

## 국부적 균열의 영향을 고려한 수정된 프레임 강성행렬 Modified Stiffness Matrix of Frame Reflecting the Effect of Local Cracks

이 상 호\*                      송 정 훈\*\*                      임 경 훈\*\*\*  
Lee, Sang-Ho                  Song, Jeong-Hoon                  Leem, Kyoung-Hoon

---

### ABSTRACT

The objective of this study is to develop a technique that analyzes the global behavior of frame structures with local cracks. The technique is based on frame analysis and uses the stiffness matrix of cracked frame element. An algorithm proposed here analyzes a frame structure with local transverse edge cracks, considering the effects of crack length and location. Stress intensity factors are employed to calculate additional local compliance due to the cracks based on linear elastic fracture mechanics theory, and then this local compliance is utilized to derive the stiffness matrix of the cracked frame element. In order to verify the accuracy and reliability of the proposed approach, numerical results are compared with those of Finite Element Method for the cracked frame element, and the effects of single crack on the behavior of truss structure are also examined.

---

### 1. 서론

구조물에 발생한 균열은 전체구조체의 정적, 동적 거동에 변화를 가져오며, 특히 구조물의 주부재에 발생한 균열은 구조물의 안정성 및 사용성에 큰 영향을 미친다. 이러한 이유로 균열이 전체구조체에 미치는 영향을 연구하려는 시도가 유한요소법을 중심으로 진행되어 왔지만, 이러한 방법들은 균열이 발생한 부위의 국부적 해석을 위주로 하고 있기 때문에 거시적 관점에서 균열이 전체구조체에 미치는 영향과 이로 인한 거동을 파악하는 방법으로 이용하기에는 적절하지 않다.

따라서, 균열이 전체구조체에 미치는 영향을 평가하기 위해서, 발생한 균열의 크기 및 위치 등과 같은 조건을 부재의 강성 또는 연성의 변화에 직접적으로 반영시키기 위한 연구가 진행되었다. 그 대표적 연구들로 Goumaris와 Dimarogonas<sup>(1)</sup>는 유한요소법에 적용할 수 있도록 균열이 발생한 보의 강성행렬을 제안하였고 Kam과 Lee<sup>(2)</sup>는 균열을 지닌 내민보를 모사하기 위해 단순감소된 강성모델 (simple reduced stiffness model)을 이용한 바 있다. 또한, Sundermeyer와 Weaver<sup>(3)</sup>는 균열을 포함한 단순보를 스프링으로 연결된 두 부분의 보로 모델링하였다. 최근에 Lee와 Chung<sup>(4)</sup>은 내민보의 균열 위치와 크기를 진동응답으로 예측하기 위해 균열로 인한 연성 변화를 바탕으로 유도된 길이가 없는 요소 강성행렬을 사용하였다.

하지만 이와 같이 균열을 지닌 보나 프레임의 거동에 대한 현재까지의 연구는 내민보 등과 같이 간단한

---

\*    정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수  
\*\*   학생회원, 연세대학교 토목공학과 석사과정  
\*\*\* 정회원, 현대산업개발(주) 토목설계팀

구조에 대해 진동실험으로부터 얻어진 데이터를 이용하여 균열의 크기와 위치를 예측하기 위한 제한적 목적이 대부분이었다. 따라서 본 연구에서는 이를 정적 구조물의 해석에 적용하여 국부적 결함의 영향을 전체구조체의 해석에 반영할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

## 2. 균열을 고려한 프레임 요소의 강성행렬 유도

### 2.1 균열로 인한 국부 컴플라이언스 성분 유도

균열로 인한 국부 컴플라이언스를 계산하기 위하여 그림 1과 같이 중립축에 수직인 가장자리 균열을 고려하였다. 균열이 발생한 부재는 하중이 가해졌을 경우, 균열선단의 응력집중으로 인하여 국부적인 컴플라이언스의 증가현상이 발생하며, 이로 인해 추가의 변형에너지  $W^C$ 가 생성된다. 이 추가의 변형 에너지는 균열면의 단면적을  $A$ 라 하였을 때 식(1) 같이 나타낼 수 있다.

$$W^C = \int_A G dA = \int_A \left[ \frac{1}{E} \left( \sum_k K_1^k \right)^2 + \frac{1}{E} \left( \sum_k K_{II}^k \right)^2 + \frac{1+\nu}{E} \left( \sum_k K_{III}^k \right)^2 \right] dA \quad (\text{for plane stress}) \quad (1)$$

여기서  $G$ 는 가해진 하중시스템  $k(=1, 2, 3, \dots, m)$ 의 조합에 의하여 구해진 에너지해방률을 의미한다. 식 (1)에 Castigliano 제 2정리를 적용하면, 추가의 변형에너지  $W^C$ 에 대하여  $i$ 방향으로 작용하는 하중  $f_i$ 로 인해 발생하는 변위  $d_i^c$ 를 구할 수 있으며, 이를 이용하여  $W^C$ 로부터 컴플라이언스의 성분을 식 (2)와 같이 유도할 수 있다.

$$C_{ii}^c = \frac{\partial d_i^c}{\partial f_i} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial f_i \partial f_i} = \frac{\partial^2}{\partial f_i \partial f_i} \int_A G dA \quad (2)$$

특히, 중립축에 수직인 가장자리 균열에 대해서 2차원 평면응력상태에서는 mode III에 대한 고려가 필요 없으므로 에너지해방률  $G$ 는 mode I과 mode II에 대한 함수로만 표현하여 식 (3)과 같이 균열로 인한 추가 변형에너지  $W^C$ 를 정의할 수 있다.

$$W^C = \int_A G dA = \frac{1}{E} \int_A [(K_I^N + K_I^M)^2 + (K_{II}^V)^2] dA \quad (3)$$

따라서, 식(2)에 식(3)을 대입한 후 각 방향별로 작용하는 하중을 고려함으로써 국부 컴플라이언스  $C^c$ 의 성분을 유도하게 된다

이때 균열에 작용하는 에너지해방률  $G$ 는 각각의 파괴모드에 따른 응력확대계수(Stress Intensity Factor: S.I.F.)의 함수이므로 이에 대한 일반적 정의가 필요하다. 따라서, 그림 2와 같이 높이가  $H$ 이고 길이가  $a$ 인 중립축에 수직인 균열을 지닌 부재의 양단에 전단력  $N$ , 휨모멘트  $M$  및 교축방향 하중  $V$ 가 각각 작용할 경우 균열선단부의  $K_I^N$ ,  $K_{II}^V$ ,  $K_I^M$  값은 표 1의 형상보정함수를 사용하여 정의하였다. 이는 정확도와 계산의 편의성을 고려하여 각각의 하중에 대해 Gross와 Srawley<sup>(6)</sup>, Brown과 Srawley<sup>(6)</sup>, 그리고 Ichikawa와 Takamatsu<sup>(7)</sup>에 의해 제시된 형상보정함수를 사용한 것이다.

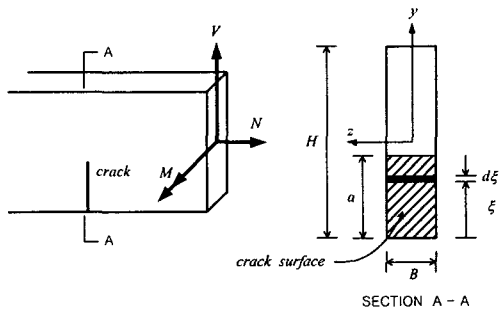


그림 1 균열을 지닌 단면의 형상

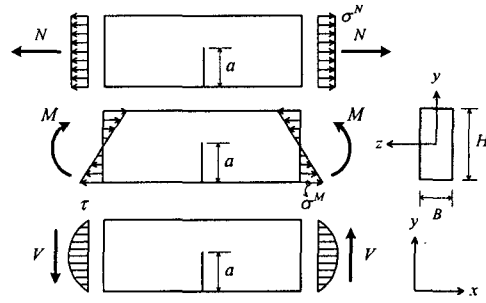


그림 2 응력확대계수 산정을 위한 재하조건

표 1 하중 재하조건에 따른 응력확대계수 및 형상보정함수

	S.I.F.	형상보정함수
축력	$K_1^N = \frac{N}{HB} \sqrt{\pi a} F_1^N(\bar{a})$	$F_1^N(\bar{a}) = 1.122 - 0.231(\bar{a}) + 10.550(\bar{a})^2 - 21.710(\bar{a})^3 + 30.382(\bar{a})^4$
모멘트	$K_0^V = K_0^V F_0^V(\bar{a})$	$F_1^M(\bar{a}) = 1.122 - 1.40(\bar{a}) + 7.33(\bar{a})^2 - 13.08(\bar{a})^3 + 14.0(\bar{a})^4$
전단력	$K_1^M = \sigma^M \sqrt{\pi a} F_1^M(\bar{a})$	$F_0^V(\bar{a}) = 4.886(\bar{a}) - 11.383(\bar{a})^2 + 28.198(\bar{a})^3 - 38.563(\bar{a})^4 + 20.555(\bar{a})^5$

따라서, 표 1의 S.I.F.를 사용하여 이상의 결과로부터 유도된 국부 컴플라이언스 성분은 다음과 같다.

$$\therefore C^c = \frac{2\pi}{EB} \begin{bmatrix} \int_0^{\bar{a}} \bar{\xi} \{F_1^N(\bar{\xi})\}^2 d\bar{\xi} & 0 & \frac{6}{H} \int_0^{\bar{a}} \bar{\xi} F_1^N(\bar{\xi}) F_1^M(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \\ 0 & \int_0^{\bar{a}} \bar{\xi} \{F_0^V(\bar{\xi})\}^2 d\bar{\xi} & 0 \\ \text{Sym.} & 0 & \frac{36}{H^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\xi} \{F_1^M(\bar{\xi})\}^2 d\bar{\xi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2.2 국부 컴플라이언스를 이용한 강성행렬의 유도

균열로 인한 국부 컴플라이언스의 영향을 프레임 해석에 반영하여 전체구조체의 거동을 해석하기 위해서는 균열의 영향이 반영된 프레임 요소의 강성행렬을 유도하여야 한다. 이를 위해 그림 3과 같이 길이가  $l_0$  이고  $i$  지점에서  $l_1$  만큼 떨어져 있는 지점에 균열이 발생한 부재를 고려하여 요소에 대한 컴플라이언스 행렬을 유도하였다.

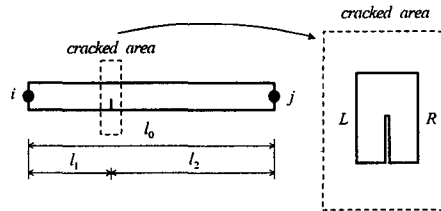


그림 3 균열을 지닌 프레임 요소 및 국부균열 단면

프레임 요소의 우측 끝단  $j$ 점에서 발생하는 변위  $d_j$ 와 가해진 하중  $f_j$ 에 대하여 우측 단면 R에서의 변위  $d_R$ 과의 관계는 식 (5)와 같이 정의된다.

$$d_j = C_{l_2}^0 f_j + A d_R \quad (5)$$

여기서,  $C_{l_2}^0$ 는 균열을 고려하지 않은 길이가  $l_2$ 인 요소의 컴플라이언스이며,  $A$ 는 균열의 우측 단면 R과  $j$ 점의 상대적인 관계로부터 얻어지는 행렬이고, 식 (5)는 다시  $d_R$ 에 대하여 식 (6a)와 같은 형태로 정의된다. 이와 유사한 방법을 통하여 균열 국부 및 좌측 단면 L에 대해서도 각각  $d_R$ 과  $d_L$ 의 관계를 식 (6b) 및 (6c)와같이 유도할 수 있다.

$$d_R = A^{-1} (d_j - C_{l_2}^0 f_j) \quad (6a)$$

$$d_L = C_{l_1}^0 f_L \quad (6b)$$

$$d_R - d_L = C^c f_R \quad (6c)$$

이후 식 (6a), (6b)와 (6c)를 상호 정리함으로써 균열이 발생한 부재의 요소 컴플라이언스 행렬 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$C_c^e = B^T (C_{l_1}^0 + C^c) B + C_{l_2}^0 \quad (7)$$

이때 유도된 식 (7)의 요소 컴플라이언스 행렬로부터 강성행렬을 유도하기 위하여 절점  $i$ 에 대한 절점  $j$ 의 상대적인 변위  $d_{j/i}$ 와  $f_j$ 의 관계를  $C_c^{e-1}$ 을 사용하여 정의한 후,  $f$ 와  $f_j$ 의 관계 역시 이들 두 벡터의 상대적 위치를 표현할 수 있는  $\Pi$  행렬을 도입하여 정의한다. 마찬가지로 방법으로 절점  $i$ 에 대한 절점  $j$ 의 상대변위를  $d$ 에 대하여  $\Pi^T$ 을 이용하여 정의하면, 균열이 발생한 부재의 요소 강성행렬  $K_c^e$ 는 결과적으로  $f = K_c^e d$ 와 같은 형태로 표현이 되어야 하므로 식 (8)과 같은 형태의 균열이 발생한 프레임 부재의 요소 강성행렬을 유도하게 된다.

$$\therefore K_c^e = \Pi C_c^{e-1} \Pi^T \quad (8)$$

### 3. 하중조건에 따른 강성행렬의 수정 및 해석 알고리즘

#### 3.1 하중조건에 따른 강성행렬 수정

중립축 하단에 발생한 균열일 경우 해석 후 부재에 가해지는 절점하중의 조건에 따라 적합성을 검토해야 한다. 이는 균열의 불연속면이 가해지는 하중에 대하여 열려 (open)있고, 압축을 받는 경우는 전단을 제외하고 강성에 미치는 영향이 없다고 가정하였기 때문이다. 해석결과로서 나올 수 있는 경우는 전단력을 고려하지 않을 경우, 그림 4와 같이 네 가지로 분류할 수 있다.

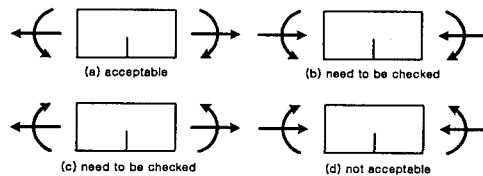


그림 4 해석결과 산정시 고려해야 할 하중 조건

그림 4의 (a)는 해석이 올바르게 수행되었음을 나타내는 반면, (d)의 경우는 mode I 을 고려하지 않고 mode II 만을 고려하여야 함을 알 수 있다. 또한, (b)와 (c)의 경우에는 각각의 하중에 대한 S.I.F.의 대수합을 식 (9)의 적합성 조건 판별식을 사용하여 검토할 필요가 있다.

$$\sum_k K_1^k = (\text{sign of } N)K_1^N + (\text{sign of } M)K_1^M > 0 \quad (9)$$

이때 식 (9)가 성립하면 해석결과를 그대로 받아들일 수 있지만, 성립하지 않을 경우 (d)와 마찬가지로 전단에 대한 S.I.F.인  $K_{II}^V$  만을 고려한다.

### 3.2 해석 알고리즘

균열의 영향을 반영하여 전체구조체를 해석하기 위해서는 국부균열부근의 응력, 변위 등에 관심을 가지는 상세해석과는 다른 관점에서 출발하므로 균열의 형상이나 위치, 크기 등과 같은 매개변수들로 균열의 영향을 반영해야 한다. 전체 프레임 구조체에 국부적으로 발생한 균열의 영향을 해석에 반영하기 위한 해석 알고리즘은 그림 5에 나타나있다. 프레임 해석은 부재에 작용하는 하중을 등가의 절점하중으로 변환시켜 해석을 수행하며 이러한 등가하중의 개념은 절점 변위의 등가개념으로부터 유도되고 미지수도 절점의 변위가 된다.

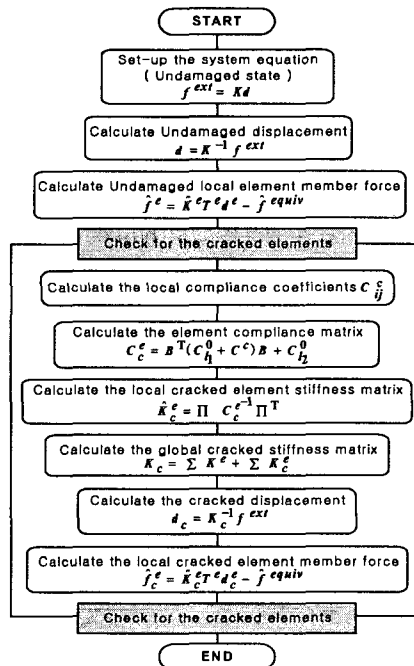


그림 5 국부적 균열을 고려하기 위한 프로그램 흐름도

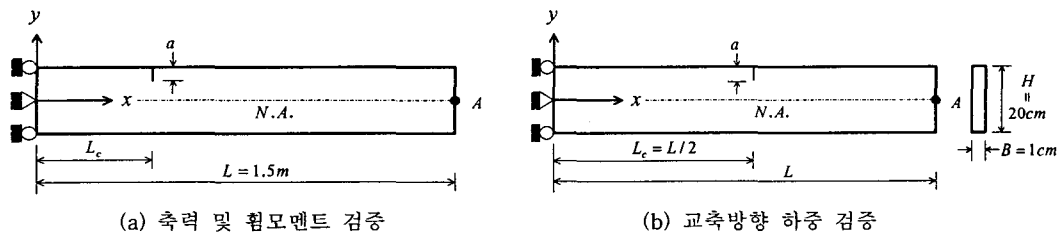
## 4. 단일 균열에 대한 수치검증 및 응용예제

### 4.1 단일 균열에 대한 검증

#### ① 축력 및 휨모멘트에 대한 검증

축력 및 휨모멘트에 대한 검증을 위해 수치해석에 사용된 시편의 형상은 그림 6(a)와 같고 재료는 탄성

계수  $E = 210 \times 10^9 (N/m^2)$ , 포아송비  $\nu = 0.3$ 인 강재로 가정하였다. 하중은 시편의 자유단에 그림 6과 같이 축력 ( $N = 100 kN$ )과 휨모멘트 ( $M = -10 kN \cdot m$ )를 각각 작용시킨 후 균열의 위치  $L_c$ 를 고정단으로부터 부재길이의  $1/4$ ,  $2/4$ , 그리고  $3/4$  지점으로 변화시키며 각각의 위치에서 균열의 상대길이  $a/H$ 를 0 부터 0.6 까지 0.1 씩 증가시켜 본 연구를 통해 제안된 방법을 따라 해석을 수행하였으며, 본 방법의 정확성을 검증하기 위하여 8절점 사각형요소 (8-node quadrilateral element)와 조밀한 요소와의 접속부에 6절점 삼각형요소 (6-node triangular element) 및 균열 선단부의 특이성 반영을 위한 특이요소 (quarter point singular element)를 이용하여 유한요소해석을 시행하였다. 정확성 검증을 위하여 중립축상의 점 A의 x 방향변위의 유한요소 해석결과에 대한 상대오차를 각각 비교하여 그림 7의 (a)와 (b)에 나타내었다. 해석결과로부터 균열의 길이가 부재높이의 50%를 넘지 않는 범위에서는 0.5% 이내의 매우 높은 정확도를 보이는 것을 확인할 수 있었다.

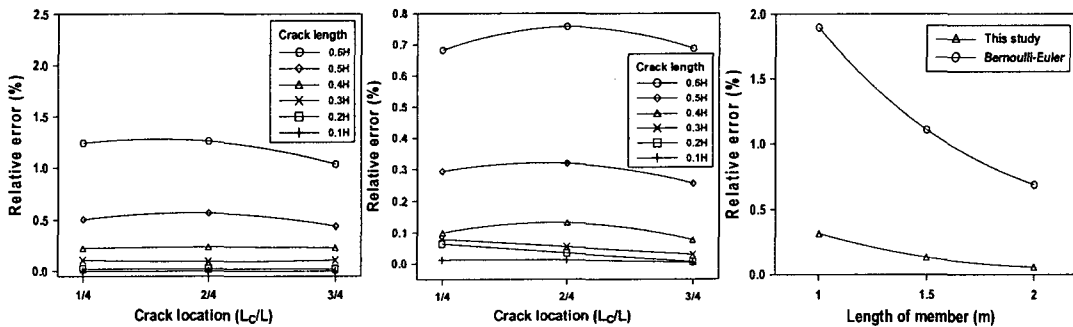


(a) 축력 및 휨모멘트 검증 (b) 교축방향 하중 검증

그림 6 하중 재하조건에 따른 시편형상

② 교축방향 하중에 대한 검증

교축방향 하중에 대한 검증에 사용된 시편의 형상은 그림 6(b)와 같고 재료는 축력 및 휨 모멘트 검증시와 동일하게 가정 한 후 자유단에 수직하중 ( $V = -2kN$ )을 작용하였다. 해석은 부재길이  $L$ 이 1m, 1.5m, 그리고 2m인 경우에 대해서 중간지점에 균열을 위치시키고 각각에 대해 균열의 상대길이  $a/H$ 를 0 부터 0.6 까지 0.1 씩 증가시키면서 수행하였다. A점에서의 수직 처짐에 대한 유한요소해석 결과와의 평균적인 상대오차는 그림 7의 (c)와 같으며 이 역시 높은 정확성을 보임을 검증하였다.



(a) 축력 재하시 상대오차 (b) 휨모멘트 재하시 상대오차 (c) 교축 하중 재하시 상대오차

그림 7 A점에서의 유한요소해석 결과와의 상대오차

#### 4.2 국부적 균열을 지닌 트러스 구조물의 거동해석

국부적 균열의 영향을 반영할 수 있도록 제안된 강성행렬을 이용하여 교량 등 토목분야의 구조물에서 흔히 사용되는 트러스 구조물에 대하여 국부적 균열이 발생한 상황을 가정하고 해석을 수행하였다. 트러스 해석을 위해 프레임 해석에서 고려하는 모멘트를 해제시키고 앞에서 제시된 알고리즘에 따라 트러스에 국부적으로 발생한 균열로 인한 전체구조체의 거동을 분석하였다. 대상 구조체는 그림 9와 같이 지간 중간부위의 연결판에 연결된 9번 부재에 균열이 발생한 트러스로 가정하였고, 재료의 물성치는 SM400인 강재로써 탄성계수  $E = 2.1 \times 10^6 (kg/cm^2)$ 이다.

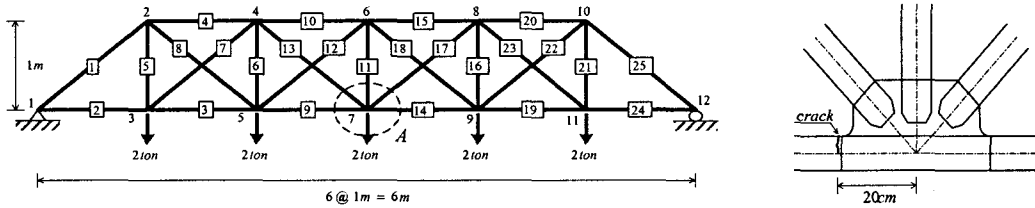


그림 8 균열을 포함한 트러스 모형

##### ① 국부적 균열의 영향에 의한 변위

균열의 상대길이  $a/H$ 를 0 부터 0.6 까지 0.1 씩 증가시키며 해석을 수행하여 12 개 절점에서의 수평방향 및 수직방향 변위를 구한 후 손상을 입지 않은 상태의 해석결과에 대한 상대적인 변화를 그림 9(a)와 그림 9(b)에 도시하였다. 해석결과로부터 균열의 길이가 증가할수록 각 절점의 변위가 증가하는 것을 알 수 있었다. 물론, 이러한 형태의 손상을 입은 구조물의 거동은 직관적, 정성적 예측은 가능하지만, 본 연구에서 제안된 방법은 그 증가량의 비를 수치적으로 정량화 하여 분석할 수 있다는 장점을 보이고 있다.

##### ② 국부적 균열의 영향에 의한 부재력

변위 측정시와 동일한 방법으로 균열의 상대길이를 증가시킬 때 트러스 구조물의 각각의 부재에 작용하는 축력의 변화를 손상이 발생한 9번 부재의 인근에 있는 부재에 대하여 계산한 후 균열이 없는 상태의 축력에 대한 상대적인 변화량으로 그림 9(c)에 백분율화하여 나타내었다. 그림 9(c)로부터 구조물 각각의 부재에 작용하는 축력은 손상이 발생한 부재에 직접 연결되어 있지 않거나 멀리 떨어져 있는 부재의 경우 큰 변화를 보이지 않지만, 부근에 위치한 부재의 경우 상당한 변화를 보인다는 것을 알 수 있으며 그 증가 비율 역시 정량적으로 분석이 가능하였다.

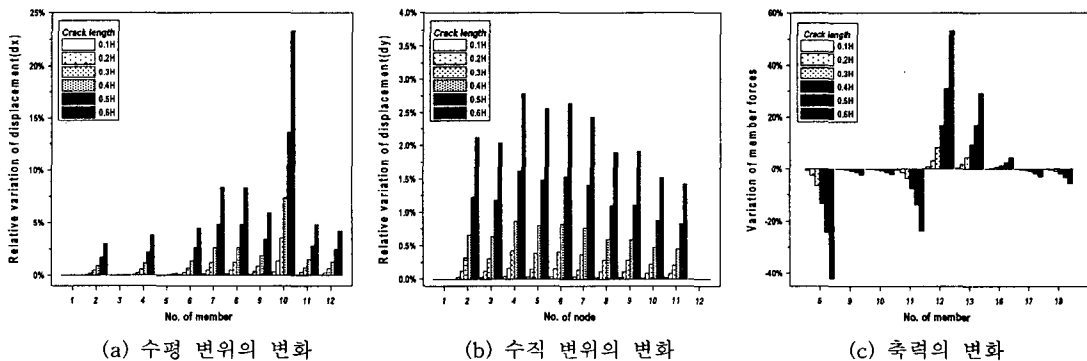


그림 9 균열을 고려한 전체구조체의 상대적인 변위 및 응력 변화

## 5. 결론

본 연구에서는 국부적 균열의 영향을 전체 프레임구조 해석에 반영할 수 있는 수정된 프레임 강성행렬을 제안하였고, 이를 하중조건에 따라 검증한 후 균열을 지닌 부재가 있는 트러스 구조물에 적용함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 본 연구에서 제안된 균열을 지닌 프레임 부재의 강성행렬을 적용하여 전체구조체의 거동을 해석한 결과, 유한요소 상세해석결과와 매우 잘 일치함을 확인함으로써 정확성을 검증하였다.
- (2) 연구 결과를 토대로 개발된 알고리즘을 이용하여 다수의 부재로 이루어진 균열이 발생한 트러스구조 전체에 적용하여 해석한 결과, 본 방법이 균열의 길이와 위치에 따른 거동을 합리적이고 효율적으로 파악할 수 있는 수단으로 이용될 수 있음을 확인하였다.
- (3) 제안된 강성행렬을 이용하여 균열이 발생한 구조물을 해석함으로써 균열의 영향에 대한 정량적인 해석결과를 도출할 수 있었다.
- (4) 본 연구를 통하여 제시된 방법론은 추후 연구를 통하여 다수의 균열균을 포함하는 프레임 구조물에도 적용 가능할 것으로 예상된다.

## 참고 문헌

1. Gounaris, G. and Dimarogonas, A.D., "A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis", *Computers and Structures*, Vol.28, No.3, 1988, pp.309-313.
2. Kam, T.Y. and Lee, T.Y., "Detection of cracks in structures using modal test data", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.42, No.2, 1992, pp.381-387.
3. Sundermeyer, J.N. and Weaver, R.L., "On crack identification and characterization in a beam by non-linear vibration analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.183, No. 5, 1995, pp. 857-871.
4. Lee, Y.S. and Chung, M.J., "A study on crack detection using eigenfrequency test data", *Computers and Structures*, Vol.77, 2000, pp.327-342.
5. Gross, B. and Srawley, J.E., "Stress intensity factors for a single edged notch tension specimen by boundary collocation of a stress function", 1964, NASA TN D-2395.
6. Brown, W.F. and Srawley, J.E., "Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials", 1966, ASTM STP 410.
7. Ichikawa, M. and Takamatsu, T., "Fracture toughness test for thin plate under mode II loading", *Transactions of JSME*, Vol.51, 1985, pp.1115-1121.