

재료-기하비선형을 고려한 이방성 적층평판의 p -Version 유한요소해석 p -Version Finite Element Analysis of Anisotropic Laminated Plates considering Material-Geometric Nonlinearities

홍 중현¹⁾ 박 진환²⁾ 우 광성³⁾
Hong, Chong-Hyun Park, Jin-Hwan Woo, Kwang-Sung

ABSTRACT

A p -version finite element model based on degenerate shell element is proposed for the analysis of orthotropic laminated plates. In the nonlinear formulation of the model, the total Lagrangian formulation is adopted with large deflection and moderate rotation being accounted for in the sense of von Karman hypothesis. The material model is based on the Huber-Mises yield criterion and Prandtl-Reuss flow rule in accordance with the theory of strain hardening yield function, which is generalized for anisotropic materials by introducing the parameters of anisotropy. The model is also based on extension of equivalent-single layer laminate theory(ESL theory) with shear deformation, leading to continuous shear strain at the interface of two layers. The integrals of Legendre polynomials are used for shape functions with p -level varying from 1 to 10. Gauss-Lobatto numerical quadrature is used to calculate the stresses at the nodal points instead of Gauss points. The validity of the proposed p -version finite element model is demonstrated through several comparative points of view in terms of ultimate load, convergence characteristics, nonlinear effect, and shape of plastic zone

1. 서 론

섬유보강 복합재료(fiber reinforced composites)는 항공, 기계, 화공, 원자력분야에서 구조재료 및 배관설비 재료로 다양하게 이용되며, 의료 장비, 스포츠 장비에 이르기까지 광범위하게 사용되고 있다. 토목/건축 분야에도 아라미드 섬유, 금속섬유, 탄소섬유 등의 섬유를 에폭시(epoxy)나 금속, 또는 알루미늄에 보강한 복합재료가 새로운 건설재료로 이용되고 있다¹⁾. 강구조물에 탄소섬유쉬트를 보강한 평판²⁾과 철근콘크리트 평판 등도 복합재료로 구성되었으며 상당수의 건설재료가 복합재료이다. 특히, 섬유보강 복합재료는 중량에 비해 높은 강도를 지니고 있고, 탁월한 부식(corrosion) 방지능력이 있으며, 저렴한 유지관리 비용, 뛰어난 내구성, 설계 및 시공의 용이성, 그리고 우수한 피로특성(fatigue characteristics)을 갖는 이유로 사용빈도가 증가 추세에 있다.

복합재료가 구조부재로 사용될 경우 극한하중 산정이 중요한 설계인자가 될 수 있다. 부재가 극한하중에 도달하면, 구조물의 거동은 기하학적 그리고 재료적 비선형 거동을 하게 된다. 또한, 복합재료는 일반적으로 이방성(anisotropy)을 갖기 때문에 이를 고려한 비선형 해석은 어려운 과제로 취급되어 유한요소법과 같은 수치해석법이 모색되어 왔다. 복합재료로 이루어진 적층평판의 해석에도 유한요소법이 대표적인 해석도구로 이용되고 있는데 Ahmad³⁾로 부터 Owen⁴⁾과 Reddy⁵⁾에 이르기까지 여러 형태의 유한요소기법들이 제안되어 적층평판의 해석에 이용되었다. 특히, Ahmad에 의해 제안된 퇴화 쉘요소(degenerate shell element)는 적절한 가정을 통해 3차원 응력과 변형을 조건을 중립면에서의 거동으로 2차원화를 시킨 요소로 적은 수의 자유

1) 탐라대학교 건설도시공학부 전임강사
2) 영남대학교 토목공학과 박사과정
3) 정회원 · 영남대학교 토목공학과 교수

도에 비해 비교적 높은 정확도를 보이는 까닭에 최근까지 여러 학자들에 의해 꾸준히 연구되고 있다^{6,7)}. 그러나, 재료 및 기하비선형을 동시에 고려한 이방성 적층평판에 대한 연구는 찾아보기가 힘든 실정이다. 한편, 기존의 퇴화 쉘요소는 h -version 유한요소법에 기초를 두고 있어 전단구속현상(shear locking)과 같은 문제점은 감차적분기법(reduced integration)으로 해결을 하고 있다. 그러나 p -version 유한요소법은 고차다항식을 형상함수로 채택하고 있기 때문에 전단구속문제에 영향을 받지 않는 장점을 지니고 있다.

본 연구에서는 퇴화 쉘요소 개념에 근거를 둔 p -version 유한요소모델을 개발하여 직교이방성 비선형 적층평판 문제를 해석하고자 한다. 제안된 p -version 유한요소모델은 기하비선형 정식화를 위해 von Karman의 가정을 토대로 대변형-소변형률(large deflection-small strain)이론에 의한 변형과 변형률 관계를 total Lagrangian 방법에 의해 정의하였다. 재료비선형을 고려하기 위해 증분소성이론(incremental theory of plasticity)에 기초를 둔 Prandtl-Reuss 유동법칙(flow rule)과 Huber-Mises 항복기준이 사용되었다. 적층평판이론으로는 전단변형효과를 고려한 등가단층이론(equivalent single-layer laminate theory; ESL theory)이 채택되었다. 이 이론은 두개의 적층간의 계면에서는 전단변형률이 연속이 된다는 가정을 배경으로 하므로 적층간의 전단응력은 불연속이 된다. 형상함수로는 적분형 르장드르 다항식이 사용되며 형상함수의 차수는 1차에서 10차까지 변화될 수 있게 하였다. 한편, 수치적분법은 기존의 Gauss 적분법이 Gauss 적분점에서만 응력값이 산정되는 단점을 극복하기 위해 Gauss-Lobatto 수치적분법이 채택되었다. 제안된 모델의 적정성을 보이기 위해 비교관점으로 극한하중, 해의 수렴성, 비선형 효과 및 소성역의 형상(shape of plastic zone)을 분석하였다.

2. p -Version 비선형 적층평판 요소

2.1 퇴화 쉘요소(Degenerate Shell Element)

퇴화 쉘요소는 3차원 연속체역학의 방정식으로부터 유도된다. 즉, 3차원 응력과 변형률의 조건들이 중립면에서의 쉘거동으로 표현될 수 있도록 적절한 가정을 통해 2차원화 된다. 이 가정들은 세 가지로 요약된다. 첫째로, 변형전 중립면에 수직인 선은 변형후에도 직선을 유지하나 수직일 필요는 없다. 둘째로, 중립면에 수직인 응력은 무시한다. 마지막으로, 전단변형률(transverse shear strains)은 두께에 걸쳐 일정하게 분포한다고 가정한다. 또한, 두께방향의 변형은 없는 것으로 본다. 첫번째 가정에 의해 한 절점당 자유도는 5자유도가 되며 임의의 절점 k 에서 3개의 중립면 직선변위(u_k^{mid} , v_k^{mid} , w_k^{mid})와 2개의 회전변위(β_{1k} , β_{2k})로 구분할 수 있다. 한편, 기하형상을 표현하기 위해 그림 1에 나타난 좌표계가 사용되는데 다음과 같이 정의할 수 있다³⁾.

$$x_i = \sum_{k=1}^{N_c} \psi_k x_{ik}^{mid} + \sum_{k=1}^{N_c} \psi_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{3k}^{-i} \quad (1)$$

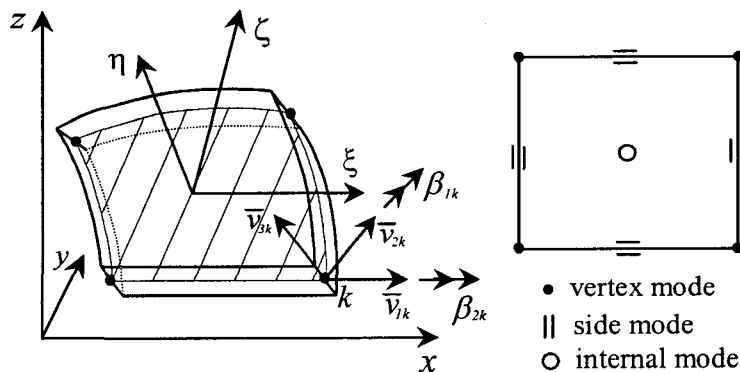


그림 1. 5-DOF 퇴화 쉘요소

한편, 변위장은 회전변위(β_{1k}, β_{2k})로부터 영향을 받는 직선변위 성분을 고려하여 식(2)와 같이 나타낸다³⁾.

$$u_i = \sum_{k=1}^{N_k} \Psi_k u_{ik}^{mid} + \sum_{k=1}^{N_k} \Psi_k \xi \frac{h_k}{2} [\bar{v}_{1k}, -\bar{v}_{2k}] \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, i 는 전체좌표계의 x, y, z 를 의미하며, u_{ik}^{mid} 와 $[\beta_{1k}, \beta_{2k}]$ 는 임의의 k 절점 중립면에서의 직선변위 벡터와 회전변위 벡터, h_k 는 k 절점에서의 쉘의 두께, Ψ_k 는 적분형 Legendre 형상함수, \bar{v}_{3k}^i 는 절점 k 에서의 상·하 좌표점을 이용하여 설정된 수직벡터로서 전체 좌표계를 기준으로 나타낸 단위벡터 성분이다. $[\bar{v}_{1k}, -\bar{v}_{2k}]$ 는 절점에서 정의되는 절점좌표계(nodal coordinate)방향으로의 단위벡터이다. ξ, η, ζ 는 형상함수가 정의되는 정규좌표계를 의미하며, 정규영역에서 모든 강성도매트릭스와 하중벡터가 계산된다. N_c 는 모서리절점(corner node)의 개수로 4가 되며, N_p 는 형상함수의 차수 p 에 따른 요소내의 전체 절점수이다. 따라서, 저매개변수 요소(subparametric element)가 되며 $N_c \neq N_p$ 가 되는데 N_p 의 절점수는 모서리절점(corner nodes), 주변절점(side nodes), 그리고 내부절점(internal nodes)의 합으로 식(3)과 같다.

$$N_p = (p+1)(p+2)/2 + 2, \quad p \geq 2 \quad (3)$$

2.2 비선형 모델(Nonlinear Model)

비선형모델은 재료비선형과 기하비선형을 동시에 고려되도록 하였다. 먼저, 재료비선형 이론으로는 Hill⁷⁾이 제안한 Huber-Mises 항복기준과 결합유동법칙(associated flow rule)에 근거를 둔 증분소성이론(incremental theory of plasticity)을 사용하였다. 한편, 기하비선형 이론으로는 Total Lagrangian 좌표계를 기초로 von Karman의 대변형-소변형률 이론에 의한 Green 변형률 텐서와 Piola-Kirchhoff 응력텐서로 구성 방정식을 유도하였다. 따라서, 탄소성 재료에 대한 응력-변형률 증분관계는 식(4)과 같다.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl} \quad (4)$$

여기서, C^{ep} 는 탄소성계수(elastic-plastic modulus)를 의미하며 4차 텐서량으로 식(5)과 같다.

$$C_{ijkl}^{ep} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) - 2G\lambda \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}' \sigma_{kl}'}{\sigma^2} \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{1 + \frac{H}{3G}}, \quad \alpha = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad H = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \quad (6)$$

여기서, E 는 Young 계수, G 는 전단 탄성계수, α 는 체적계수, ν 는 Poisson 비, α 는 이방성계수 그리고 H 는 소성경화계수(plastic hardening modulus)로서 탄성-완전소성 재료와 탄성-선형변형경화 재료인 경우에는 각각 상수값을 의미하며 탄성-변형경화재료인 경우에는 유효소성변형률의 함수가 된다. 또한, $\bar{\sigma}, \overline{d\epsilon^p}$, 그리고 $\sigma_{ij}', \sigma_{kl}'$ 은 유효응력(effective stress), 유효소성변형률(effective plastic strain), 그리고 편차응력(deviatoric stresses)이다.

유한요소 정식화를 통해 구성된 비선형 연립방정식은 반복적 방법을 통하여 해를 구하게 된다. 본 연구에서는 접선강성도법(tangential stiffness method)을 이용하였는데 식(7)과 같다.

$$(K_{ik}^D + K_{ik}^G)^r \Delta u_k^{(r+1)} = (f_i^{ext})^n - (f_i^{int})^r \quad (7)$$

여기서, K^D , K^G , f^{ext} , f^{int} 는 각각 재료강성도행렬(material stiffness matrix)와 기하강성도행렬(geometric stiffness matrix), 경계면에서 작용하는 절점 외력벡터와 그에 따른 내부의 절점 내력벡터이다.

$$K_{ik}^D = \int_{\Omega^{(n)}} \Psi_{i,j} C_{ijkl}^{ep} \Psi_{k,l} d\Omega \quad (8)$$

$$K_{ik}^G = \int_{\Omega^{(n)}} \Psi_{i,j} \delta_{ij} \sigma_{jl} \Psi_{k,l} d\Omega \quad (9)$$

$$(f_{ij}^{ext}) = \int_{\Gamma^{(n)}} \Psi_i T_i d\Gamma \quad (10)$$

$$(f_{ij}^{int}) = \int_{\Omega^{(n)}} \Psi_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (11)$$

여기서, n 은 하중 증분 단계를 의미하며, r 은 식(9)의 평형조건이 만족할 때까지 반복되는 반복회수이다. 결과적으로 최종 변위벡터는 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_k^n = u_k^{n-1} + \Delta u_k^{r+1} \quad (12)$$

2.3 적층모델(layered Model)

복합적층평판은 각 층의 재료물성치가 상이한 경우인데 따라서 그림 2와 같은 적층모델을 이용하였다. 각 층의 경계면은 완전부착 되었다고 가정하였으며, 층의 두께를 임의로 설정할 수 있으며, 한 개의 p -version 유한요소에 전체 10개의 층을 가질 수 있도록 구성하였다. 응력은 각 층의 중립면에서 계산되는 중립법칙(mid-point rule)을 사용하였다. 요소의 강성도매트릭스와 내력벡터는 각 층의 강성도를 적분하여 이루어진다. 한편, 평판이 붕괴상태에 도달하면, 평판의 항복은 표면에서 시작하여 중립면 쪽으로 진행하게 된다. 이때 항복된 적분점에서의 강성도는 탄소성계수 C^{ep} 를 사용하여 계산하기 때문에 평판의 탄소성 거동을 정확히 파악할 수 있다.

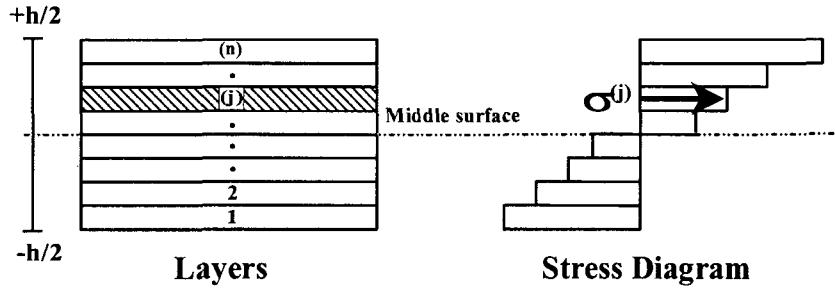


그림 2. 적층모델과 응력도

3. 수치해석 예제

3.1 분포하중을 받는 고정지지 평판의 재료비선형 해석

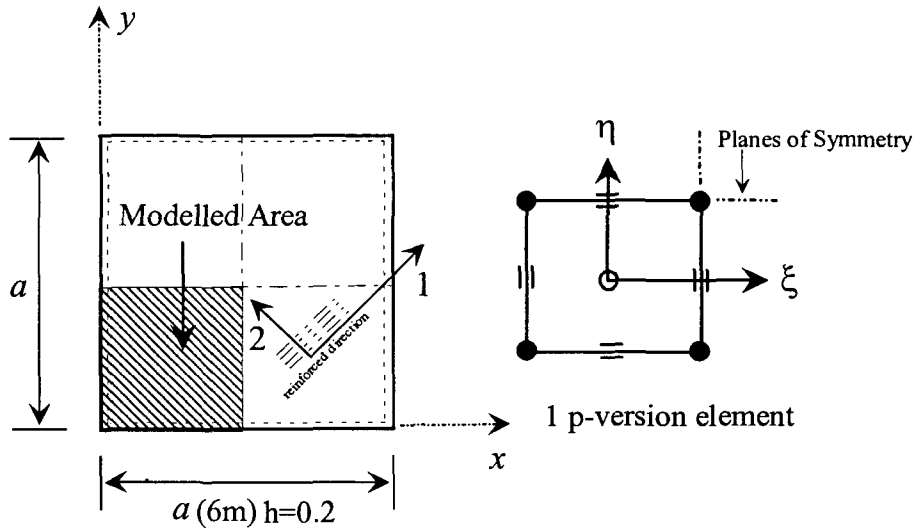


그림 3. 해석예제와 p-version 유한요소모델

분포하중을 받는 고정지지 평판의 해석예제는 그림 3과 같고 체눈설계(mesh design)는 대칭성을 고려하여 1/4모델만이 고려되었고 1개의 요소만을 사용하여 모델링하였다. 예제의 해석에 이용되는 재료의 물성치는 표 1과 같고 탄성-완전소성재료이다.

표 1. 재료물성치(단위 : MN, m)

재료상수	E_1	E_2	G_{12}	G_{13}	G_{23}	$\bar{\sigma}_o$	σ_{o1}	σ_{o2}	σ_{o45°	τ_{o12}	τ_{o13}	τ_{o23}	ν_{12}
등방성 재료 (Isotropic)	30000	30000	11540	11540	11540	30	30	30	30	17.32	17.32	17.32	0.3
이방성 재료 (Anisotropic)	30000	30000	11540	11540	11540	30	30	40	35	20.2	17.3	17.3	0.3

여기서, 첨자 1, 2, 3은 재료좌표계(material coordinates), E_1 과 E_2 는 1, 2방향 탄성계수, G_{12} , G_{13} 과 G_{23} 는 12, 13, 23방향의 전단탄성계수, 첨자 o는 항복(yielding)을 의미한다. 또, $\bar{\sigma}_o$ 는 기준방향(reference direction)에서의 등가항복응력(equivalent yield stress), σ_{o1} 과 σ_{o2} 는 1, 2방향으로의 항복응력, σ_{o45° 는 1, 2 재료좌표계의 사이각 45° 방향으로의 항복응력을 나타낸다. 그리고, τ_{o12} , τ_{o13} , τ_{o23} 는 12, 13, 23방향의 전단항복응력, ν_{12} 는 포아송 비이다. 해석결과의 일반성을 보이기 위해 아래와 같은 무차원 계수(nondimensional parameter)를 채택하였다. 즉, $\bar{q} = qd^2/10M_p$, $\bar{w} = w(a/2, a/2)100D/a^2M_p$, $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, y, h/2)$ 이다. 여기서, q 는 분포하중, w 는 최대처짐, D 는 평판의 휨강성, M_p 는 소성모멘트, h 는 평판의 두께, a 는 변의 길이이다.

그림 4에는 고정지지 등방성 평판의 극한하중 해석 결과를 도시한 것이다. \bar{q} - \bar{w} 의 하중-변위곡선과 이로 인한 극한하중의 산정이 형상함수의 차수 p 의 변화에 따라 나타내었다. 그리고, Owen⁴⁾의 Heterosis 요소를 사용한 결과와 비교하였다. p-version 유한요소모델에서 형상함수의 차수 p 는 3차에서 8차까지 사용하였고, Heterosis 요소의 경우 균등체눈설계(uniform mesh design)에 의해 9개의 요소(3×3)에서부터 49개의 요소(7

×7)를 사용한 결과를 나타내었다. 상한계-하한계 평균값에는 p -version 모델의 경우 차수 p 가 8차일 때 (NDF=152) 그리고 Heterosis 요소를 사용한 모델의 경우 49개 요소(NDF=835)를 사용한 경우에 수렴하는 것을 알 수 있다. 그림 5~그림 7은 \bar{q} 의 하중증가에 따른 평판의 표면과 중립면에서의 소성영역의 확산양상을 도시하였다.

3.2 분포하중을 받는 고정지지 평판의 재료 및 기하비선형 해석

그림 8은 분포하중을 받는 고정지지 평판의 비선형 효과가 검토되었다. 재료비선형을 고려한 경우, 기하비선형을 고려한 경우, 그리고 재료비선형과 기하비선형을 동시에 고려한 경우에 대해 각각 하중-변위곡선을 도시하였다. 재료 및 기하비선형을 동시에 고려한 경우 평판내의 2차 응력효과(secondary effect)에 의한 면내응력의 증가로 하중-변위 곡선은 재료가 항복된 후에도 점진적으로 상승하는 것을 알 수 있다. 즉, 그림에서 보는 바와 같이 등방성재료의 경우 초기항복(initial yielding)이후 평판의 거동은 재료비선형과 기하비선형의 경우는 물론이고 비선형을 모두 고려한 경우 현격한 차이를 보여주고 있다. 특히, 재료비선형을 고려한 탄소성해석은 기하비선형까지 동시에 고려한 해석과 비교할 때 극한내하력에 많은 차이를 보여주며, 이는 이방성재료의 경우도 비슷한 양상을 보여준다.

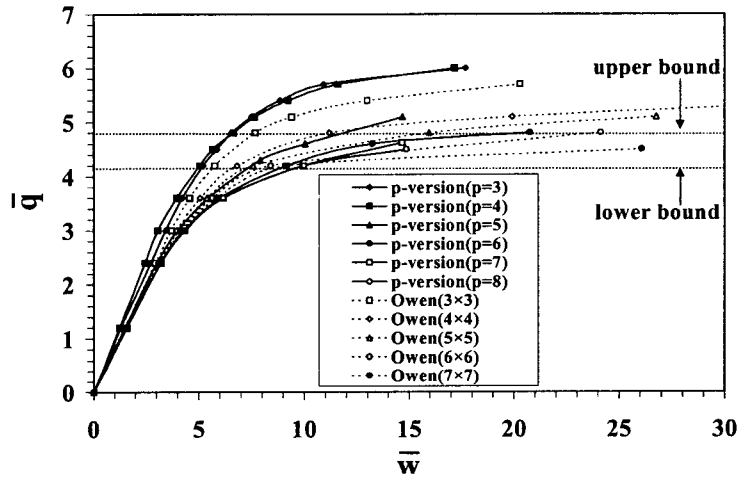


그림 4. 분포하중을 받는 고정지지 평판의 극한하중

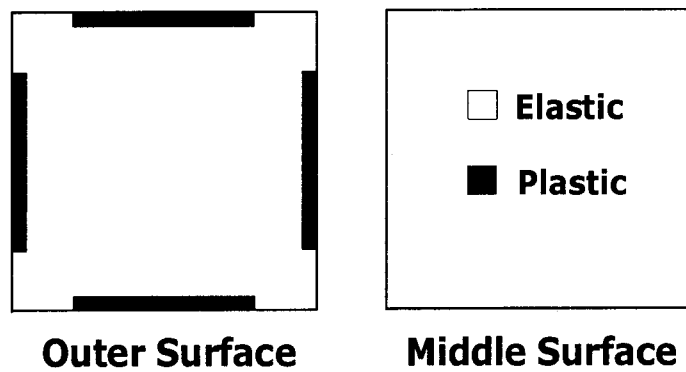


그림 5. $\bar{q}=3.0$ 인 경우 평판의 표면과 중립면에서의 소성영역

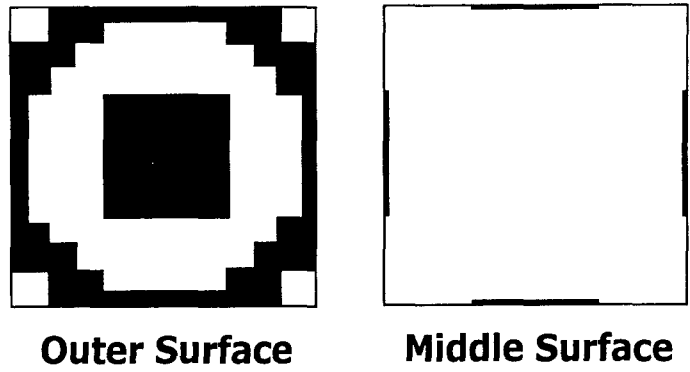


그림 6. $\bar{q}=3.9$ 인 경우 평판의 표면과 중립면에서의 소성영역

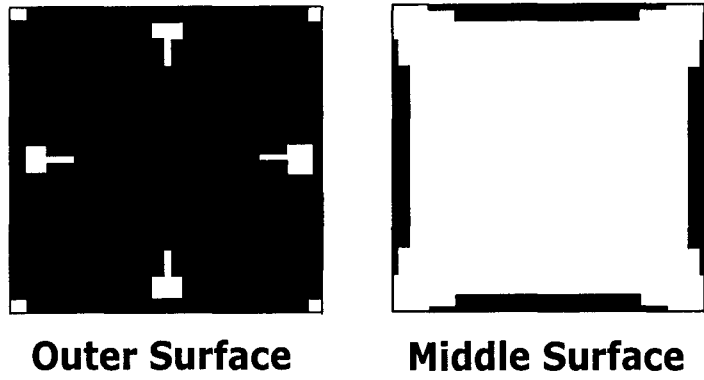


그림 7. $\bar{q}=4.6$ 인 경우 평판의 표면과 중립면에서의 소성영역

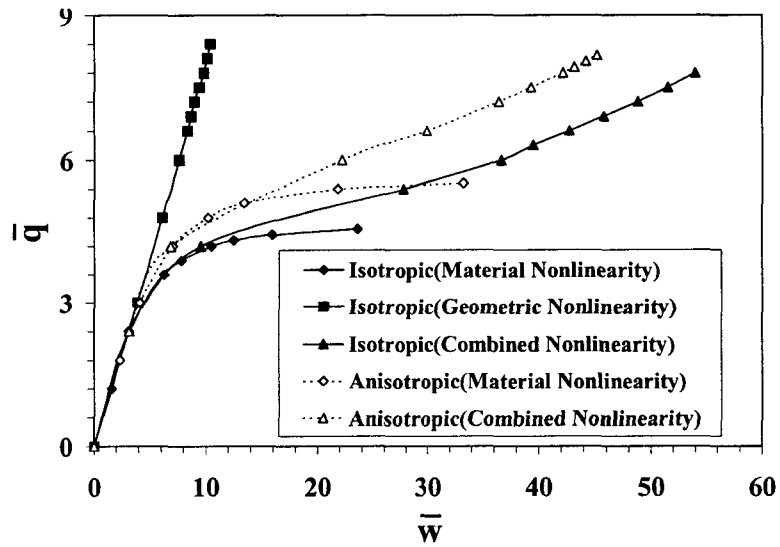


그림 14. 분포하중을 받는 고정지지 평판의 비선형 효과

4. 결 론

본 연구에서 제안하는 p -version 유한요소모델을 이용하여 이방성 비선형평판의 해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 첫째, Gauss 적분법과 Lobatto 적분법에 의한 해의 정확도에는 차이가 없다. 그러나, Lobatto 적분법을 사용한 경우 요소의 양단의 절점에서의 응력을 별다른 보간기법 없이 직접적으로 계산할 수 있는 장점이 있다. 둘째, 이방성 적층평판의 극한하중은 탄성계수의 변화는 영향이 없고, 항복응력의 변화는 큰 영향을 미치는 것으로 분석되었다. 셋째, 층의 퇴적순서는 극한하중에 영향을 주지 않았다. 넷째, 재료비선형, 기하비선형, 재료 및 기하비선형을 동시에 고려한 경우 이방성평판의 구조적 거동에 비교적 큰 차이를 주는 까닭에 정밀해석에서는 재료 및 기하비선형을 동시에 고려한 유한요소해석이 요구된다. 이와 같이 제안된 p -version 모델은 빠른 수렴성과 모델링의 단순성으로 인해 이방성 평판의 고정밀 해석에 적합하다고 할 수 있다.

참고 문헌

1. A. Nanni, "Carbon Fibers in Civil Structures: Rehabilitation and New Construction", *Proceedings of the Global Outlook for Carbon Fiber 2000*, San Antonio, Texas, December 4-6, pp.6-12, 2000
2. X. Liu, P. F. Silva and A. Nanni, "Rehabilitation of steel bridge members with FRP composite materials", *CCC 2001 (Composites in Construction)*, Porto, Portugal, October 10-12, 2001
3. S. Ahmad, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 2, pp.419-451, 1970.
4. D. R. J. Owen and J. A. Figueiras, "Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.521-539, 1983
5. J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997
6. W. Kanok-Nukulchai, "A simple and efficient finite element for general shell analysis", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.14, pp.179-200, 1979
7. M. A. Polak, "Shear analysis of reinforced concrete shells using degenerate elements", *Comput. & Struct.*, Vol.68, pp.17-29, 1998
8. R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950