$2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 HCN(n,n)에 대한 임베딩 알고리즘

강민식⁰ 김종석 이형옥⁺ 허영남
순천대학교 컴퓨터과학과, ⁺순천대학교 컴퓨터교육과
graysun0@hanmail.net⁰, {rockhee, oklee, hyn}@sunchon.ac.kr

Embedding Algorithm of $2^{2n-k}\times 2^k$ Torus on HCN(n,n)

Min-Sik Kang⁰ Jong-Seok Kim Hyeong-Ok Lee⁺ Yeong-nam Heo
Dept. of computer Science, Sunchon National University
⁺Dept. of computer Education, Sunchon National University

요 약

임베딩은 어떤 연결망이 다른 연결망 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상하는 것으로, 특정한 연결망에서 사용하던 여러 가지 알고리즘을 다른 연결망에서 효율적으로 이용할 수 있도록 한다. 본 논문에서는 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스를 HCN(n,n)에 연장율 3에 임베딩 가능함을 보인다.

1. 서 론

다양한 연결망 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위해 많은 병렬 알고리즘들이 설계되고 있는데 이러한 알고리즘들을 다른 연결망 구조에서 적은 비용으로 실행시킬 수 있는지는 병렬처리에서 중요한 문제가 되고 있다. 이러한 방법 중에서 널리 쓰이는 것에 임베딩이 있다. 그래프의 임베딩은 어떤 그래프 G가 다른 그래프 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 그래프 G를 다른 그래프 H에 사상하는 것이다. G의 H에 대한 임베딩의 연장율은 G의 어떤 두 인접한 노드를 H에 사상했을 때 사상된 H의 두 노드사이의 최대 거리를 나타낸다[1,7].

메쉬 구조는 평면 그래프로서 VLSI 회로 설계 같은 분야에서 많이 이용되는 구조로 현재까지 널리 이용되고 있으며 MPP(Goodyear Aerospace), MP-I (MASPAR), Victor(IBM), Paragon(Intel), T3D(Cray) 등에서 상용화되어 있다[2]. 이러한 메쉬의 지름을 개선한 연결망 중 대표적인 연결망이 토러스인데 토러스는 메쉬의 행과 열들을 링형태를 띄게 한 wraparound 에지라고 불리우는 에지를 추가하여 구성한 연결망이다[4].

하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고, 임베딩 관점에 있어서 링, 트리, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다[5,6]. 이러한 단점을 개선하고자 하이퍼큐브의 장점을 가지면서 망비용을 개선한 상호연결망인 HCN(n,n)[3,8]이 제안되었다.

본 논문에서는 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스를 HCN(n,n)에 연장율 3에 임베딩 가능함을 보인다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 관련연구에 대하여 논하고 3장에서는 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 HCN(n,n)에 대한 임베딩을 보이며 4장에서 결론을 맺는다.

2. 관련 연구

본 논문에서는 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 각 노드의 주소를 그레이코드를 이용하여 표현하겠다. 2^{2n-k}는 행을 2^k는 열을 나타낸다. 각 노드의 주소는 행의 주소 다음에 열의 주소를 연결하여 연속된 $2n$개의 비트스트링으로 표현한다.

그레이코드는 연속된 2진수 사이에 오직 한 개의 비트만 변화하도록 하는 코딩 방식의 하나로 자기 보수성과 주기성을 갖는데 $(n+1)$-비트 그레이코드 $g_n...g_1g_0$는 임의의 $(n+1)$-비트 이진수 $b_n...b_1b_0$로부터 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$g_i=b_i\oplus b_{i+1},\ 0\le i\le n-1,\ g_n=b_n.$$

또 B_i를 정수 $i(0\le i\le 2^n-1)$의 2진 표현이라 하고, B'_i는 B_i를 오른쪽으로 한 비트 쉬프트 시켜 얻어지며 이때 왼쪽에는 0이 삽입되는 2진수라 할 때 i번째 그레이코드 G_i는 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$G_i=B_i\oplus B'_i.$$

위에서 ⊕는 exclusive-OR 연산을 나타낸다[9].

예를 들어 2비트 그레이코드는 00-01-11-10으로 표현되고, 3비트 그레이코드는 000-001-011-010-110-111-101-100으로 표현된다.

2.1 토러스

낮은 차원의 메쉬는 설계하기 쉽고 알고리즘 관점에서도 매우 유용하므로 병렬처리 컴퓨터의 연결망으로 많이 쓰이고 있으며, 높은 차원의 메쉬일수록 지름이 작아지고 여러 가지 병렬 알고리즘을 빨리 수행할 수 있지만, 비용이 많이 드는 단점이 있다. 이러한 메쉬의 지름을 개선한 연결망으로 토러스가 있다.

토러스는 메쉬의 행과 열들을 링형태를 띄게한 wraparound 에지라고 불리우는 에지를 추가하여 구성한 연결망이다. $k\times n$으로 표현되는 토러스는 $k\times n$개의 노드와 $2kn$개의 에지로 구성되며, 분지수는 4, 지름은

$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$이다.

본 논문에서는 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 노드를 $H=(h_1h_2...h_nh_{n+1}....h_{2n})$로 표현하고, 1부터 n번째까지 비트스트링이 같은 노드들은 하나의 그룹으로 설정하겠다. 예를 들면, 4×4 토러스에서는 00, 01, 11, 10의 4개의 그룹으로 나눌 수 있다. 그림 1은 4×4 토러스의 각 노드 주소를 그레이코드로 표현하였다.

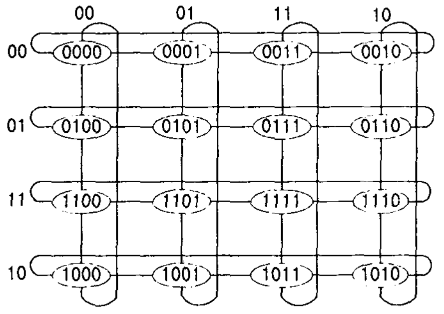

그림 1. 4×4 토러스

2.2 HCN(n,n)

하이퍼큐브는 2^n개의 노드와 $n2^{n-1}$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n-비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재하며, 분지수와 지름이 각각 n이고, 망비용은 n^2이다. 이러한 하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭성을 갖고, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대 고장 허용도 및 재귀적 구조를 갖지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다.

HCN(n,n)은 이러한 하이퍼큐브의 단점을 개선한 연결망으로 n-차원 하이퍼큐브 Q_n를 기본 모듈로 사용한다. HCN(n,n)은 2^{2n}개의 노드와 $(n+1)2^{2n-1}$개의 에지로 구성되며, 분지수는 $n+1$이다. HCN(n,n) 각 노드는 HCN(I,J)와 같이 두 개의 주소로 구성이 된다. I는 모듈을 인식하고, J는 모듈 내의 노드를 인식한다. 각 모듈 안의 에지들은 내부 에지라고 하고, 두 개의 모듈 사이의 에지들은 외부 에지라고 한다. 이 외부 에지들은 diameter link들과 nondiameter link들로 나뉜다. diameter link는 조건 $0\le I\le(2^n-1)$와 $0\le J\le(2^n-1)$을 만족하는 노드 HCN(I,I)와 HCN(J,J) 사이의 외부 에지를 말하는데 I와 J는 서로 보수관계이다. diameter link가 아닌 외부 에지는 HCN(I,J)와 HCN(J,I) 사이의 외부 에지로 nondiameter link로 불리운다.

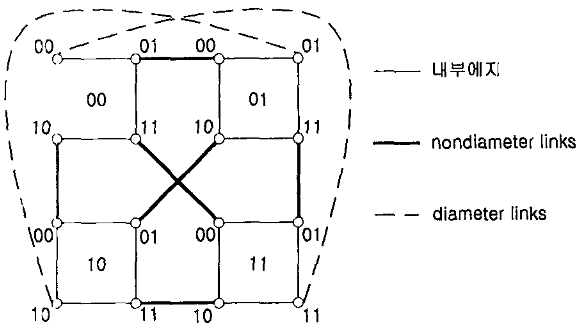

그림 2. HCN(2,2)

3. $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 HCN(n,n)에 대한 임베딩

본 논문에서의 임베딩 개요는 다음과 같다.
$2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 하나의 그룹은 HCN(n,n)의 하나의 모듈로 대응(그룹 내부의 노드는 모듈 내부의 노드에 1:1 사상)되고, 그룹과 그룹을 연결하는 에지의 두 노드가 사상된 HCN(n,n)의 두 노드를 연결하는 에지의 수로 연장율을 분석한다.

정리 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스는 HCN(n,n)에 연장율 3에 임베딩 가능하다.

증명 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 인접한 임의의 두 노드를 $H=(h_1h_2...h_nh_{n+1}....h_{2n})$와 $H'=(h'_1h'_2...h'_nh'_{n+1}....h'_{2n})$로 가정하고, HCN($n,n$)의 임의의 두 노드를 $S=(s_1s_2...s_n,s_{n+1}...s_{2n})$, $S'=(s'_1s'_2...s'_n,s'_{n+1}...s'_{2n})$라 가정하자.

토러스의 노드 H를 HCN(n,n)의 노드 S로, 토러스의 노드 H'를 HCN(n,n)의 노드 S'로 사상했을 때, 노드 S에서 노드 S'를 연결하는데 적용되는 HCN(n,n)의 에지의 수를 통하여 연장율을 분석한다. 노드 H와 인접한 H'의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1. $h_1h_2...h_n=h'_1h'_2...h'_n$ 일 때 : 토러스의 노드 H가 사상된 HCN(n,n)의 노드 S의 비트스트링은 $(s_1s_2...s_i...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 S'의 비트스트링은 $(s_1s_2...s_i...s_n,s_{n+1}...\overline{s_j}...s_{2n})$이다($1\le i\le n, n+1\le j\le 2n$). 노드 S와 S'의 비트스트링에서 오직 j번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 S와 S'는 HCN(n,n)의 동일한 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, HCN(n,n)의 정의에 의해 노드 S와 S'는 서로 인접한 노드이다. 따라서 토러스의 노드 H와 H'를 HCN(n,n)의 노드 S와 S'에 각각 사상할 때 연장율 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

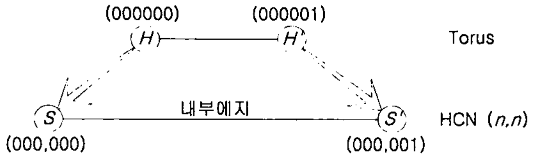

그림 3. 경우 1의 예

경우 2. $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 일 때 : 토러스의 노드 H가 사상된 HCN(n,n)의 노드 S의 비트스트링은 $(s_1s_2...s_i...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 S'의 비트스트링은 $(s_1s_2...\overline{s_i}...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$이다$(1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n)$. 노드 S와 S'의 비트스트링에서 i번째에 있는 비트만 보수관계이므로 S와 S'는 HCN(n,n)의 서로 다른 모듈에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 HCN(n,n)의 노드 $(s_1s_2...s_i...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$를 nondiameter link에 의해 $(s_{n+1}...s_j...s_{2n},s_1s_2...s_i...s_n)$에 연결한다. 연결된 노드 $(s_{n+1}...s_j...s_{2n},s_1s_2...s_i...s_n)$를 모듈 내부에 있는 노드 $(s_{n+1}...s_j...s_{2n},s_1s_2...\overline{s_i}...s_n)$에 연결한다. 연결된 노드 $(s_{n+1}...s_j...s_{2n},s_1s_2...\overline{s_i}...s_n)$를 nondiameter link에 의해$(s_1s_2...\overline{s_i}...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$에 연결한다. 따라서 토러스의 노드 H와 H'를 HCN(n,n)의 노드 S와 S'에 각각 사상할 때 연장율 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

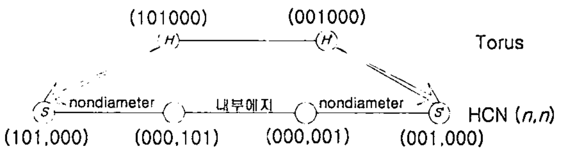

그림 4. 경우 2의 예

경우 2.1. $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 이고 $h_1h_2...h_n = h_{n+1}...h_{2n}$ 일 때 : 토러스의 노드 H가 사상된 HCN(n,n)의 노드 S의 비트스트링은 $(s_1s_2...s_i...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 S'의 비트스트링은 $(s_1s_2...\overline{s_i}...s_n,s_{n+1}...s_j...s_{2n})$이며$(1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n)$, 사상된 노드 S의 비트스트링 중 $s_1s_2...s_i...s_n = s_{n+1}...s_j...s_{2n}$이므로 경우 2에서 처음 연결된 nondiameter link를 사용할 필요가 없다. 그러므로 이 경우는 연장율 2이다.

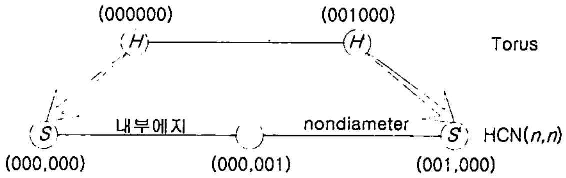

그림 5. 경우 2.1의 예

이상의 2가지 경우에서 증명한 바와 같이 토러스를 HCN(n,n)에 임베딩을 하기 위해 필요한 연장율은 3이하이다.

4. 결 론

상호 연결망의 임베딩은 어떤 연결망 G가 다른 연결망 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상하는 것이다.

본 논문에서는 상호 연결망으로 널리 사용되고 있는 토러스를 HCN(n,n)에 연장율 3에 임베딩 가능함을 분석했다. 이러한 토러스와 HCN(n,n) 사이의 임베딩 결과는 토러스에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 HCN(n,n)에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미한다.

참고문헌

[1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmertric Interconnection Network," IEEE Trans. Comput., Vol. 38, No. 4, pp. 555-565, 1989.
[2] J. Bruck, R Cypher and C.-R. Ho, "Wildcard Dimensions, Coding Theory and Fault-Tolerant Meshes and Hypercubes," IEEE Trans. on Computers, Vol. 44, No. 1, pp. 150-155, 1995.
[3] K. Ghose and K. R. Desai "Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.6, No. 4, pp.427-436, 1995.
[4] J. G. Peters and M. Syska, "Circuit-Switched Broadcasting in Torus Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 7, No. 3, pp. 246-255, March 1996.
[5] Y. Saad and M. H. Schutltz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.
[6] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. R. Shankar, "A Class of Hypercube_like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp. 800-803, Dec. 1993.
[7] A. Y. Wu, "Embedding of Tree Networks into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Compyting, Vol. 2, pp. 238-249, 1985.
[8] S-K. Yun and K-H. Park, "Comments on 'Hierarchical Cubic Networks'," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 9, No. 4, pp. 410-414, 1998.
[9] 주낙근, "그래프 연산과 그레이 코드를 이용한 상호 연결망의 설계," 전남대학교 전산통계학과, 박사학위 논문, 1995.