

## 무요소법에서 RKPM 을 이용한 보 해석 방안

### Beam analysis methods using RKPM

송 태 한\*  
Song, Tae-Han

#### ABSTRACT

In this paper, effective analysis of beam is studied using the RKPM in meshless methods. So, RKPM is extended for solving moderately thick and thin beam. General Timoshenko beam theory is used for formulation. Shear locking is the main difficulty in analysis of beam structures. The shear relaxation factor and corrected shear rigidity are introduced to overcome shear locking. Analysis results obtained reveal that RKPM using introduced methods is free of locking and very effectively applicable to deeply as well as shallowly beams.

#### 1. 서 론

무요소법은 유한요소법, 유한 체적법등 수치해석법의 적용과정에서 발생하는 요소구성에 대한 근본적인 문제를 해결하기 위해 제안된 방법이다. 1990년대 초반부터 연구되기 시작한 무요소법은 해석 영역에 배치된 점들만으로 형상함수를 구성하여 수치해석이 이루어지는 간편함으로 인해 집중적인 연구가 이루어지게 되었으며 형상함수를 구성하는 수식화 방법에 따라 여러 가지 이름으로 개발 되었고<sup>(1-4)</sup> 각종 문제에 적용되면서 해석의 영역을 넓혀가고 있다

무요소법을 이용한 보의 해석으로는 Liu 등<sup>(6)</sup>이 RKPM 을 적용한 얇은 보 해석을 위한 HRKPM 의 이론적 배경과 간단한 예제를 보였다. Atluri 등<sup>(7)</sup>이 일반화된 최소 자승법을 적용하여 얇은 보와 평판에 대한 수식을 전개하였으며 얇은 보 예제에 적용하였다. 강성과잉이 문제가 되고 있는 두꺼운 보 및 평판에 대해서는 Liu 등<sup>(8)</sup>이 형상함수가 가중함수의 특성에 좌우되어 가중함수와 유사한 형태를 갖는데 착안하여 필수 경계조건을 만족시키는 스플라인 함수를 제안하고 이를 형상함수로 이용하여 티모센코 보(Timoshenko beam) 문제를 해석하였다. 또한, 최근에 Duarte 등<sup>(9)</sup>은 강성과잉을 해결하기 위해 고차의 근사함수를 쉽게 이용할 수 있는 h-p Cloud 법에 적용하여 두꺼운 평판문제를 해결하였다.

본 논문에서는 RKPM 을 이용하여 전단변형을 고려한 보에 대하여 간단한 방법으로 확장 적용할 수 있도록 연구 하였다. 일반적인 RKPM 의 수식을 티모센코 보이론에 적용하였으며 기존의 복잡한 스플라인 함수를 이용하는 방법과는 달리 전단 강성과잉현상을 제거하기 위한 방법으로 간단히 완화 계수를 이용하는 방법과 수정 전단계수를 이용하는 방법을 소개, 제안하였으며 이를 바탕으로 강성과잉이 나타나는 실제 문제에 적용하여 수치적 안정성과 보 단면의 두께에 따른 거동 해석의 정확성을 살펴보고자 한다.

#### 2. RKPM 의 기본방정식

RKPM 은 다음과 같은 수정 커널 함수를<sup>(3,6)</sup> 정의하여 이용한다.

\* 대덕대학교 컴퓨터응용설계계열, 전임강사

$$u^R(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_{\bar{x}}} u(\bar{\mathbf{x}}) \tilde{\phi}_{a(\bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) d\Omega_{\bar{x}} \quad (1)$$

$u^R(\mathbf{x})$ 은 원래의 함수  $u(\bar{\mathbf{x}})$ 를 영향영역 반경  $a(\bar{\mathbf{x}})$ 를 갖는 수정커널함수를 이용, 변환하여 얻은 함수이다. 여기서 수정 커널 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{\phi}_{a(\bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \mathfrak{R}(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \phi_{a(\bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (2)$$

단,

$$\mathfrak{R}(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=0}^N b_i(x)(x - \bar{x})^i \equiv \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = [b_0(x) \quad b_1(x) \quad b_2(x) \quad \dots] \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = [1 \quad (x - \bar{x}) \quad (x - \bar{x})^2 \quad \dots] \quad (5)$$

$\phi_{a(\bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 은 커널함수를 나타낸다. 식(1)에  $u(\bar{\mathbf{x}})$ 의 테일러 급수를 이용하여 대입하고 재생조건의 고차 일관성조건을 부여하여 정리하면 다음과 같은 형태의 RKPM 형상함수를 얻게 된다.

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(0) \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \phi_{a(\bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (6)$$

단,

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \phi_{a(\bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}^T(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots] \quad (8)$$

여기서 형상함수의 계산에 사용되는 커널함수는 영향영역 내의 절점들과의 연관을 맺어주는 역할을 하는 함수로서 여러 가지가 사용되고 있으나 논문에서는 3차 스플라인 함수를 적용하였다. 또한 무요소법에서 형상함수가 크로벡터 델타의 성질을 갖고 있지 않아서 경계조건의 처리에 어려움이 있는데 이를 위해 형상함수 수정법<sup>(12)</sup>을 이용하였다.

### 3. 두꺼운 보 이론

보의 길이가 단면 높이에 비하여 비교적 길지 않아 전단을 고려하는 티모센코 보의 처짐과 단면의 회전각을 각각 주변수로 취급하게 된다. 따라서 보의 한 점에서 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u &= -y\theta \\ v &= v(x) \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서  $u$ ,  $v$ 는 각각  $x$ ,  $y$  방향의 변위,  $\theta$ 는 단면의 회전각을 나타낸다. 이를 이용하면 변형율과 응력은 다음과 같다.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx} \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = -\theta(x) + \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (11)$$

$G$ ,  $E$ 는 각각 전단계수와 Young 계수이다. 또한, 티모센코 보의 전체 포텐셜 에너지는 식(12)로 표현된다.

(12)

여기서  $\kappa^2$ ,  $p(x)$ 는 각각 전단 보정계수, 단위 길이당 분포로 하중을 나타낸다.

#### 4. 강성과잉

강성과잉 현상은 보나 판등에서 단면의 두께가 길이에 비해 작아지는 경우 전단변형에너지가 굽힘에너지보다 상당히 커짐에 따라 해의 정확도를 저하시키는 현상이다. 식(12)에서 길이가 일정한 경우 전단강성과 굽힘강성에  $t^2$ 의 차이가 나타나게 되는데  $t$ 의 값이 영에 가까워짐 따라 값의 차이가 현저히 나타나게 되며 전단에너지의 값이 과대평가 된다. 이러한 강성과잉 현상을 해소하기 위해 기존의 유한 요소법에서는 감차 적분이나 고차의 요소를 사용하는 방법이 제안 되고 있다. 그러나 무요소법에서는 적분의 특성상 감차적분의 적용이 곤란하며 고차의 요소를 사용하는 경우에는 기저함수의 차수를 증가시킬 수는 있으나 무요소법에서 많이 사용하고 있는 방법인 RKPM 이나 EFGM 에서는 형상함수를 얻기 위한 수식화 과정에 들어가는 역행렬을 구해야 하는 단점으로 인해 적용에 어려움이 있다. 따라서 이러한 방법들 이외에 다른 형태의 방법들을 고려해야 한다.

##### 4.1 전단완화 계수

우선, 무요소법이 유한 요소법의 단점을 개선하기 위해 만들어진 방법이므로 그 수치 해석적 과정과 내용이 유한요소법과 유사한 점을 이용하여 전단완화 계수를 적용하는 방법을 도입하였다. Tessler 등<sup>(10-11)</sup>은 유한요소법에서 강성과잉 현상을 제거하기 위하여 두 가지 방법을 제안한다. 우선 앞은 보를 기초로 보요소에 가상의 절점 변위를 도입하여 각 변위장의 차수를 달리하는 것과 강성과잉을 제거하도록 완화계수(shear relaxation factor)를 이용하는 방법이다. 본 논문에서는 이러한 Tessler 의 방법 중 완화 계수를 적용하는 방법을 채택하여 무요소법인 RKPM 에서의 강성과잉 현상을 쉽게 해결하고 두꺼운 문제에 효과적으로 적용할 수 있도록 하였다.

일반적인 강성행렬의 형태는 다음과 같이 굽힘 강성과 전단강성으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{K}_s$ 는 각각 굽힘과 전단의 강성행렬을 나타내며, 이러한 수식에 다음과 같은 전단완화 계수  $\phi^2$ 를 도입하여 수정된 강성행렬을 얻게 된다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \phi^2 \mathbf{K}_s \quad (14)$$

또한 여기에 사용되는 전단 완화계수는 다음식과 같이 정의된다.

$$\phi^2 = (1 + C_s^{-1} \beta)^{-1} \quad (15)$$

$$\beta \equiv \sum k_s^e / \sum k_b^e \quad (16)$$

여기서  $\beta$ 는 각 변형과 관련된 전단과 굽힘 강성의 합에 대한 비율을 말하여  $C_s$ 는 영구 상수로써 수치 실험을 통하여 얻게 된다.

##### 4.2 수정전단계수

또한, 강성과잉현상이 전단에너지와 굽힘에너지의 관계에서 얻어지는 단면의 두께  $t^2$ 에서 발생하는 데 착안하여 전단강성과 굽힘강성, 그리고 길이의 제곱을 이용하는 수정전단계수(corrected shear rigidity)를 제안하여 강성과잉 효과를 제거하고자 하였다.

$$GA^* \equiv \{(GA)^{-1} + \alpha(I^2 / EI)\}^{-1} \quad (17)$$

여기서  $G$ ,  $A$ ,  $I$ 는 각각 전단계수, 단면적, 단면 2차 모멘트를 의미한다. 또한  $\alpha$ 는 영구 상수로써 두께에

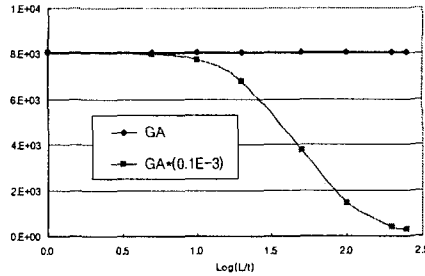


Fig. 1 Comparison of shear rigidity according to L/t

다른 전단계수의 값을 보정하는 역할을 하게 된다. 간단히 두께에 따른 전단계수와 수정 전단계수의 값의 변화를 살펴보기 위하여 길이가 L, 두께가 t, 단면의 형상이 정사각형이고  $\alpha$ 가 0.1E-3 일 때 값들의 변화를 Fig 1에 나타내었다. 그림을 살펴보면 단면의 두께에 따라 두 값의 차이가 달라지는 데 두께가 두꺼운 부분에서는 수정 전단계수와 전단계수의 값이 동일한 값을 보이다가 길이에 비해 두께가 얇아지면서 수정전단계수의 값이 작아지고 있다. 이것은 수정전단계수가 단면두께  $t^2$ 의 차이를 보정하며 길이와 두께비에 따라 제한 조건으로 작용함을 나타내는 것이다. 즉, 단면이 두꺼운 쪽에서는 티모센코 보의 특성을 살려주고 단면이 얇아지면 전단의 영향을 감소시켜 강성과잉현상을 없애주어 오일러보의 성질을 나타내도록 함으로써 보 해석을 효과적으로 할 수 있도록 하는 것이다.

이러한 수정전단계수의 사용은 전단완화계수에 비해 수치해석 결과는 유사하면서 아주 간단한 방법으로 프로그래밍 할 수 있는 장점이 있다.

## 5. 수치예제 및 검토

### 5.1 영구상수의 결정

#### 5.1.1 전단완화계수의 영구상수

전단완화계수의 적용에 있어서 영구상수는 해의 정확성에 영향을 미치게 되므로 최적의 상수값 결정이 필요하다. 본 논문에서는 이러한 영구상수를 구하기 위해 외팔보, 단순보 그리고 양단 고정보에 각각 집중하중과 분포하중을 받고 있는 경우를 비교 검토하여 적절한 값을 찾고자 하였다. 결과는 다음과 같은 식에 의해 보의 길이와 두께비에 따른 변위의 상대 에너지 높을 이용하였다.

$$r = \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_{L_2}}{\|u^{exact}\|_{L_2}} \quad (18)$$

먼저 Fig. 2와 같이 외팔보에 집중하중을 받고 있는 예제를 이용하여 영구상수를 구하기 위한 수치 실험을 하였다.

수치결과의 L2 놈 값을 Fig. 3에 도시 하였다. 그림에서 비교 데이터인 0.3, 1, 2, 3, 4는 두께에 대한 길이의 비에 상용로그를 취한 값을 나타낸다. 전체적으로 L2 놈의 차수가 낮게 형성되어 해의 값은 신뢰할 수 있으나 두께의 변화에 따라 결과가 조금씩 달라지고 있음을 보이고 있다.

따라서 두께의 변화에 대해서도 일관된 결과를 얻을 수 있도록 하기위해 식 (19)와 같은 평균편차의 값을 이용하여 두께에 따른 편차가 적게 발생하는 값을 최적으로 이용하였다.

$$dev = \frac{1}{n} |x_a - \bar{x}| \quad (19)$$

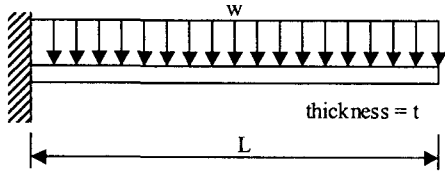


Fig. 2 Cantilever beam with end distributed load

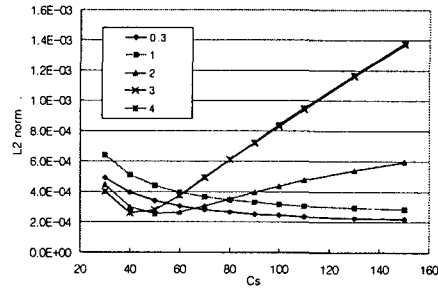
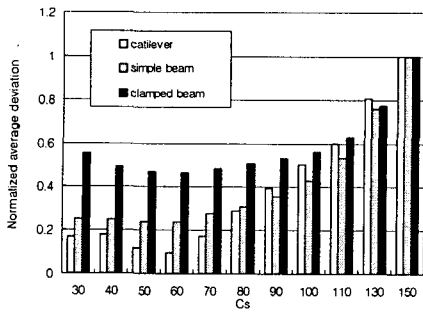
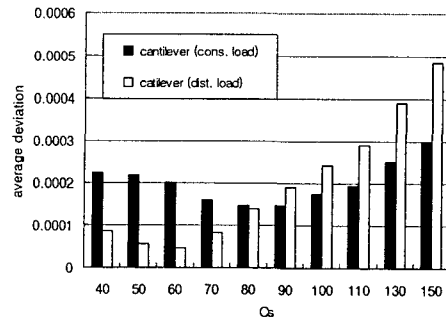


Fig. 3 L2 norms in cantilever with distributed load

우선 동일한 형태의 분포하중을 받고 있는 외팔보, 단순보, 양단 고정보의 결과를 Fig. 4(a)에 비교하였다. 동일한 하중의 경우 필수 경계조건이 다르더라도 편차가 적게 나타나는 값은 모두 60에서 형성되고 있음을 보이고 있다. 또한 동일한 필수 경계조건에 다른 형태의 하중을 받는 경우의 결과를 Fig. 4(b)에 나타내었다. 여기에서는 편차가 가장 적게 나타나는 값이 60과 90으로 전단완화계수의 값은 필수 경계조건보다는 하중의 형태에 따라 차이가 있음을 알 수 있다. 따라서 연구상수의 값은 하중에 따른 평균편차의 값을 비교한 Fig. 4(b)를 이용하여 집중 하중과 분포하중 적용시의 적정값 60과 90의 평균값 75를 선택하여 이용하였다.



(a) Comparison of normalized average deviation according to beams of various kinds



(b) Comparison of average deviation according to loading types

Fig. 4 Comparison of average deviation of L2 norms in method using shear relaxation factor

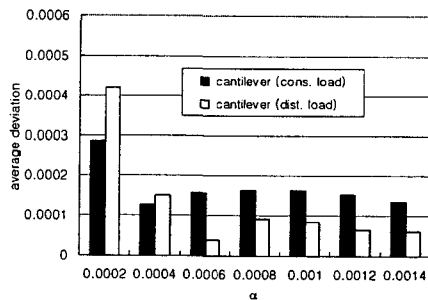


Fig. 5 Comparison of average deviation of L2 norms in method using corrected shear rigidity

**5.1.2 수정전단계수의 영구상수**

수정전단계수의 영구상수 역시 5.1.1의 방법과 동일한 방법으로 구하였으며 그 결과의 그림을 Fig.5에 나타내었다. 수정전단계수 역시 전단완화계수와 같은 형태로 하중의 분포에 따라 차이가 나는 결과를 나타내었으며 이것으로부터 외팔보의 집중하중과 분포하중에 따른 평균편차의 결과를 비교하여 6.E-4와 4.E-4의 평균값인 5.E-4을 수정전단계수의 영구상수로 이용하였다.

**5.2 각종보의 수치실험**

5.1에서 얻어진 각각의 영구상수들을 이용하여 앞서 제시한 방법들의 각종 보에 대한 적용성을 확인하기 위하여 수치실험을 하였다. 각각 20개의 절점을 이용하였으며 사각 단면을 갖는 보로 모델링하였다.

**5.2.1 외팔보**

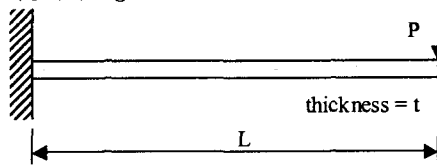
외팔보 실험을 위하여 앞서 보인 분포하중을 받는 Fig. 2와 끝단에 집중하중을 받고 있는 Fig. 6과 같은 모델로 수치실험을 하였다.

Fig. 7(a)에는 분포하중의 결과(b)는 집중하중의 결과를 도시하였으며, 두께와 길이의 비에 대한 끝단의 처짐 값을 티모센코 보의 이론해<sup>(13)</sup>로 정규화하여 나타내었다. 그림에서 비교 값으로는 티모센코 보 이론에 따른 RKPM 해(RKPM), 오일러 보 이론에 따른 RKPM 해(HRKPM), 오일러 보의 이론치(Theory) 그리고 본 논문에서 제시한 방법으로 전단완화 계수의 결과를 CASE I, 수정전단계수의 결과를 CASE II로(편의상 이후에도 이와 같이 표시한다) 표시하여 해석결과(Present)를 비교하였다.

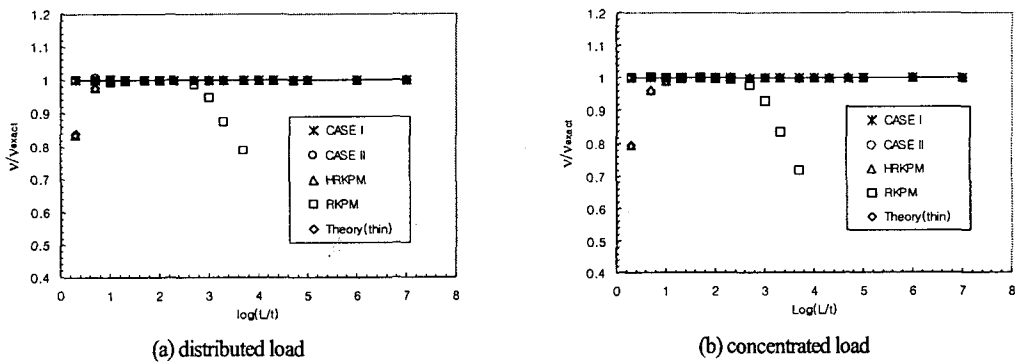
Fig. 7에서 두 예제 모두 티모센코 보 이론만을 적용한 결과(RKPM)는 두께가 두꺼운 부분에서는 잘 맞지만 두께가 얇아 짐에 따라 전단 강성과잉 현상을 보여 그 값이 현저히 부정확해지고 있으며 오일러 보 이론에 의한 결과는 오일러 보의 이론치(Theory)와 일치하지만 두께가 두꺼워짐에 따라 역시 해가 부정확해짐을 보인다. 논문에서 제안한 방법의 해석 결과인 CASE I, II는 문제가 되고 있는 전단강성 과잉 현상이 완전히 제거되어 두께가 두꺼운 부분뿐만 아니라 현저히 작아져도 정확한 결과를 보여주고 있다.

**5.2.2 집중하중을 받는 단순보**

Fig. 8은 중심에 집중하중을 받고 있는 단순보의 모델 그림이다. 이에 대한 수치실험결과를 Fig. 9에 나타내었다. 결과는 보 중앙의 처짐 값을 이용하여 Fig. 7과 동일한 형태로 도시하였다.



**Fig. 6 Cantilever beam with end point load.**



**Fig. 7 Normalized displacements with respected to Timoshenko beam solution in cantilever**

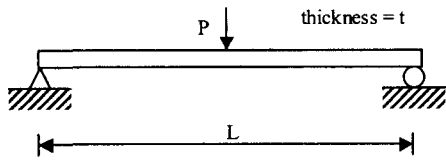


Fig. 8 Simple beam with center point load.

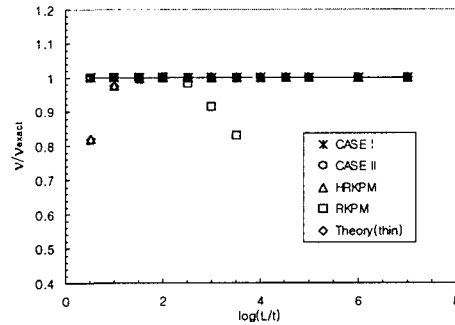


Fig. 9 Normalized displacements with respected to Timoshenko beam solution in simple beam.

역시 일반적인 티모센코 보 이론에 의한 RKPM 에 의한 해는 전단강성 과잉현상을 보이고 있으며, HRKPM 은 단면의 두께가 두꺼워지면서 현저히 해가 떨어지고 있음을 알 수 있다. 논문에서 제시한 방법은 두께에 관계없이 티모센코 보 이론치와 잘 일치함을 보이고 있다.

### 5.2.3 분포하중을 받는 양단고정보

Fig. 10 은 양단 고정보에 분포하중을 받고 있는 문제를 나타내고 있으며 이의 수치 결과는 보 중앙의 처짐 값을 이용하여 Fig. 11 에 나타내었다.

실험결과는 앞에서 보인 결과들과 동일한 경향을 보이며 CASE I, CASE II 의 경우에 전단강성 과잉 현상이 제거되어 정확한 결과를 나타내고 있다.

또한, 예제들을 통하여 5.1 에서 얻어진 영구상수 값들이 잘 맞고 있으며 제시한 방법들이 보의 두께에 상관없이 효과적으로 적용될 수 있음을 알 수 있다.

## 6. 결론

무요소법으로 두꺼운 보를 해석할 때 생기는 강성과잉 현상을 없애고 두께에 상관없이 효과적인 해석을 할 수 있도록 하기 위하여 전단완화 계수를 도입하고, 수정 전단계수를 이용하는 방법을 제안하였으며 이에 필요한 영구상수들의 값을 결정하였다. 이 방법들의 유용성을 규명하기 위하여 여러가지 수치예제를 해석하고 그 결과를 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

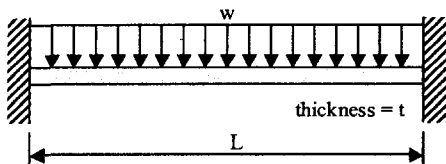


Fig. 10 A beam clamped at both ends with distributed load w

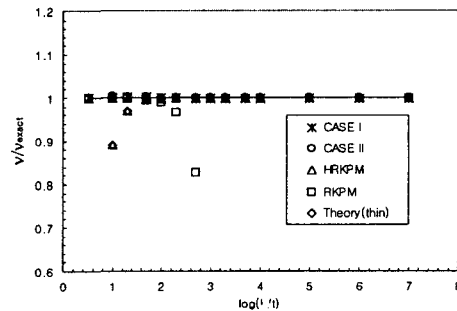


Fig. 11 Normalized displacements with respected to Timoshenko beam solution in clamped beam

- 1) 전단굽힘 이론에 전단완화 계수를 도입함으로써 강성과잉 현상을 제거하였다.
- 2) 제안한 수정전단계수를 이용함으로써 강성과잉현상을 제거하였다.
- 3) 수정전단계수를 이용하는 방법은 전단완화 계수를 이용하는 방법보다 간단히 티모센코 보이론에 적용할 수 있다.
- 4) 제시된 영구상수 값들은 두께에 상관없이 각종 보문체에 잘 적용된다.

#### 참고문헌

- (1) Monaghan J. J., 1988, "An Introduction to SPH," *Computer Physics Communications*, Vol. 48, pp. 89~96.
- (2) Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L., 1994, "Element Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229~256
- (3) Liu W. K., Jun S. and Zhang Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. 20, pp. 1081~1106
- (4) Duarte C. A., Oden J. T., 1996, "An h-p Adaptive Method Using Clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp.237~262
- (5) Krysl, P. and Belytschko, T., 1995, "Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method," *Computational Mechanics*, Volume 17, Issue 1-2, Pages 26-35
- (6) Kam Liu Wing, Chen Yijung, R. Aziz Uras and Tang Chang Chin, 1996, "Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, Pages 91-157
- (7) Atluri, S.N., Cho, J.Y. and Kim, H.-G., 1999, "Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations," *Computational Mechanics*, Volume 24, Issue 5, Pages 334-347
- (8) Brian M. Donning and Kam Liu Wing, 1998, "Meshless methods for shear-deformable beams and plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 152, Issues 1-2, Pages 47-71
- (9) Oscar Garcia; Eduardo A. Fancello, Clovis S. de Barcellos and C. Armando Duarte, 2000, "hp-clouds in Mindlin's thick plate model," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 47, Issue 8, Pages 1381-1400
- (10) Alexander Tessler and Thomas J.R. Hughes, 1983, "An Improved Treatment of Transverse Shear in The Mindlin-Type Four-Node Qadrilateral Element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 39, Pages 311-335
- (11) Alexander Tessler and Thomas J.R. Hughes, 1985, "A Three-Node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, Pages 71-101
- (12) 석병호, 송태한, 임장근, 2000, "EFGM 에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법", 대한 기계학회 논문집, pp.803~809
- (13) Herbert Reismann and Peter S. Pawlik, 1980, *Elasticity-Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc.