

강상자형 거더의 엄밀한 단면변형(Distortion) 해석 Exact Distortional Deformation Analysis of Steel Box Girders

진 만 식* 광 태 영** 이 준 석*** 김 문 영****
Jin, Man-Sik Kwak, Tae-Young Lee, Jun-Suk Kim, Moon-Young

ABSTRACT

Main goal of this study is to develop MATLAB programming for exact analysis of distortional deformation of the straight box girder. For this purpose, a theory for distortional deformation theory is firstly summarized and then a BEF (Beam on Elastic Foundation) theory is presented using analogy of the corresponding variables. Finally, the governing equation of the beam-column element on elastic foundation is derived. An element stiffness matrix of the beam element is established via a generalized linear eigenvalue problem. In order to verify the efficiency and accuracy of the element using exact dynamic stiffness matrix, buckling loads for the continuous beam structures with elastic foundation and distortional deformations of box girders are calculated.

1. 서 론

얇은 판으로 구성된 폐단면의 상자형 교량은 개단면보에 비해 비틀강성이 월등히 크다. 이로 인해 편심하중을 받는 장지간의 보나 곡선 구조물에 많이 사용되고 있다. 최근의 교량건설에 있어서 도심과 도심외각지역 교량건설에 90%이상이 강상자형교량으로 건설되고 있는 실정이며, 설계추세도 기존의 강축에 대한 휨설계에서 종방향 비틀 해석까지 수행되는 정밀한 해석이 요구되고 있다. 그러나 현재 실무에서는 단면변형의 거동특성에 대한 면밀한 분석없이 습관적으로 내부 격벽의 간격을 6m 이내로 설계하고 있으며, 이것이 비합리적 설계라는 인식은 많이 대두되었으나 해석상의 어려움으로 이를 해결하지 못하고 있다.

단면변형의 문제를 해결하기 위하여 Wright et al.¹⁾은 중간격벽의 간격결정이 용이한 근사해석방법인 Analysis for analogy of beams on elastic foundation을 제시하였다.

본 연구는 단면변형의 영향을 고려한 상자형 교량의 기존의 해석방법인 Analysis for analogy of beams on elastic foundation¹⁾과 강교설계의 기초²⁾에서 제시된 단면변형의 이론에 대한 고찰을 하고, 이를 바탕으로 보다 엄밀한 단면변형에 대한 변위의 산정을 MATLAB을 이용하여 상자형 교량의 해석을 수행한다. 단면변형의 지배방정식의 유도를 통해 고유치해석을 수행하고 제시된 강도행렬은 좌굴하중산정해석을 비교함으로써 검증한다. 그리고, 외력인 비틀림하중에 의한 단면변형해석은 MATLAB을 이용하여, 결과를 상용프로그

* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정
** 유신코퍼레이션 사원
*** 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정
**** 성균관대학교 토목환경공학과 교수

램인 SAP2000와 유한 차분법 프로그램을 이용하여, 결과에 대한 타당성을 검증한다. 또한, 격벽에 대한 이론적인 해설과 응용프로그램을 통한 연구를 통하여 격벽에 대하여 보다 엄밀한 강성산정을 도모하여 일반적인 상자형단면에 단면변형의 영향에 대해 보다 엄밀한 해석을 수행하고자 한다.

2. 개선된 BEF의 엄밀해석법

단면에 작용하는 비틀하중 p 는 단면변형휨하중 p_d 와 뒹하중 p_w 로 분류하여 다음과 같이 나타낸다.

$$p = p_d + p_w = \frac{w}{\delta_1} + EI_b w'''' = K_{DW} w + EI_{DW} w'''' \quad (2.1)$$

식(2.1)을 분포하중 p 에 대한 탄성지반상보의 탄성곡선방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$w'''' + 4\beta^4 w = \frac{p}{EI_b} \quad (\text{여기서, } \beta = \sqrt[4]{\frac{1}{4EI_b\delta_1}}) \quad (2.2)$$

식(2.2)의 $1/\delta_1$ 이 탄성지반상보의 지반탄성계수 k 에 대응되면 식(2.2)는 탄성지반상보에 하중 p 가 작용할 때의 미분방정식과 일치한다. 비틀하중을 받는 상자형은 휨하중을 받는 탄성지반상보에 그림1과 같이 각각 유사된다. 따라서, 탄성 지반위의 지배방정식의 해를 구함으로써, 단면변형의 변위를 구한다.

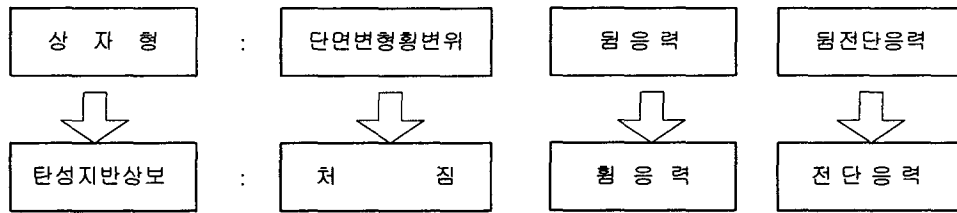


그림1. 상자형보와 탄성지반상보의 유사 과정

2.1 탄성지반위의 보-기둥 총포텐셜에너지와 지배방정식

그림2와 같이 탄성지반위의 요소에서 축방향력을 받고 등분포하중과 집중하중을 받는 보의 전단을 고려한 총포텐셜 에너지식을 변분을 취하면 다음과 같은 식(2.3)와 같은 지배방정식, 식(2.4)과 같은 경계조건, 그리고 힘변위관계 식(2.5)를 구할 수 있다.

$$EIv'''' + Pv'' + kv - F\delta(x-\xi) - q = 0 \quad (2.3)$$

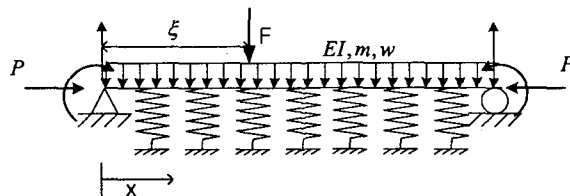


그림2. 탄성지반위의 보 시스템

$$\begin{aligned}
\delta v^p = 0 \quad \text{또는} \quad S^p &= -S(0) = EIv'''(0) + Pv'(0) \\
\delta \omega^p = 0 \quad \text{또는} \quad M^p &= -M(0) = -EIv''(0) \\
\delta v^q = 0 \quad \text{또는} \quad S^q &= S(L) = -EIv'''(L) - Pv'(L) \quad (2.4a-d) \\
\delta \omega^q = 0 \quad \text{또는} \quad M^q &= M(L) = EIv''(L) \quad (2.4) \\
S &= -EIv''' + Pv', \quad M = EIv'' \quad (2.5)
\end{aligned}$$

2.2 제차해 선정

연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하기 위하여 변위 파라메타 $d_i (i=1\sim 4)$ 를 식(2.6)과 같이 가정한다.

$$d_1 = v, \quad d_2 = v', \quad d_3 = v'', \quad d_4 = v''' \quad (2.6)$$

이 식을 지배방정식에 대입하고 정리하면 다음과 같은 행렬의 형태로 표현할 수 있다.

$$[A]\{d_i\}' = [B]\{d_i\} + \{e\} \quad (2.7)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k}{EI} & 0 & -\frac{P}{EI} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{e\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{F}{EI} \delta(x-\xi) + \frac{q}{EI} \right\}^T$$

먼저, 식(2.7)의 일반해를 얻기 위하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$[A]\{d_i\}' = [B]\{d_i\} \quad (2.8)$$

또한 절점의 변위는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d_i = \sum_{k=1}^4 a_k Z_{ik} e^{\lambda_k x}, \quad d_i' = \sum_{k=1}^4 a_k \lambda_k Z_{ik} e^{\lambda_k x} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2.9)$$

위 두 식을 식(2.8)에 대입을 하여 간략화를 시키면 다음과 식(2.10)으로 변환 시킬 수 있다.

$$([A](\lambda_k) - [B])[Z_{ik}] = 0 \quad (2.10)$$

위의 식으로부터 복소수 형태로 4개의 고유치, 4×4 고유벡터 그리고 $[Z_{ik}]$ 를 구할 수 있다. 이로써 다음과 같은 식(2.7)의 제차해를 나타낼 수 있다.

$$\{d\} = [X_{ij}]\{a\} \quad \text{여기서,} \quad [X_{ij}] = [Z_{ij} e^{\lambda_j x}]_{4 \times 4} \quad (\text{단, } ij=1\sim 4) \quad (2.11)$$

2.3 비제차해 산정

식(2.7)의 특이해를 구하기 위하여 등분포 하중의 경우와 집중하중이 재하 될 경우를 구분하여 해를 구한다. 등분포하중의 경우는 식(2.12)와 같이 등가 절점하중으로 치환하여 식(2.13)과 같이 표현할 수 있다.

$$[A]\{d\}' = \{0\} = [B]\{d\} + \{e\}_q \quad (2.12)$$

$$\{d\}_p = -[B]^{-1}\{e\}_q = \{g_{dist}\} \quad (2.13)$$

여기서, $\{g_{dist}\} = -[B]^{-1}\{e\}_q = \left\{ -\frac{q}{k} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T$

또한 집중하중을 등가절점하중으로 치환하는 방법은 구간함수를 이용한다. 구하려는 요소의 위치 x 와 요소내의 집중하중 위치의 관계에 따라 식(2.14)와 같이 집중하중에 대한 일반해를 구할수 있다.

$$\{d\}_p = u(x-\xi)[X(x)][X(\xi)]^{-1} d(\xi) = \{g_{point}\} \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x < \xi & \text{이면 } u(x-\xi) = 0 \\ x \geq \xi & \text{이면 } u(x-\xi) = 1 \end{array} \right\}, \quad d(\xi) = [A]^{-1}\{e\}_p = \{e\}_p$$

식(2.13)의 등분포하중에 대한 등가절점하중과 식(2.14)의 집중하중에 대한 등가절점하중을 선형적으로 합하면 요소내부에 작용하는 하중에 대한 비제차해가 된다. 따라서, 식(2.15)과 같은 일반해를 구할수 있다.

$$\{d\}_i = [X]\{a\} + \{g\} = [X]\{a\} + u(x-\xi)[X(x)][X(\xi)]^{-1} \{e\}_p - [B]^{-1}\{e\}_q \quad (2.15)$$

2.4 절점변위 산정

한편 보의 양단의 절점 자유도에 따른 변위 파라메타를 행렬식으로 나타내면 식(2.16)과 같다.

$$\{U_i\} = [\widehat{Y}_{ij}]\{a_i\} + \{\widehat{g}\} \quad \text{여기서 } \{\widehat{g}\} = \{\widehat{g}_{point}\} + \{\widehat{g}_{dist}\} \quad (2.16)$$

$$[\widehat{Y}_{ij}] = \begin{bmatrix} Z_{11}e^{\lambda_1 l} & Z_{12}e^{\lambda_2 l} & Z_{13}e^{\lambda_3 l} & Z_{14}e^{\lambda_4 l} \\ Z_{21}e^{\lambda_1 l} & Z_{22}e^{\lambda_2 l} & Z_{23}e^{\lambda_3 l} & Z_{24}e^{\lambda_4 l} \\ Z_{11}e^{\lambda_1 l} & Z_{12}e^{\lambda_2 l} & Z_{13}e^{\lambda_3 l} & Z_{14}e^{\lambda_4 l} \\ Z_{21}e^{\lambda_1 l} & Z_{22}e^{\lambda_2 l} & Z_{23}e^{\lambda_3 l} & Z_{24}e^{\lambda_4 l} \end{bmatrix}, \quad \{U_i\} = \begin{bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_1(l) \\ d_2(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{bmatrix}$$

$$\{\widehat{g}_{point}\} = \{ 0 \quad 0 \quad [X(L)][X(\xi)]^{-1}d(\xi) \quad [X(L)][X(\xi)]^{-1}d(\xi) \}^T$$

$$\{\widehat{g}_{dist}\} = \left\{ -\frac{q}{k} \quad 0 \quad -\frac{q}{k} \quad 0 \right\}^T$$

여기서 $[\widehat{Y}]^{-1}$ 를 구하여, $\{a_i\}$ 에 대하여 다시 전개하면 다음과 같다.

$$\{a_i\} = [\widehat{Y}_{ij}]^{-1}\{U_i\} - [\widehat{Y}_{ij}]^{-1}\{\widehat{g}\} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \{d\}_i &= [X_{ij}]\{[Y_{ij}]^{-1}\{U_i\} - [Y_{ij}]^{-1}\{\hat{g}\}\} + \{g\} \\ &= [X_{ij}][Y_{ij}]^{-1}\{U_i\} - [X_{ij}][Y_{ij}]^{-1}\{\hat{g}\} + \{g\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.5 강도행렬 산정

한편 보-기둥 요소의 강도행렬을 구하기 위하여 힘-변위 관계식을 도입해야 한다. 이를 위하여 힘-변위 관계식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - [R] d(0) \\ [R] d(L) \end{Bmatrix} \quad \text{여기서, } [R] = \begin{bmatrix} 0 & -P & 0 & -EI \\ 0 & 0 & EI & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

식(2.19)에서 구한 변위 파라메타를 대입하면 다음과 같은 보-기둥 요소의 엄밀한 강도행렬을 구할 수 있다.

$$[K] = \begin{Bmatrix} - [R][X_{ij}(0)][Y_{ij}]^{-1} \\ [R][X_{ij}(L)][Y_{ij}]^{-1} \end{Bmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.20)$$

이렇게 구한 탄성지반위의 직선 보-기둥 요소의 엄밀한 강도행렬은 해석해라 할 수 있으므로, 직선 뼈대구조를 모델링할 경우에 요소의 수를 획기적으로 감소시킬 수 있으며, 경계조건의 제약도 받지 않는다. 마지막으로, 이와 같이 구한 보-기둥 요소의 강도행렬과 절점력, 절점변위와의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\{F\} = [K]\{U_i\} - [K]\{\hat{g}\} + \begin{Bmatrix} - [R] \\ [R] \end{Bmatrix} \{\hat{g}\} \quad (2.21a)$$

$$\text{여기서, } \{F\} = \{ f_1(0) \ f_2'(0) \ f_1(L) \ f_2'(L) \}^T = \{ S(0) \ M(0) \ S(L) \ M(L) \}^T \quad (2.21b)$$

3. 수치해석

본 연구에서 제안된 단면변형 해석방법을 이용하여 강상자형 보의 단면변형을 Matlab을 이용하여 수치해석을 실시하였다. 강도행렬의 검증은 탄성지반위 보에 대하여 좌굴하중을 산정하였으며 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용한 유한요소법에 의한 결과와 비교하였다.

등분포 하중에 대한 결과 검증은 '강상자거더의 뒤틀림해석에 관한 연구'의 결과와 상용프로그램인 SAP2000의 결과값과 비교검토를 하였다. 또한 탄성지반위의 보에 집중하중이 재하 될 경우 FDM Analysis Program과 비교 검증하였다. 또한 내민 플랜지를 갖고 있는 일반적인 단면에 격벽이 있을 경우, 이에 대한 단면변형의 검토는 상용프로그램(SAP2000)과 비교·검토하였다.

3.1 좌굴하중산정

그림3과 같이 축하중을 받는 탄성지반위의 보의 좌굴하중을 본 이론에서 제안된 강도행렬을 이용하여 산정하였고, 이를 Hermitian 다항식을 이용한 유한 요소 프로그램 결과와 비교 검토하였다. 여기서, $L = 50\text{m}$, $EI = 5000 \text{ Nm}^2$, $k = 2.0 \text{ N/m}^2$ 이며, 해석결과는 표1과 같다.

표1. 탄성지반위 보의 좌굴하중(N)

mode	Present study (element 2)	F. E. solution (element20)
1	205.61	205.62
2	217.36	217.43
3	234.95	234.13

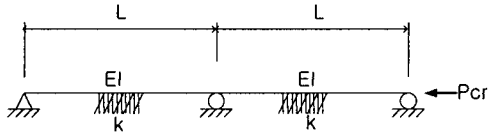


그림3. 2경간 탄성지반위의 보

3.2 박스형 거더의 단면변형 변위산정

일반적인 단일박스 구조물을 이용하고, 본단면의 단면변형 상수(K_{DW} , I_{DW})를 계산한다. 단면의 형상 및 제원은 아래 그림4와 표2와 같다. 이러한 단면을 이용하여 단면의 I_{DW} 과 단면변형에 대한 강성 K_{DW} 을 계산한다.

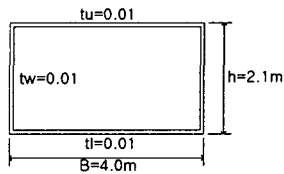


표2. 단면제원

E	21000000 tonf/m ²
L	36.0 m
K_{DW}	11.257 ton · m
I_{DW}	0.0781 m ⁶

그림4. 강박스거더

본 연구에서 제안된 탄성지반위보의 해석에 관한 Eigen Analysis Method을 이용한 이론을 MATLAB을 이용하여 프로그램화하였다. 이에 대하여 그림5와 같이 등분포 하중을 3tonf/m를 재하하였다. 이로써 얻은 결과를 SAP2000 및 Ritz 방법을 이용한 프로그램(강상자거더의 뒤틀림 해석연구)을 비교하여 결과에 대한 타당성을 검토하였다. 그림5과 표3는 지간의 중앙에서 단면변형의 변위를 방법에 따라서 비교한 것이다.

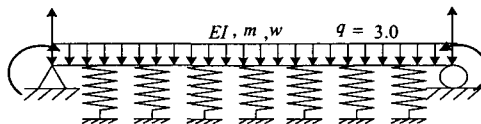


그림5. 탄성지반위의 보의 분포하중재하

표3. 등분포하중 재하시 단면변형의 변위 비교

구 분	Eigen Analysis Method (element = 1)	Ritz Method (n = 1, 3, 5, 7)	SAP2000 (element = 100)	SAP2000 (element = 200)
단면변형변위 (θ)	0.031818	0.031902	0.033522	0.031800

집중하중 재하시 본연구를 통해 제시된 결과값의 타당성을 검토하기 위하여, 그림6과 같이 하중을 재하하

였을 때 지간 중앙에서의 단면변형의 변위를 FDM을 이용한 프로그램의 결과와 비교하였다.(표4)

표4. 집중하중 재하시 단면변형 변위 비교

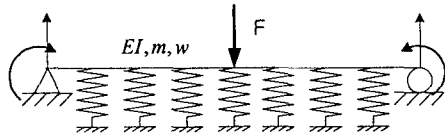


그림6. 탄성지반위의 보에 집중하중재하

구 분	단면변형의 변위 (θ)
Eigen Analysis Mehtod (element = 1)	0.044753
FDM Fortran Program (element = 12)	0.044783

3.3 격벽이 있는 보의 등분포 하중재하

격벽이 있는 보의 단면변형 해석 검토를 위하여, 일반적인 단면을 이용하고, 격벽의 영향을 적용시킨다. 여기서 격벽의 강성 K_{dia} 을 계산은 편심하중을 받는 상장형의 거동해석³⁾의 방법에 따르며, 이와 동일한 스프링의 강성을 적용시키므로써 결과를 검토, 비교한다.

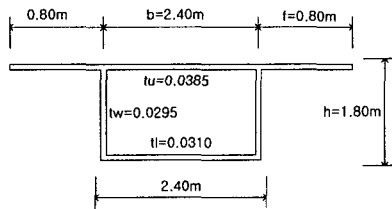
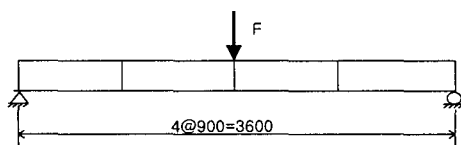


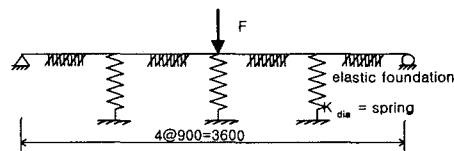
그림7. 일반 강박스 거더

표5. 단면제원 및 단면상수

E	21000000 tonf/m ²
L	36.0 m
K_{DW}	9.312 ton · m
I_{DW}	0.0643 m ^b
K_{dia}	28.767 ton · m



(a)



(b)

그림8. 격벽을 가지는 강박스 거더 보(a)와 격벽 스프링을 갖는 탄성지반위의 보(b)

표6. 격벽이 있는 보의 중앙에서 단면변형 변위 비교

구 분	단면변형의 변위 (θ)
Eigen Analysis Mehtod (element = 2)	0.008191
SAP2000 (element = 20)	0.008852
SAP2000 (element = 100)	0.008313
SAP2000 (element = 200)	0.008210

그림7의 단면을 이용하여 단면의 I_{DW} 와 단면변형에 대한 강성 K_{DW} 을 계산한다.(표5) 또한 격벽의 두께는 $t_p=2cm$ 로 하고 간격은 등간격으로 배치하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 단면변형의 이론적인 고찰을 통하여, 일반적인 상자형단면에서 단면변형효과에 의한 변위를 산정하는 엄밀한 강도행렬 구성하였다. 또한, 다양한 하중이 작용 할 경우에 대하여 단면변형의 변위를 산정 할 수 있는 이론을 구축함으로써 다양한 적용을 가능케 하였다. 이에 대한 결과는 상용프로그램(SAP2000) 및 FDM을 이용한 Fortran 프로그램과 비교 검토하여 타당성 여부를 검토하였다. 이러한 결과는 앞으로 단면변형 효과를 BEF 이론을 기반으로 하여 일반적인 상자형 거더에 적용시킬 수 있게 하며, 보다 효율적인 계산을 가능케 하는 기본적인 토대가 될 수 있다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

- (1) 단면변형(distortion)에 대한 이론적 기본적인 이해를 토대로 격벽이 있는 상자형 거더에서 단면변형의 변위를 보다 엄밀하게 산정하였다. 이는 BEF이론 방법에서 제시된 지배방정식을 Eigenvalue 해석을 통하여 단면변형의 변위를 효과적으로 해석하였다.
- (2) MATLAB으로 제작된 본 프로그램을 이용하면, 유한요소를 이용한 단면변형해석보다 훨씬 적은 요소에서도 우수한 정확도를 가지며, 빠른 해석이 가능하다. 수치예제에서 제시된 바와 같이 100여개의 요소를 가지는 유한요소 해석이나 여섯 개의 요소를 가지는 FDM의 방법과 비교하여, 한 개의 요소로써 매우 정확한 결과값을 얻을수 있으며 적은 요소수로 인하여 해석시간의 단축의 효과를 가져올 수 있다.
- (3) 강도행렬에 대한 검증은 좌굴하중에 대하여 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하는 유한요소법을 이용한 프로그램과 비교하였다. 그리고, 등분포하중 및 집중하중에 대한 변위 산정은 FDM을 이용한 프로그램과 상용프로그램인 SAP2000의 결과를 비교하므로써 타당성을 검증하였다. 또한, 격벽이 있는 일반적인 박스형 단면에 대한 단면변형의 변위를 비교하므로써, 본 연구에 대한 타당성을 검증하였다
- (4) 단면변형의 변위를 산정하기 위한 방법으로 BEF 이론에서 제안된 바 있는 4계 미분방정식으로 구성된 지배방정식을 Eigen-Analysis를 이용하여 구하므로써, 엄밀한 강도행렬을 산정하고 이에따른 변위를 구하였다. 이는 단면변형의 변위 해석뿐만 아니라, 탄성지반위에 놓인 보의 해석에서 축방향력, 등분포하중 및 집중하중등 다양한 하중조건에도 좌굴하중 및 자유진동해석을 엄밀한 강도행렬을 통해 해석이 가능하다.
- (5) 단면변형 이론의 근본적인 이해를 통해 박스형 구조물에서의 단면변형 효과에 의하여 단면에 작용하는 응력을 구하는 연구로 진행되는 기본적인 토대를 마련하였다.

참고 문헌

1. Wright R.N., Abdel Samad, S.R., and Robinsion A.R., "BEF analogy for analysis of box girders" , *Journal of Structural Division*, Vol.94, No.ST7, 1968, pp.1719-1743.
2. 방명석 譯, "강교설계의 기초", 도서출판건설도서, 1993.
3. 정희효, "편심하중을 받는 상자형의 거동해석", 서울대학교 공학박사학위논문, 1986
4. Razaqpur A.G. and Li H., "Thin-walled multicell box-girder finite element" , *Journal of Structural Engineering*. Vol.117, No.10, 1991, pp.2953-2971.
5. Kollbrunner, C.F. and Basler, K., "Torsion in structures" , Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1969.