

구조물의 동특성 변화에 따른 감도계수 해석

이 정 윤(경기대학교 전자·기계공학부 기계공학전공)

A Sensitivity Coefficient Analysis by the Change of Dynamic Characteristics of the Structure

Jung Youn Lee

Abstract

This study predicts the sensitivity coefficient by the change of dynamic Characteristics of the Structure. The method is applied to examples of a cantilever and 3 degree of freedom lumped mass model by modifying the mass and stiffness. The predicted the sensitivity coefficient are in good agreement with these from the structural reanalysis using the modified mass and stiffness.

1. 서 론

자동차, 비행기, 발전소, 공작기계 등은 사용 중에 운전하중이나 충격, 부식, 지진, 바람, 파랑하중에 의해서 구조물에 손상이 발생되며, 이들로부터 구조물의 안전을 확보하는 일이 중요하게 되었다. 따라서 구조물의 손상위치와 크기를 정확하게 찾아내는 일은 구조물의 수명 연장 과 안전성에서 매우 중요하게 되었다. 이를 위해서 구조물의 동특성 변화로부터 감도계수를 해석하고 이로부터 질량과 강성 변경량 및 크기를 해석하여야 한다. 즉 감도해석의 역처리문제(inverse problem)이다.

고유치에 대한 감도해석 분류 방법에는 기준에 따라 여러 가지 방법 나누어지며 크게 두 가지로 나누어진다. 하나는 직접법(direct method)과 다른 하나는 모달방법(modal method)이다. 직접법(direct method)은 Nelson⁽¹⁾이 1976년에 발표하

였고 잘 활용되나 이 방법은 오직 반복된 고유치가 없을 경우 적용되었다.

Mills-Curran⁽²⁾은 반복된 고유치의 경우에 적용할 수 있는 방법을 발표하였으나, 실용적인 면에서 이 방법은 문제가 있었다. Rudisill⁽³⁾은 고유진동수와 고유모드 1차 변화율 및 고유진동수의 2차 변화율을 구하였다.

모달 방법(modal method) 대한 연구로는 Fox와 Kapoor⁽⁴⁾가 고유모드 변화량을 변경전 구조의 고유모드 선형결합으로서 표시하고 질량 정규화 및 직교성 조건으로부터 감도계수를 결정하여 고유모드의 1차 변화율을 구하였으며, Bradon⁽⁵⁾은 고유진동수의 2차 변화율을 고유진동수의 1차 변화율로부터 구하였고, Wang^{(6),(7)}은 모드합성기술의 모드 가속도법을 감도해석에 적용하여 계산정도를 개선하였다. 이정윤 등⁽⁸⁾은 설계 파라미터 변경에 따른 연속계의 고유진동수 및 고유 벡터 변화량을 반복법의 감도 계수를 이용하여 예측하였다.

그러나 대부분의 연구는 동특성 변경에 따른 고유진동수와 고유벡터를 예측하였고 동특성 변경에 따른 감도 계수의 해석은 찾아보기 어렵다. 감도 계수 해석은 외부의 영향으로 구조물에 손상이 발생할 때 손상위치와 크기를 파악하거나 질량 부가후 동특성 변경으로부터 질량이나 강성의 변경위치 및 크기를 해석하기 위해서도 필요하다.

본 연구는 설계파라미터 변경 전·후의

구조물의 동특성 변화량으로부터 감도계수를 구하는 방법을 제시하였으며 타당성을 검증하기 위해 유한 요소법을 이용하여 외팔보와 3 자유도계의 감도계수를 해석하였다. 또한 감도 계수로부터 고유진동수 및 진동모드 변화량을 예측하고 재해석치와 비교하였다.

2. 이론

구조물에 질량 또는 강성이 변경되면 동특성이 변하게 된다. 이때 구조 변경 전 후의 동특성은 다음과 같이 된다.

$$(K_o - \lambda_o M_o) \phi_o = 0 \quad (1)$$

$$(K - \lambda M) \phi = [K_o + \Delta K - (\lambda_o + \Delta \lambda)(M_o + \Delta M)] (\phi_o + \Delta \phi) = 0 \quad (2)$$

여기서 $K_o, M_o, K, M, \Delta K$ 과 ΔM 은 각각 변경 전 강성 행렬, 변경 전 질량 행렬, 변경 후 강성행렬, 변경 후 질량행렬, 변경 구조물의 강성행렬과 변경 구조물의 질량 행렬이며 $\lambda, \phi, \lambda_o,$

$\phi_o, \Delta \lambda$ 와 $\Delta \phi$ 는 각각 구조 변경 후 고유치, 고유벡터, 변경 전 고유치, 변경 전 고유벡터, 고유치 변화량 과 고유벡터 변화량이다.

Fox⁽⁴⁾는 고유 벡터의 변화량을 변경 전 고유벡터의 선형결합으로 표시될 수 있다고 다음과 같이 가정하였다.

$$\{\Delta \phi\}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \phi_{ok} \quad (6)$$

$$\alpha_{ii} = -\frac{\Delta M_{ii}}{2} \quad (7)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{-\Delta M_{ij} \omega_{oj}^2 + \Delta K_{ij}}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \quad (8)$$

$$\text{여기서 } \{\phi_o\}_i^T [\Delta M] \{\phi_o\}_j = \Delta M_{ij},$$

$\{\phi_o\}_i^T [\Delta K] \{\phi_o\}_j = \Delta K_{ij}$ 이다. 그러나 위 방법은 구조물에 질량이나 강성 변경 후에도 고유 벡터의 변화가 없다고 가정하였기 때문에 질량이나 강성이 미소 변경일 경우는 고유벡터 및 고유진동수 변화량을 잘 예측하지만 변경량이 많으면 오차가 증가하여 실제 구조물의 적용에는

한계가 있다. 이런 문제점을 개선하기 위해서 새로운 방법⁽⁹⁾이 다음과 같이 제안되었다.

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}(m+1) = & -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2(m) + \Delta M_{ii} \right. \\ & + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{ik} \\ & \left. + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{qk} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\alpha_{ij}(m+1) = \frac{1}{\omega_{oj}^2 - \omega_{oi}^2} \left\{ \Delta K_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \right.$$

$$\Delta K_{kj} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta K_{jk} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m)$$

$$\Delta K_{qk} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta K_{qk}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}(m) \alpha_{kj}(m) \right\} - \frac{\omega_{oj}^2}{\omega_{oj}^2 - \omega_{oi}^2}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \alpha_{kj}(m) + \Delta M_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{kj} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta M_{ik} \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{qk} \right\} \quad (10)$$

이 감도계수는 구조물에 질량이나 강성한 변경 후, 고유 벡터의 변화를 고려하였기 때문에 고유벡터 및 고유진동수 변화량을 정확히 예측할 수 있다. (6)식으로 부터

$$[\Delta \phi] = [\alpha] [\phi_o] \quad (11)$$

$$[\alpha] = [\phi_o]^{-1} [\Delta \phi] \quad (12)$$

여기서 $[\Delta \phi], [\alpha]$, 및 $[\phi_o]$ 는 고유벡터 변화량 행렬, 감도계수 행렬 및 변경 전 고유 벡터행렬이다.

고유벡터의 변화 예측은 (6)식으로부터

$$\{\phi\} = \{\phi_o\} + \{\Delta \phi\}_i = \{\phi_o\} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \phi_{ok} \quad (13)$$

이다.

3. 적용 예

Fig. 1은 위에서 해석한 이론을 적용하기 위해 사용한 외팔보의 모델을 나타낸다. 변경전의

외팔보의 질량, 길이, 탄성계수는 1로 하였으며 질량과 강성을 동시에 변화를 주기 위해서 5번 요소의 단면을 20% 감소시켜 EI 는 48.8%, 질량은 20%를 감소시켰고 10번 요소는 10번 요소의 질량만 100% 증가시켰다.

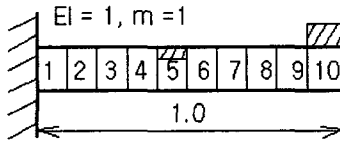


Fig. 1 Model of cantilever

Fig. 2는 3 자유도계의 모델로 변경 전 질량은 각각 2kg, 1kg, 1kg과 강성은 2N/m, 1N/m, 1N/m로 하였으며 변경 후 질량은 2kg, 1kg, 1.5kg과 강성은 2N/m, 2N/m, 1N/m로 하였다.

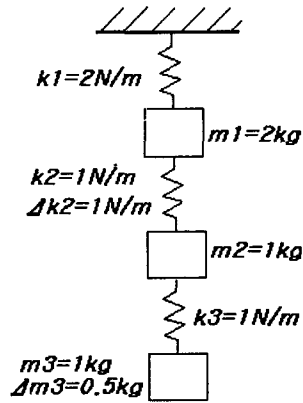


Fig. 2 Model of 3 degree of freedom

4. 결과 및 고찰

4.1 고유진동수 변화 검토

Table 1은 외팔보의 5번요소의 단면을 20%감소시키고 10번 요소에 질량을 100%를 추가하였을 때 4차까지 고유진동수 변화를 나타낸 표이다. Table 2는 질량 및 강성을 동시에 변경하기 위해 3자유도계의 세 번째 질량에 0.5를 추가하고 두 번째 스프링 강성을 1에서 2로 변경하였을 때 3차까지 고유진동수 변화를 나타낸 표이다.

Table 1 Comparison of natural frequencies by modifying structure in cantilever beam

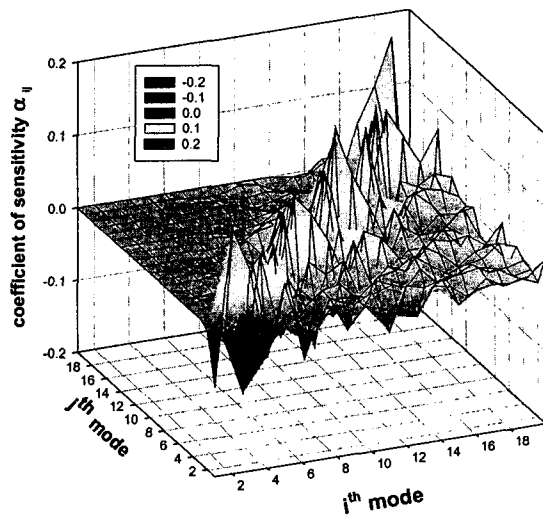
Mode No.	Modification		Remark
	Before	After	
1	3.513	2.937	
2	22.036	19.390	
3	61.714	57.880	
4	121.108	112.747	

Table 2 Comparison of natural frequencies by modifying structure in 3 D.O.F (Hz)

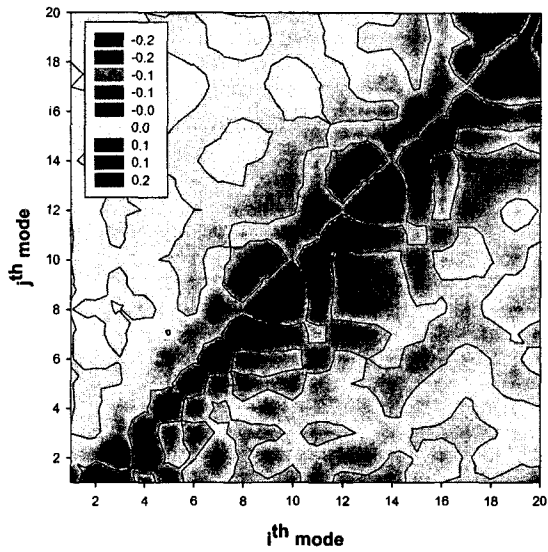
Mode No.	Modification		Remark
	Before	After	
1	0.5053	0.5012	
2	1.1642	1.1333	
3	1.6997	2.0324	

4.2 감도계수의 검토

Fig. 3은 외팔보의 감도계수 α_{ij} 를 3차원 및 등고선으로 나타낸 그림으로 i, j mode가 가까울수록 감도계수의 크기가 대체적으로 크게 나타났다. 이는 구조 변경시 가까이 있는 모드가 멀리 떨어진 모드보다 고유벡터의 변화에 더 많은 기여를 하기 때문으로 이것은 (10)식에서 두 모드가 가까울수록 분모가 작아지기 때문이다. 그러나 $i = j$ 인 경우에는 오히려 작게 나타났으며 이는 (9)식에서 질량 변경만 고려하기 때문으로 생각된다.



(a) triplet



(b) contour

Fig. 3 Sensitivity coefficient α_{ij} in cantilever beam

Table 3은 3자유도계의 감도계수 α_{ij} 를 나타낸 표로 i, j mode가 가까울수록 감도계수의 크기가 대체적으로 크게 나타났다.

Table 3 Sensitivity coefficient α_{ij} in 3 D.O.F

		j mode		
		1	2	3
i mode	1	-0.1297	0.1477	-0.1686
	2	0.0326	-0.0729	0.2432
	3	0.0896	-0.1767	-0.05127

4.2 진동모드의 검토

Fig. 4와 Fig. 5은 외팔보 및 3자유도계의 진동모드를 나타낸 그림으로 (9), (10)식으로 구한 감도계수를 (13)식에 대입하여 구하였다. 외팔보와 3자유도계 모두 변경후의 고유 벡터와 제안된 방법으로 나타낸 고유벡터가 일치하여 한 선으로 보이므로 제안된 방법이 타당함을 알 수 있다.

5. 결론

구조물의 동특성 변경에 따른 감도계수 해석 방법을 제안하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다

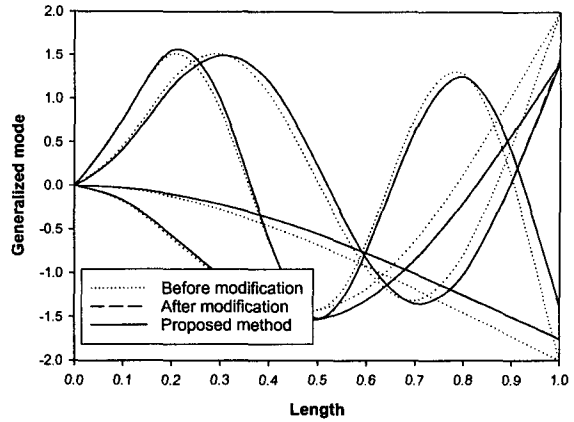


Fig. 4 Variation of mode shape by modifying structure in the cantilever beam

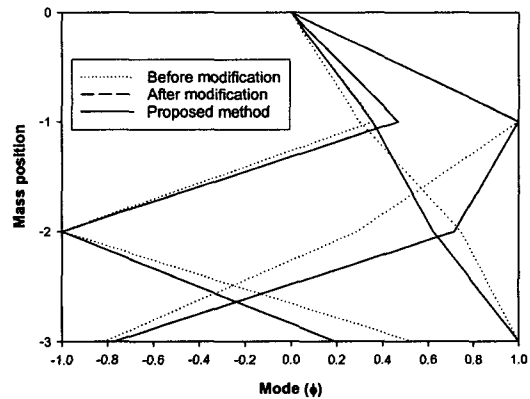


Fig. 5 Variation of mode shape by modifying structure in the 3 D.O.F model

- 1) 구조물의 변경 전 및 변경 후의 고유 벡터를 이용하여 감도계수를 구하는 방법을 제시하였다.
- 2) 두 mode가 가까울수록 감도계수의 크기가 대체적으로 크게 나타났다.
- 3) 알고리즘을 구조 변경 한 외팔보와 3자유도계에 적용한 결과 변경후의 고유 벡터와 제안된 방법으로 나타낸 고유벡터가 일치하므로 제안된 방법이 타당함을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) Nelson, R.B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," AIAA, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.
- (2) Mills-Curran, W.C., 1988, "Calculation of Eigenvector Derivatives for Structure with Repeated Eigenvalues," AIAA, Vol. 26, No. 7, pp. 867~871.
- (3) Rudisill, C.S., 1974, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix," AIAA, Vol. 12, No. 5, pp. 721~722.
- (4) Fox, R.S., and Kapoor, M.P., 1968. "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," AIAA, Vol. 6, No. 12, pp. 2426~2429.
- (5) Brandon, J., 1991, "Second-Order Design Sensitivities to Assess the Applicability of Sensitivity Analysis," AIAA, Vol. 29, No. 1, pp. 135~139.
- (6) Wang, B.P., 1991, "Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives," AIAA, Vol. 29, No. 6, pp. 1018~1020.
- (7) Wang, B.P. and Polkey, W.D., 1986, "Eigenvalues Reanalysis of Locally Modified Structures Using a Generalized Rayleigh's Method," AIAA, Vol. 24, No. 6, pp. 983~990.
- (8) 이정윤, 오재웅, 1998, "설계파라미터 변경에 따른 연속계의 고유진동수 및 고유벡터 변화량 예측," 대한기계학회논문집, 제22권, 제6호, pp. 1073~1078.
- (9) 이정윤, 2002, "설계파라미터 변경에 따른 구조물의 동특성 변화 해석," 대한기계학회논문집, 제26권, 제4호, pp. 739~744.