고차 저프아송 광통계와 고차 쥠의 비고전적인 정도

Nonclassical Measure of the higher order sub-Poissonian Photon Statistics and the higher order Squeezing

김영철*, 윤태현**

광주파수제어연구단, 한국표준과학연구원, 대전광역시 유성구 도룡동 1번지

* yckim@kriss.re.kr, ** thyoon@kriss.re.kr

빛의 비고전성, 쥠과 저프아송 광통계 등은 고전적인 빛에서 볼 수 없었던 성질이라는 것에 대한 호기심과 여러 측면에서 고전적인 빛이 갖는 한계를 극복할 수 있는 응용성 때문에 지금까지 빛의 비고전성에 대한 이론적인 연구와 실험적으로 이를 측정하기 위한 많은 노력이 있었다. 쥠과 저프아송 광통계의 비고전적인 정도(nonclassical measure)는 이미 연산자 배열들의 관계식을 이용한 결과가 발표되었다[(1)]. 본 연구에서는 준확률 밀도 함수들의 관계식을 이용하여 쥠과 저프아송 광통계를 포함한 고차 쥠과 고차 저프아송 광통계의 비고전적인 정도를 구하였다.

빛의 밀도 연산자는 위상공간에서 $\hat{\rho}=\int\phi(v)|v\rangle\langle v|d^2v$로 표현된다[(2)]. 여기서 d^2v는 복소수 공간에서 면적 적분 $d^2v=d[\mathrm{Re}\,v]d[\mathrm{Im}\,v]$이고, P-함수로 불리는 $\phi(v)$는 음이거나 델타 함수 보다 더 특이할 수 있는데, 그런 빛을 비고전적인 빛이라 한다. 주어진 빛의 P-함수가 음의 함수이거나 특이한 함수이더라도 Gaussian 함수와의 convolution 적분에 의하여 양의 함수가 될 수 있다. 즉, R-함수[(3,4)] $R(v,\tau)=(1/\pi\tau)\int\phi(v')\exp[-|v-v'|^2/\tau]d^2v'$는 매개 변수 τ가 커짐에 따라 점점 양의 함수가 된다. 열 빛의 P-함수가 Gaussian 함수이기 때문에 R-함수는 주어진 빛에 열 빛이 섞인 빛의 새로운 P-함수로 볼 수 있고 매개 변수 τ는 열 빛의 평균 광자수이다. 따라서 R-함수가 양의 함수가 되는 것은 비고전적인 빛에 열 빛이 섞이면 비고전성을 잃게 됨을 뜻한다. R-함수가 양의 함수가 되는 순간의 τ를 τ_m으로 쓰고 이를 비고전적인 빛 또는 비고전성의 비고전적인 정도라 부른다[(4)]. τ_m은 0과 1사이의 값을 가지며, 0일 때 그 빛은 이미 고전적인 빛이고, 1일 때 그 빛은 가장 비고전적인 빛이다.

먼저 쥠의 비고전적인 정도를 알아보자. 이를 위해 통상적인 쥠을 포함하는 고차 쥠의 정의식[(5)]은

$$\langle(\Delta\hat{P})^N\rangle=\langle:(\Delta\hat{P})^N:\rangle+\frac{N^{(2)}}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)\langle:(\Delta\hat{P})^{N-2}:\rangle+\frac{N^{(4)}}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\langle:(\Delta\hat{P})^{N-4}:\rangle+\cdots+(N-1)!! \quad (1)$$

이다. 여기서 N은 짝수, $N^{(r)}=N(N-1)\cdots(N-r+1)$, 그리고 $\hat{P}=(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a})$이다. 정의에 의해 $\langle(\Delta\hat{P})^N\rangle<(N-1)!!$ 또는 $S^{(N)}\equiv\langle(\Delta\hat{P})^N\rangle-(N-1)!!<0$ 이면 그 빛은 N차 쥠을 가진다[(4)]. N차 쥠이 있는 빛의 비고전적인 정도를 구하기 위하여, 열 빛과 중첩된 빛의 쥠 매개 변수 $S_\rho^{(N)}$을 원래 주어진 빛의 $S^{(N)}$으로 표현하면 $S_\rho^{(N)}=S^{(N)}+O^{(N)}(\tau)$ 이다. $S_\rho^{(N)}=0$일 때 그 빛은 고전적인 빛

이 되었음을 의미하므로, N차 쥠의 비고전적인 정도 τ_m을 등식 $S^{(N)}+O^{(N)}(\tau_m)=0$으로부터 구할 수 있다. 1차($N=2$) 쥠의 경우

$$S_\rho^{(2)}=S^{(2)}+2\tau \tag{2}$$

이고, 비고전적인 정도는 $\tau_m^{(2)}=-S^{(2)}/2$이다. 1차 쥠 매개 변수의 영역은 $-1\leq S^{(2)}<0$ 이므로 $\tau_m^{(2)}$의 최대 값은 1/2이다. 따라서 주어진 빛에 평균 광자수 1/2인 열 빛이 섞이면 쥠을 잃게 된다. 같은 방법으로 2차($N=4$) 쥠에 대해서는

$$S_\rho^{(4)}=12\tau\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle+S^{(4)}+12\tau^2 \tag{3}$$

을 얻을 수 있다. 식 (3)의 첫 번째 항에서 $\langle(\Delta\hat{P})^N\rangle$은 항상 양의 값을 갖기 때문에 비고전적인 정도는 $\tau_m^{(4)}=\sqrt{-S^{(4)}/12}$ 이다. 2차 쥠 매개 변수 영역은 $-3\leq S^{(4)}<0$이므로 $\tau_m^{(4)}$의 최대 값은 1/2이다.

저프아송 광통계를 갖는 빛의 비고전적인 정도를 구하기 위하여, 일반화된 Q-매개 변수

$$Q^{(N)}\equiv[\langle(\Delta\hat{n})^{2N}\rangle-\langle A^{(2N)}(\hat{n})\rangle]/\langle A^{(2N)}(\hat{n})\rangle \tag{4}$$

를 도입하면[6], $Q^{(N)}<0$일 때 그 빛은 N차 저프아송 광통계를 갖는 빛으로 정의할 수 있다. 여기서 주어진 빛이 결맞음 빛일 때 갖는 변분(variance) $\langle A^{(2N)}(\hat{n})\rangle$ ($N=1,2$)는

$$\langle A^{(2)}(\hat{n})\rangle=\langle\hat{n}\rangle,\quad \langle A^{(4)}(\hat{n})\rangle=3\langle\hat{n}\rangle^2+\langle\hat{n}\rangle \tag{5}$$

으로 주어진다[1]. 이제 저프아송 광통계의 비고전적인 정도를 구하기 위하여 열 빛과 중첩된 빛의 기대값 $\langle(\Delta\hat{n})^{2N}\rangle_\rho-\langle A^{(2N)}(\hat{n})\rangle_\rho$을 주어진 빛의 기대값 $\langle(\Delta\hat{n})^{2N}\rangle-\langle A^{(2N)}(\hat{n})\rangle$으로 표현하면

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle_\rho-\langle\hat{n}\rangle_\rho=\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle+\tau^2+2\langle\hat{n}\rangle\tau, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{n})^4\rangle_\rho-(3\langle\hat{n}\rangle_\rho^2+\langle\hat{n}\rangle_\rho)&=\langle(\Delta\hat{n})^4\rangle-(3\langle\hat{n}\rangle^2+\langle\hat{n}\rangle)+12\tau\langle\hat{n}^{(3)}\rangle\\&+(-24\tau\langle\hat{n}\rangle+42\tau^2+42\tau)\langle\hat{n}^{(2)}\rangle+(12\langle\hat{n}\rangle^3-30\langle\hat{n}\rangle^2+14\langle\hat{n}\rangle)\tau\\&+(7+54\langle\hat{n}\rangle-30\langle\hat{n}\rangle^2)\tau^2+(18+36\langle\hat{n}\rangle)\tau^3+9\tau^4\end{aligned} \tag{7}$$

이 된다. 빛이 주어지면 그 빛의 비고전적인 정도를 계산 할 수 있다. 수 상태의 경우 $\langle\hat{n}^{(k)}\rangle=\langle\hat{n}\rangle^k$이고, $\langle\hat{n}\rangle\gg 1$인 조건에서 수상태가 갖는 1, 2차 저프아송 광통계의 비고전적인 정도는 모두 $\tau_m=1/2$이다.

참고 문헌

1. K. Kim, Phys. Rev. A 59, 1566 (1999).
2. R. J. Glauber, Phys. Rev. 131, 2766 (1963).
3. K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. 177, 1882 (1969); 177, 1857 (1969)
4. C. T. Lee, Phys. Rev. A 45, 6586 (1992); 44, R2755 (1991).
5. C. K. Hong and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. 54, 323 (1985).
6. Youngchul Kim, Tai Hyun Yoon, and Kisik Kim, in *Proceedings of the 9th International Symposium on Laser Spectroscopy*, KAERI, (2001).