

일정체적 변단면 보의 정적 최적단면

Static Optimal Shapes of Tapered Beams with Constant Volume

이 병 구* · 이 태 은** · 최 규 문** · 김 영 일***

Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun · Choi, Kou Moon · Kim, Young Il

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to determine the static optimal shapes of tapered beams with constant volume. The linear, parabolic and sinusoidal tapers with the regular polygon cross-section are considered, whose material volume and span length are always held constant. The Runge-Kutta method is used to integrate the differential equation and also Shooting method is used to calculate the unknown boundary condition. Then the static optimal shapes are determined by reading the minimum values of the deflection versus section ratio curves plotted by the deflection data. In numerical examples, the various tapered beams are analyzed and those numerical results of this study are shown in figures.

1. 서 론

단위구조중 보는 기둥, 평판과 더불어 구조공학 관련분야에서 가장 많이 이용되고 있어 보에 대한 정적, 동적 거동에 관한 연구가 지속적으로 이루어지고 있다. 또한 구조물에 하중이 작용하는 경우에 구조물의 특성인 처짐, 회전각을 산출하는 것은 무엇보다도 먼저 선행되어야 할 해석과정이며 최대하중 능력을 갖는 구조물의 단면형상을 찾는 문제도 매우 중요하다.⁽¹⁻⁶⁾ 보의 설계에서 변단면은 전체 구조물의 자중을 줄이면서 작용하중에 대한 내하능력의 증진, 구조물의 미적 감각 및 경제적 측면 등 특정한 목적 때문에 변단면의 이용은 날로 증가하는 추세이다.

이상과 같은 연구배경으로부터 본 연구에서는 일정체적 변단면 보의 정적 거동을 해석하고 최적단면을 산정하는데 그 연구목적이 있다. 이를 위하여 일정체적 변단면 보의 정적 거동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하였다. 수치해석 예제에서는 정다각형 단면을 갖는 변단면 보를 대상으로 하중조건, 단부조건 및 단면 제원의 변화에 따른 최적단면의 변화를 고찰하였다.

2. 수학적 모형

2.1 대상 보의 변단면

그림 1 (a)는 본 연구에서 대상으로 하고 있는 지간길이가 l 이고 체적이 V 이며, 양단이 고정-고정, 고정-회전, 회전-회전으로 지지되어 있는 보를 나타내고 있다. 본 연구에서 대상으로 하고 있는 보의 모두 동일한 지간길이 l 과 동일한 체적 V 를 갖고 있다.

* 정회원 · 원광대학교 토목환경도시공학부 교수

** 학생회원 · 원광대학교 대학원

*** 원광대학교 대학원

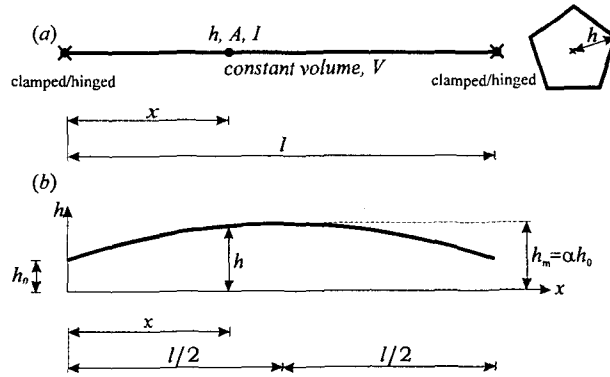


그림 1 (a) 일정체적 변단면 보 (b) 단면깊이 변화

이 보의 단면은 정다각형 단면이며, 단면의 도심에서 꼭지점까지의 단면깊이는 h 이다. 본 연구에서 h 는 단면의 축방향 좌표 x 에 따라서 변화하는 변단면 보이다. 따라서 이 보의 단면적 A 및 단면 이차모멘트 I 는 x 에 따라서 변화한다.

그림 1(b)는 x 의 변화에 따른 h 의 변화를 나타내고 있다. 이 그림에서와 같이 $x=0$ 및 $x=l$ 즉, 보의 좌, 우측 단부에서 $h=h_0$ 이고, $x=l/2$ 즉 보의 중앙에서 $h=h_m$ 이다. 보의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 단면비로 정의되는 무차원량 α 를 다음과 같이 도입한다.

$$\alpha = \frac{h_m}{h_0} \quad (1)$$

단면깊이가 h 인 정다각형의 단면적 A 및 단면 이차모멘트 I 는 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = c_1 h^2, \quad I = c_2 h^4 \quad (2-3)$$

여기서,

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (4)$$

$$c_2 = \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[1 + \frac{\tan^2(\pi/n)}{3} \right] \quad (5)$$

식 (4), (5)에서 n 은 정다각형의 변수이며 n 이 ∞ 이면 즉, 원형 단면이면 c_1 값과 c_2 값은 각각 π 와 $\pi/4$ 로 수렴한다. 또한 정다각형 단면의 도심을 통과하는 축은 모두 주축이며, 따라서 식 (3)으로 주어지는 단면 이차모멘트는 축에 상관없이 모두 동일한 값을 갖는 주단면 이차모멘트이다.

2.2 단면깊이 함수식

단면깊이 h 를 결정해주는 x 에 관한 h 의 함수식을 정의하면 다음과 같다.⁽⁷⁾ 일반적으로 보의 단면깊이 h 는 x 의 모든 함수식으로 정의될 수 있다. 본 연구에서는 연구의 대상으로 h 가 선형, 포물선, 정현 함수로 변화하는 변단면 보를 채택하였다.

선형 변단면 보의 함수식 h 는 직교좌표계 (x, h) 에서 $(0, h_0), (l/2, \alpha h_0), (l, h_0)$ 를 통과하므로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$h = h_0 \left[2c_3 \left(\frac{x}{l} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (6)$$

$$h = h_0 \left[-2c_3 \left(\frac{x}{l} \right) + 2c_3 + 1 \right], \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (7)$$

여기서,

$$c_3 = \alpha - 1 \quad (8)$$

선형 변단면 보의 체적 V 는 (2), (6), (7) 식을 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$V = \int_0^l A dx = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{3} (c_1 h_0^2 l) \quad (9)$$

위의 식에서 보의 일정체적 V 에 대한 단면깊이가 h_0 로 일정한 정다각형 보의 체적 즉 $(c_1 h_0^2 l)$ 에 대한 비율을 c_4 로 정의하면 c_4 는 다음과 같이 표시된다.

$$c_4 = \frac{V}{c_1 h_0^2 l} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{3} \quad (10)$$

같은 방법으로 포물선 변단면에 대하여 h 의 함수식 및 c_4 값을 구하면 다음과 같다.

$$h = h_0 \left[-4c_3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 4c_3 \left(\frac{x}{l} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

$$c_4 = \frac{8\alpha^2 + 4\alpha + 3}{15} \quad (12)$$

마지막으로 정현 변단면에 대하여 h 의 함수식 및 c_4 값을 구하면 다음과 같다.

$$h = h_0 \left[c_3 \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq x \leq l \quad (13)$$

$$c_4 = \frac{(\alpha - 1)^2}{2} + \frac{4(\alpha - 1)}{\pi} + 1 \quad (14)$$

위의 (11), (13) 식에서 c_3 값은 (8) 식에서 이미 정의되어 있다.

2.3 지배미분방정식

그림 2는 일반단부조건을 갖는 일정체적 보에 집중하중 P , 좌우단의 하중강도가 각각 w_1, w_2 인 사다리꼴 분포하중이 작용하는 경우에 처짐형상을 나타내고 있다. 이 처짐곡선은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의된다. 보의 축상 임의좌표 x 에서 단면적 A 및 단면이차모멘트 I 는 이미 전절에서 정의되어 있으며 이 그림에서 휨모멘트는 M , 처짐은 y 로 표시되어 있다.

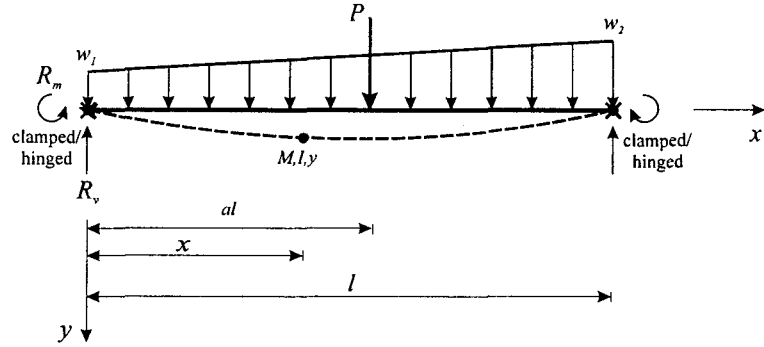


그림 2 대상 보의 수학적 모형 및 제변수

본 연구의 대상보에서 처짐곡선의 미분방정식은 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (15)$$

위의 식 (15)에서 E 는 보 재료의 탄성계수이다.

보의 좌측지점 ($x=0$) 에서 모멘트 반력을 R_m , 수직 반력을 R_v 라 하면 보의 임의점 x 에서 휨 모멘트는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_x = R_m + R_v x - \frac{w_1 x^2}{2} - \frac{(w_2 - w_1)x^3}{6l}, \quad 0 \leq x \leq al \quad (16.1)$$

$$M_x = R_m + R_v x - P(x - a) - \frac{w_1 x^2}{2} - \frac{(w_2 - w_1)x^3}{6l}, \quad al \leq x \leq l \quad (16.2)$$

대상보의 단부조건이 회전-회전이면 변단면보임에도 불구하고 정정보이므로 $R_m=0$ 이고, R_v 는 평형 방정식으로부터 산출되므로 휨 모멘트식 (16.1), (16.2)가 정의된다. 그러나 보의 단부조건이 고정-고정, 고정-회전이면 대상보는 부정정보이므로 R_m 및 R_v 를 변형일치법으로 산출하고 휨 모멘트식 (16.1), (16.2)를 정의한다. 이 경우에 변형일치법을 적용하기 위하여 보의 처짐은 중적분법을 이용하여 산출하였고, 탄성곡선의 미분방정식은 Runge-Kutta method를 이용하였다. 이 경우에 부정정보의 해석은 매우 복잡한 문제이나 이 논문에서 부정정보의 해석 문제가 주안점은 아니므로 그 자세한 해석방법은 생략한다.

2.4 무차원 변수

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad p = \frac{\pi^2 P l^4}{E V^2}, \quad q_1 = \frac{\pi^2 w_1 l^5}{E V^2}, \quad q_2 = \frac{\pi^2 w_2 l^5}{E V^2} \quad (17-21)$$

$$r_v = \frac{\pi^2 R_v l^4}{E V^2}, \quad r_m = \frac{\pi^2 R_m l^3}{E V^2}, \quad m = \frac{\pi^2 M l^3}{E V^2} \quad (22-24)$$

위의 식에서 (ξ, η) 는 직교좌표계 (x, y) 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원 집중하중, q_1, q_2 는 무차원 하중강도, m 은 무차원 휨 모멘트이다.

식 (16.1), (16.2)의 휨 모멘트식과 식 (3)의 단면 이차모멘트식을 식 (15)의 미분방정식에 대입하고 식 (17-24)의 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같은 무차원 미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{c_1^2 c_4^2}{c_2} \frac{m}{i} \quad (25)$$

위의 식에서 m 은 해석보의 단부조건에 따라서 결정되는 식 (24)로 표시되는 무차원 휨모멘트식이며 다음과 같이 표시된다.

$$m = r_m + r_v \xi - \frac{q_1}{2} \xi^2 - \frac{q_2 - q_1}{6} \xi^3, \quad 0 \leq \xi \leq a \quad (26.1)$$

$$m = r_m + r_v \xi - p(\xi - a) - \frac{q_1}{2} \xi^2 - \frac{q_2 - q_1}{6} \xi^3, \quad a \leq \xi \leq 1 \quad (26.2)$$

또한 식 (25)에서 i 는 변단면 형상인 선형, 포물선, 정현에 따라 변화하는 형상 함수식이며 변단면 형상 별로 다음 식들과 같이 정의된다.

- 선형 변단면

$$i = (2c_3\xi + 1)^4, \quad 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (27.1)$$

$$i = (-2c_3\xi + 2c_3 + 1)^4, \quad 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (27.2)$$

- 포물선 변단면

$$i = (-4c_3\xi^2 + 4c_3\xi + 1)^4, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (28)$$

- 정현 변단면

$$i = [c_3 \sin(\pi\xi) + 1]^4, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (29)$$

2.5 수치해석 방법

이상에서 유도된 무차원 지배미분방정식을 수치해석하여 무차원 탄성곡선식을 산출하여야 한다. 본 연구에서 대상보의 단부조건은 회전-회전, 고정-고정 및 고정-회전을 택하였다. 지점의 경계조건은 회전단의 경우에 $y = d^2y/dx^2 = 0$ 이고, 고정단의 경우에 $y = dy/dx = 0$ 이므로 앞에서 언급한 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

- 회전단: $\eta = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1$ 에서 (30-31)

- 고정단: $\eta = \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1$ 에서 (32-33)

해석 대상보의 m , α 값 및 단부조건이 주어지면 앞에서 유도된 식 (25)의 미분방정식을 수치해석하여 무차원 탄성곡선식을 산출할 수 있다. 식 (25)의 미분방정식은 초기치 문제이므로 $\xi=0$ 에서 경계조건이 모두 정의되어야 한다. 고정-고정, 고정-회전 보인 경우에는 식 (32-33)에서 보인바와 같이 $\xi=0$ 에서 경계조건이 모두 정의되었으므로 무차원 탄성곡선을 중적분법에 의하여 직접 산출할 수 있다. 그러나 단부조건이 회전-회전인 경우에는 $\xi=0$ 에서 경계조건 $d\eta/d\xi$ 가 미지수이므로 적분을 시행할 수 없다. 이 연구에서는 회전-회전 보인 경우에 미지수인 $\xi=0$ 에서의 경계조건 $d\eta/d\xi$ 값을 Shooting method에 의하여 산출하였다.

3. 수치해석 결과

그림 3은 단부조건이 회전-회전이며 포물선 변단면인 경우 $p=1$, $a=0.5$ 가 재하 되었을 경우 η_{max} 와 α 의 관계를 나타낸 것이다. η_{max} 값은 α 값이 증가함에 따라서 감소하다가 최소값을 보인후에 다시 증가한다. 따라서 η_{max} 값이 최소를 보이는 α 값이 정적 최적단면비 α_{opt} 가 된다. 이 그림에서 보인 바와 같이 정다각형 단면의 변수 n 값에 상관없이 α_{opt} 는 모두 2.86으로 일정하며, 최소 η_{max} 값은 정3, 4, 5각형 및 원형 단면($n=c$)의 순서로 크다. 그러므로 정적 최적단면형상은 정삼각형의 $\alpha_{opt}=2.86$ 임을 알 수 있다.

그림 4는 단부조건이 회전-회전이며 단면은 삼각형인 경우 $p=1$, $a=0.5$ 가 재하 되었을 경우 변단면에 따른 보의 α 값과 η_{max} 값의 관계를 나타낸 것이다. α 값이 1일 경우 보는 등단면이기 때문에 단면깊이 함수식에 대한 α 값은 동일하다. 또한 α_{opt} 에 대응하는 최소 η_{max} 값은 다른 단부조건과는 다르게 선형, 정현 및 포물선형의 순으로 작음을 알 수 있었다.

그림 5는 단부조건이 고정-회전이며 단면은 삼각형인 경우 $p=1$, $a=0.5$ 가 재하 되었을 경우 변단면에 따른 보의 α 값과 η_{max} 값의 관계를 나타낸 그림이다. $\alpha=1$ 인 경우에는 등단면이기 때문에 변단면별로 η_{max} 값이 동일하고 단면깊이 함수식에 대한 α_{opt} 에 대응하는 최소 η_{max} 값은 포물선형, 정현, 선형의 순으로 작다.

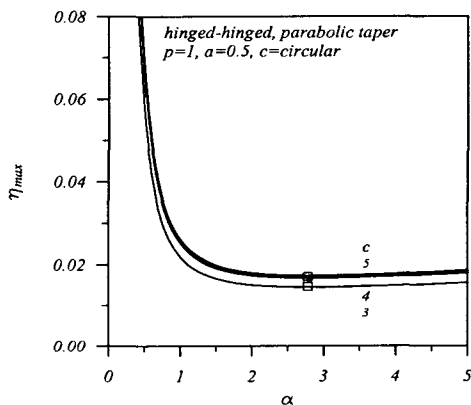


그림 3. n 과 η_{max} , α 의 관계곡선

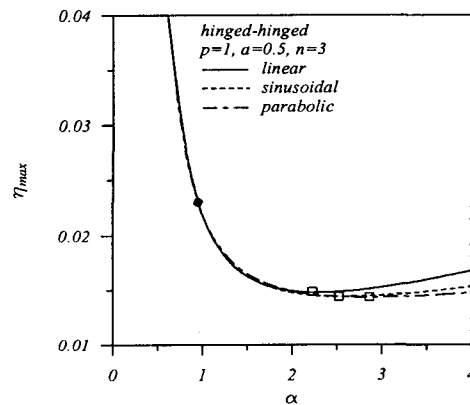


그림 4. 회전-회전보의 η_{max} 와 α 의 관계곡선

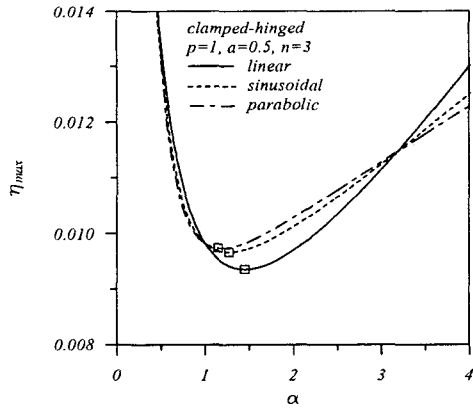


그림 5 고정-회전보의 η_{max} 와 α 의 관계곡선

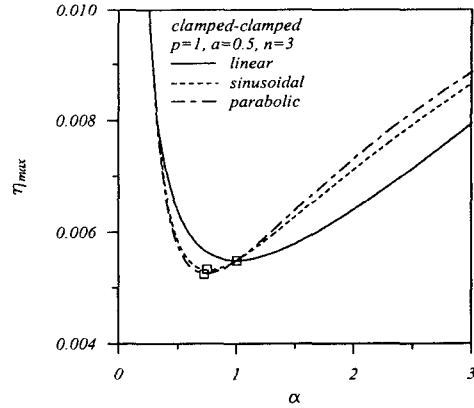


그림 6 고정-고정보의 η_{max} 와 α 의 관계곡선

그림 6은 단부조건이 고정-고정인 경우이며 단면은 삼각형인 경우 $p=1, a=0.5$ 가 재하 되었을 경우 변단면 종류별 α 값과 η_{max} 값의 관계를 나타낸 그림이다. α 값의 변화에 따른 η_{max} 값은 회전-회전의 경우와 마찬가지로 포물선형, 정현, 선형의 순으로 작게 나타난다. 고정-고정보의 경우 다른 단부조건과 다르게 최소 η_{max} 값을 갖는 최적단면비 α_{opt} 값이 1보다 작은 경우에 나타났다. 이는 고정-고정보의 경우 지점에서 휨 모멘트가 보 중앙에서의 휨 모멘트보다 크기 때문인 것으로 사료된다.

그림 7은 단부조건이 고정-고정이며 ($w_1=1, w_2=1, a=1$)가 재하될 경우 n 값의 변화에 따른 η_{max} 값의 변화를 나타낸 그림이다. η_{max} 값은 정삼각형 단면에서 가장 작은 값을 나타내며, n 값이 커짐에 따라 η_{max} 값도 증가하나 $n=5$ 이상에서는 그 변화가 거의 없다. 정오각형 단면 ($n=5$)과 원형단면 ($n=c$)의 η_{max} 값의 비는 1%미만의 차이로 보이므로 $n=5$ 이상의 정다각형 단면을 원형단면으로 대체하여도 공학적으로 무리가 없다고 판단된다.

그림 8은 변단면이 포물선이며 단면은 정사각형인 경우 집중하중 $p=1$ 의 하중위치 a 에 따라 각각의 단부조건에 따른 최강보의 α_{opt} 값의 변화를 나타낸 그림이다. 하중 위치의 변화에 따른 α_{opt} 값의 변화폭은 고정-고정 (0.705), 고정-회전 (1.026), 회전-회전 (1.326) 순으로 작게 나타났다.

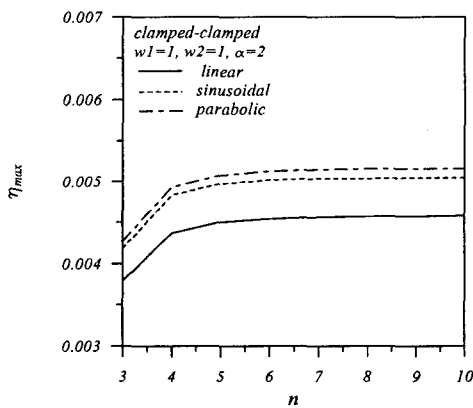


그림 7 단면깊이 함수식과 η_{max}, α 의 관계

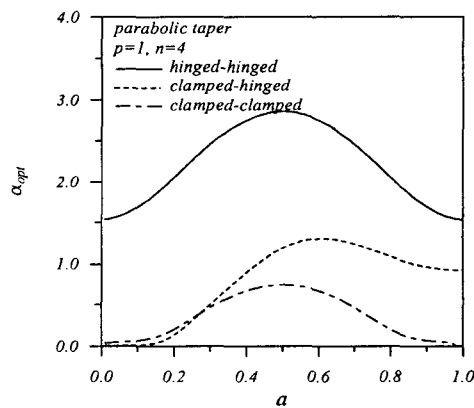


그림 8 하중위치에 따른 α_{opt} 의 변화

5. 결론

이 논문은 일정체적 변단면 보의 정적 최적단면에 관한 연구이다. 본 연구에서는 대상보의 거동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 방정식으로부터 단면비-변위사이의 관계를 이용하여 대상보의 최적단면을 산출하였다.

일련의 수치해석 결과로 다음의 내용을 고찰할 수 있었다.

- 1) 최대처짐 η_{max} 가 최소값을 갖는 최적 단면비 α_{opt} 값은 정다각형의 변수에 관계없이 항상 일정하다.
- 2) 정삼각형 단면이 다른 정다각형 단면에 비해 내하력에 유리하다.
- 3) 단부조건이 회전-회전 및 고정-고정인 경우 포물선 변단면이 처짐에 유리하며, 고정-회전인 경우에는 직선 변단면이 처짐에 유리하다.
- 4) 회전-회전 및 고정-회전의 단부조건인 경우에는 단면비가 1보다 큰 경우, 고정-고정인 경우에는 단면비가 1보다 작은 경우에 최대처짐이 최소값을 갖는 최적 단면비가 존재한다.

참고문헌

1. Keller, J. B., "The shape of the strongest column", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, No. 4, 1960, pp.275-285.
2. D. Zhou and Y. K. Cheung, "The free vibration of a type of tapered beams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 188, No. 1-3, 2000, pp.203-216.
3. D. Zhou and Y. K. Cheung, "Strain and stress analysis of a curved tapered beam model," *Computer & Structures*, Vol. 72, No. 4-5, 1999, pp.565-577.
4. Juha Paavola and Eero-Matti Salonen, "A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams," *Applied Acoustics*, Vol. 57, No. 4, 1999, pp.345-356.
5. Liz Graciela Nallim and Ricardo Oscar Grossi, "The free vibration of a type of tapered beams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 188, No. 1-3, 2000, pp.203-216.
6. S. Abrate, "Vibration of point supported triangular plates," *Computers & Structures*, Vol. 58, No. 2, 1996, pp. 327-336.
7. B. K. Lee, S. J. Oh, "Elastic and Buckling Load of Simple Tapered Column with Constant Volume," *International Journal of Solids and Structures* Vol. 37, No. 18, 2000, pp. 2507-2518.
8. James M Gere, S. P. Timoshenko, *Mechanics of Materials*, 4th ed., PWS-Kent, Bost, Mass., 1997.
9. Brice Carnahan, H. A. Luther, Fames O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Willey & sons, Inc. New York. 1969.
10. 황학주, *구조역학*, 문운당, 1998.