기 위하여, 평형방정식과 힘-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 탄성강도행렬을 수치적으로 산정하는 기법을 제시한다. 고차의 연립미분방정식을 1차 연립미분방정식으로 변환할 때 14개의 변위파라미터를 적절히 도입하고 이 파라미터중에서 적분가능한 4개의 변위를 미리 적분하고 나머지 10개의 변위에 대한 비제차 1계 연립미분방정식을 얻는다. 이 미분방정식의 일반해를 구하는 과정에서 미정계수법을 적용하고 복소수영역에서 비대칭행렬을 갖는 선형 고유치문제의 해를 산정한다. 이렇게 얻은 엄밀한 처짐함수에 대한 일반해를 절점변위에 대한 처짐함수로 표시하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 탄성강도행렬을 산정한다. 본 방법의 타당성을 보이기 위하여 비대칭 박벽 곡선보의 변위 및 단면의

* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정
** 한국철도기술연구원 선임연구원
*** 한국도로공사 기술연구소 책임연구원
**** 성균관대학교 토목환경공학과 교수

수직응력을 계산하고 3차의 Hermitian 다항식을 사용한 직선보와 곡선보요소 그리고 Sap2000의 쉘요소에 의한 해석결과와 비교한다.

2. 박벽 곡선보 요소의 탄성강도행렬

2.1 박벽 곡선보의 평형방정식과 힘-변위 관계식

평형조건을 고려하는 경우에, 비대칭 단면을 가진 박벽 곡선보에 대한 평형방정식과 힘-변위 관계식은 다음과 같다.

$$-EA \left(U_x'' + \frac{1}{R} U_z' \right) = 0 \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} & E\hat{I}_3 \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) + \frac{1}{R} E\hat{I}_\phi \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) - \frac{1}{R} GJ \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\ & + \frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) + E\hat{I}_{3\phi} \left\{ \frac{1}{R} \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) + \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) \right\} \\ & + E\hat{I}_{23} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) = 0 \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} EA \left(U_x' + \frac{1}{R} U_z \right) + E\hat{I}_2 \left\{ \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) + \frac{1}{R^2} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) \right\} \\ & E\hat{I}_{2\phi} \left\{ \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) + \frac{1}{R^2} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right\} + E\hat{I}_{23} \left\{ \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1c)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R} E\hat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + E\hat{I}_\phi \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) - GJ \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\ & + E\hat{I}_{2\phi} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) + E\hat{I}_{3\phi} \left\{ \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) - \frac{1}{R} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right\} \\ & - \frac{1}{R} E\hat{I}_{23} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) = 0 \end{aligned} \quad (1d)$$

그리고

$$\begin{aligned} F_1 = & EA \left(U_x' + \frac{1}{R} U_z \right) + \frac{1}{R} E\hat{I}_2 \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) + \frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\ & + \frac{1}{R} E\hat{I}_{23} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & -E\hat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) - \frac{1}{R} E\hat{I}_\phi \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) + \frac{1}{R} GJ \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\ & - \frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) - E\hat{I}_{3\phi} \left\{ \frac{1}{R} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right\} \\ & - E\hat{I}_{23} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) \end{aligned} \quad (2b)$$

$$F_3 = -E\hat{I}_2 \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) - E\hat{I}_{2\phi} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) - E\hat{I}_{23} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \quad (2c)$$

$$M_1 = -E\widehat{I}_\phi\left(\theta''' + \frac{1}{R}U_y'''\right) + GJ\left(\theta + \frac{1}{R}U_y'\right) - E\widehat{I}_{2\phi}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z'\right) - E\widehat{I}_{3\phi}\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) \quad (2d)$$

$$M_2 = E\widehat{I}_2\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) + E\widehat{I}_{2\phi}\left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right) + E\widehat{I}_{23}\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) \quad (2e)$$

$$M_3 = E\widehat{I}_3\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) + E\widehat{I}_{3\phi}\left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right) + E\widehat{I}_{23}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) \quad (2f)$$

$$M_\phi = E\widehat{I}_\phi\left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right) + E\widehat{I}_{2\phi}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) + E\widehat{I}_{3\phi}\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) \quad (2g)$$

2.2 평형방정식의 변환

탄성해석을 위한 비대칭 박벽 곡선보요소의 평형방정식의 엄밀해를 구하는데, 14개의 연립 미분방정식으로 변환하고, 이에 대한 고유치문제의 해를 구할때 4개의 '영'의 값을 갖는 고유치가 발생하기 때문에 이러한 영의 값을 갖는 고유치를 제거하기 위해서는 해당하는 평형방정식을 미리 적분하는 것이 필요하다. 식(1a)과 (1b)를 적분한 결과는 다음과 같다.

$$U_x' + \frac{1}{R}U_z = a_2 \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} & E\widehat{I}_3\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) + \frac{1}{R}E\widehat{I}_\phi\left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right) - \frac{1}{R}GJ\left(\theta + \frac{1}{R}U_y\right) \\ & + \frac{1}{R}E\widehat{I}_{2\phi}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) + E\widehat{I}_{3\phi}\left\{\frac{1}{R}\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) + \left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right)\right\} \\ & + E\widehat{I}_{23}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) = a_5 + a_6x \end{aligned} \quad (3b)$$

또한 다음과 같이 14개의 변위 파라미터로 구성되는 변위벡터를 정의한다.

$$d_1 = U_x, \quad d_2 = U_x' + \frac{1}{R}U_z, \quad d_3 = U_y, \quad d_4 = U_y',$$

$$\begin{aligned} d_5 = & E\widehat{I}_3\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) + \frac{1}{R}E\widehat{I}_\phi\left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right) - \frac{1}{R}GJ\left(\theta + \frac{1}{R}U_y\right) \\ & + \frac{1}{R}E\widehat{I}_{2\phi}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) + E\widehat{I}_{3\phi}\left\{\frac{1}{R}\left(U_y'' - \frac{1}{R}\theta\right) + \left(\theta' + \frac{1}{R}U_y''\right)\right\} \\ & + E\widehat{I}_{23}\left(U_z'' + \frac{1}{R^2}U_z\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_6 = & E\widehat{I}_3\left(U_y''' - \frac{1}{R}\theta'\right) + \frac{1}{R}E\widehat{I}_\phi\left(\theta'' + \frac{1}{R}U_y'''\right) - \frac{1}{R}GJ\left(\theta' + \frac{1}{R}U_y'\right) \\ & + \frac{1}{R}E\widehat{I}_{2\phi}\left(U_z''' + \frac{1}{R^2}U_z'\right) + E\widehat{I}_{3\phi}\left\{\frac{1}{R}\left(U_y''' - \frac{1}{R}\theta'\right) + \left(\theta'' + \frac{1}{R}U_y'''\right)\right\} \\ & + E\widehat{I}_{23}\left(U_z''' + \frac{1}{R^2}U_z'\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_7 &= U_z, & d_8 &= U_z', & d_9 &= U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z, & d_{10} &= U_z''' + \frac{1}{R^2} U_z', \\
d_{11} &= \theta, & d_{12} &= \theta' + \frac{1}{R} U_y', & d_{13} &= \theta'' + \frac{1}{R} U_y'', & d_{14} &= \theta''' + \frac{1}{R} U_y'''
\end{aligned}
\tag{4a-n}$$

식(3)을 고려하면 식(4)의 14개 변위파라미터 중에서 4개의 파라미터는 다음과 같이 1차 함수와 상수로 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
d_1 &= \int_L d_2 dx_1 - \frac{1}{R} \int_L d_7 dx_1 = a_1 + a_2 x - \frac{1}{R} \int_L U_z dx_1, \\
d_2 &= a_2, & d_5 &= a_5 + a_6 x, & d_6 &= d_5' = a_6
\end{aligned}
\tag{5a-b}$$

식(5)의 4개의 변위파라미터를 제외한 나머지 10개의 변위파라미터로 구성된 벡터 \mathbf{d}_s 는 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_s(\mathbf{x}) = \langle d_3 \ d_4 \ d_7 \ d_8 \ d_9 \ d_{10} \ d_{11} \ d_{12} \ d_{13} \ d_{14} \rangle^T
\tag{6}$$

식(3)과 식(4)를 고려하면 변위벡터식 \mathbf{d}_s 에 대한 10개의 연립 미분방정식은 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A} \mathbf{d}_s' = \mathbf{B} \mathbf{d}_s + \mathbf{C}
\tag{7}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
g_1 & & & & & & & & & \\
\hline
& g_2 & & & & & & & & \\
\hline
& & g_1 & & & & & & & \\
\hline
& & & g_1 & & & & & & \\
\hline
& & & & e_1 & & & & & \\
\hline
& g_3 & & & & g_4 & & & & g_5 \\
\hline
& & & & & & g_1 & & & \\
\hline
& & & & & & & g_1 & & \\
\hline
& & & & & & & & g_1 & \\
\hline
& g_6 & & & & g_7 & & & & g_8 \\
\hline
\end{array}
\tag{8a}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= 1.0, & g_2 &= E\hat{I}_3 + \frac{1}{R} E\hat{I}_{3\phi}, & g_3 &= -\frac{1}{R} E\hat{I}_{23} \frac{1}{EA}, \\
g_4 &= \left\{ -E\hat{I}_2 + \frac{E\hat{I}_{23}}{E\hat{I}_3 + \frac{1}{R} E\hat{I}_{3\phi}} \left(\frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} + \hat{I}_{23} \right) \right\} \frac{R}{EA}, \\
g_5 &= \left\{ -E\hat{I}_{2\phi} + \frac{E\hat{I}_{23}}{E\hat{I}_3 + \frac{1}{R} E\hat{I}_{3\phi}} \left(\frac{1}{R} E\hat{I}_\phi + E\hat{I}_{3\phi} \right) \right\} \frac{R}{EA}, & g_6 &= -\frac{1}{R} E\hat{I}_3, \\
g_7 &= E\hat{I}_{2\phi} - \frac{E\hat{I}_{3\phi}}{E\hat{I}_3 + \frac{1}{R} E\hat{I}_{3\phi}} \left(\frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} + E\hat{I}_{23} \right),
\end{aligned}$$

$$g_8 = E\hat{I}_\phi - \frac{E\hat{I}_{3\phi}}{E\hat{I}_3 + \frac{1}{R}E\hat{I}_{3\phi}} \left(\frac{1}{R}E\hat{I}_\phi + E\hat{I}_{3\phi} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} & b_1 & & & & & & & & \\ b_2 & & & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \\ & & & b_1 & & & & & & \\ & & b_6 & & b_1 & & & & & \\ & & & & & b_1 & & & & \\ & & & & b_7 & & b_8 & & b_9 & \\ & b_{10} & & & & & & b_1 & & \\ & & & & & & & & b_1 & \\ & & & & & & & & & b_1 \\ & & & & b_{11} & & b_{12} & & b_{13} & \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 1.0, \quad b_2 = \frac{1}{R^2} GJ, \quad b_3 = -\frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} - E\hat{I}_{23}, \quad b_4 = \frac{1}{R} E\hat{I}_3 + \frac{1}{R} GJ + \frac{1}{R^2} E\hat{I}_{3\phi}, \\ b_5 &= -\frac{1}{R} E\hat{I}_\phi - E\hat{I}_{3\phi}, \quad b_6 = -\frac{1}{R^2}, \quad b_7 = \frac{1}{R} \frac{\hat{I}_2}{A}, \quad b_8 = -\frac{1}{R^2} \frac{\hat{I}_{23}}{A}, \\ b_9 &= \left(\frac{1}{R} E\hat{I}_{2\phi} + \frac{E\hat{I}_{23}}{E\hat{I}_3 + \frac{1}{R}E\hat{I}_{3\phi}} GJ \right) \frac{1}{EA}, \quad b_{10} = -\frac{1}{R}, \quad b_{11} = \frac{1}{R} E\hat{I}_{23}, \quad b_{12} = -\frac{1}{R^2} E\hat{I}_3, \\ b_{13} &= GJ - \frac{E\hat{I}_{3\phi}}{E\hat{I}_3 + \frac{1}{R}E\hat{I}_{3\phi}} \frac{1}{R} GJ + \frac{1}{R} E\hat{I}_{3\phi} \\ C &= \langle 0, a_5 + a_6x, 0, 0, 0, a_2, 0, 0, 0, 0 \rangle^T \end{aligned} \quad (8c)$$

2.3 14개의 연립 미분방정식의 일반해

식(7)의 제차해 d_s^h 와 특별해 d_s^p 를 각각 더하면 10개의 변위파라미터에 대한 일반해를 얻을 수 있다.

$$d_s = d_s^h + d_s^p = X^h(x) a_s + (H + \hat{H}x) a_c \quad (9)$$

그리고 4개의 변위파라미터에 대한 가정함수인 식(5)와 10개의 변위파라미터에 대한 해(9)는 아래와 같이 식(4)에서 정의한 14개의 변위성분의 엄밀해를 구성한다.

$$d(x) = X(x) a \quad (10)$$

부재양단의 좌표($x = 0, l$)를 식(10)에 대입하여 정리하면 절점변위벡터 U_e 는 적분상수벡터 a 로 나타낼 수 있다.

$$U_e = \widehat{X} a \quad (11a)$$

$$a = \widehat{X}^{-1} U_e \quad (11b)$$

복소수 행렬의 역행렬 \widehat{X}^{-1} 은 IMSL subroutine DLINCG를 이용하여 구한다.

식(11b)를 식(10)에 대입하여 복소계수 a 를 소거하면, 최종적으로 14개의 변위성분으로 구성되는 엄밀한 변위벡터를 얻을 수 있다.

$$d(x) = X(x) \widehat{X}^{-1} U_e \quad (12)$$

2.4 탄성강도행렬의 산정

도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 힘-변위관계식(2)에 14개의 변위 파라미터를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$f(x) = S d(x) \quad (13)$$

요소의 절점변위를 나타내는 식(10)을 식(13)에 대입하면, 다음과 같이 임의의 x 에서 박벽보 요소에 대한 단면력과 변위파라미터 관계식을 구할 수 있다.

$$f(x) = S X(x) \widehat{X}^{-1} U_e \quad (15)$$

한편 부재양단 ($x = 0, l$)의 부재력을 구하면 다음과 같다.

$$F^p = -f(o) = -S X(o) \widehat{X}^{-1} U_e \quad (16a)$$

$$F^q = f(l) = S X(l) \widehat{X}^{-1} U_e \quad (16b)$$

마지막으로 박벽 직선보의 엄밀한 탄성강도행렬 K 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_e = K U_e \quad (17a)$$

여기서

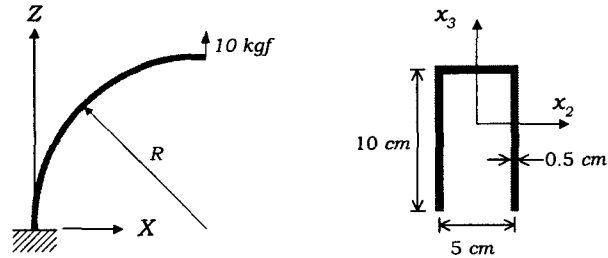
$$K = \begin{bmatrix} -S X(0) \widehat{X}^{-1} \\ S X(l) \widehat{X}^{-1} \end{bmatrix} \quad (17b)$$

3 해석예제

3.1 일축대칭 캔틸레버 곡선보의 처짐 및 단면력

그림 1은 x_3 축에 대하여 일축대칭 단면을 갖는 길이 $L = 200 \text{ cm}$ 인 캔틸레버 곡선보의 형상과 단면을 보여주고 있다. 본 예제에서는 캔틸레버 자유단에 Z 방향으로 10kgf 의 하중을 가할 경우 자유단의 변위와 고

정단의 반력을 산정하였으며, 표 1에 본 연구에 의한 결과와 Hermitian 다항식을 사용한 5개의 곡선보요소 및 20개의 직선보요소를 사용한 유한요소해와 비교하였다.

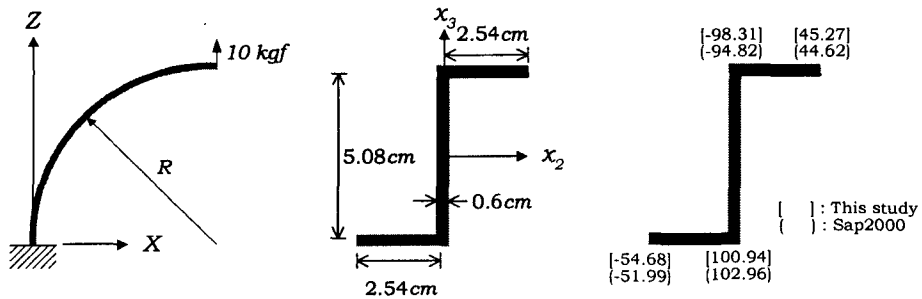


(a) 캔틸레버 곡선보 (b) 일축대칭 단면의 형상
그림 1. 일축대칭 단면을 갖는 박벽 캔틸레버 곡선보

표 1. 집중하중을 받는 캔틸레버 곡선보의 처짐 및 반력(cm, kgf)

		This study	Straight beam element	Curved beam element
처짐	x	-0.13095	-0.13211	-0.13094
	z	0.20569	0.20819	0.20568
	ω_2	0.00411	0.00416	0.00411
반력	F_1	-10.0000	-9.99229	-10.000
	F_3	0.00000	-0.39260	-0.00032
	M_2	636.630	636.620	636.620

3.2 비대칭 캔틸레버 곡선보의 응력해석



(a) 캔틸레버 곡선보 (b) 비대칭 단면의 형상 (c) 비대칭 단면의 수직응력(kgf/cm^2)
그림 2. 비대칭 단면을 갖는 박벽 캔틸레버 곡선보

본 예제에서는 그림 2와 같은 길이 $L = 100\text{ cm}$ 인 비대칭 캔틸레버보에 대하여 단부에 Z 방향으로 10kgf 의 하중을 가할 경우 부재의 중앙부의 단면의 수직응력값을 계산하였다. 해석결과 그림 2(c)에 본 연구에 의한 결과와 4320개의 4절점 Sap2000의 쉘요소를 사용한 유한요소해의 결과를 함께 제시하였다. 그림에서도 볼 수 있듯이 1개의 요소를 사용한 본 연구의 결과와 쉘요소의 결과가 최대 5% 이내의 차이를 보이는 것을 알 수 있다.

4 결론

비대칭 단면을 가지는 박벽 곡선보의 정적 응력해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석기법을 개발하였다. 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식의 형태로 표현되는 비대칭 박벽 곡선보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 정적강도행렬을 유도하였다. 요소강도행렬을 이용하여 캔틸레버 곡선구조에 대한 처짐 및 응력해석을 수행하고 직선 및 곡선보요소 및 Sap2000 쉘요소를 이용한 유한요소해석의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. Hermitian다항식 혹은 isoparametric interpolation 함수와 같은 형상함수를 도입하여 일반적으로 산정하는 요소강도행렬과는 달리, 본 연구의 요소강도행렬은 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.

참고 문헌

1. Leung A.Y.T., "Dynamic stiffness for lateral buckling", *Computers and Structures* Vol.42, No.3, 1992, pp.321-325.
2. Banerjee J.R. and Williams F.W., "Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.23, 1986, pp.1615-1628.
3. Williams F.W. and Wittrick W.H., "Exact buckling and frequency calculations surveyed", *Journal of Structural Engineering* Vol.109, No.1, 1983, pp.169-187.
4. 김문영, 윤희택, 김남일, "초기하중을 받는 전단변형을 고려한 비대칭 박벽보의 엄밀한 동적 요소강도행렬", 대한토목학회 논문집, 제22권, 제1-A호, 2002, pp.65-74.
5. 김문영, 김남일, 윤희택, "전단변형을 고려한 비대칭 박벽보의 엄밀한 정적 요소강도행렬", 대한토목학회 논문집, 제22권, 제1-A호, 2002, pp.75-84.