

공간-변형 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 설계를 위한 새로운 방법론

김혜연¹, 박주영², 박연목², 이성환¹
고려대학교 인공지능연구센터¹/제어계측공학과²

A synthesis procedure for associative memories based on space-varying cellular neural networks

Hye-yeon Kim¹, Jooyoung Park², Yonmook Park² and Seong-whan Lee¹
Center for Artificial Vision Research¹/Dept. of Control and Instrumentation Engineering²,
Korea University

요 약

본 논문에서는 연상 메모리 기능을 수행하는 공간-변형 셀룰라 신경망의 설계 방법론을 제안한다. 셀룰라 신경망에 관한 알려진 결과들과 새로 도출된 이론을 기반으로, 주어진 양극 벡터들을 기대할만한 성능으로 기억할 수 있는 공간-변형 셀룰라 신경망을 얻는 설계 방법론을 제안한다. 본 논문에 제안된 설계 방법론의 주요 부분은 일반화된 고유값 문제(GEVP)와 선형 행렬 부등식 문제(LMIP)를 푸는 것으로 이루어지며, 이 문제들은 현재 내부점 방법에 의해 효과적으로 풀릴 수 있다. 제안된 방법의 정당성은 설계 예제를 통해서 증명한다.

1. 서론

1988년 Chua와 Yang에 의해 처음 소개된 셀룰라 신경망[1]은 이웃 셀들과만 연결된 셀들로 구성된 연속 시간 폐환 신경망(feedback neural networks)의 일종이다. 국소 상호 연결 특성에 기인하여 VLSI 구현에 적합하며, 연상 메모리, 영상 처리, 패턴 인식 등 다양한 분야에서 적용된 예를 찾을 수 있다.

본 논문에서는 동일한 이웃 크기로 국소 상호 연결된 셀들로 구성되어 있지만 각 셀마다 다른 연결 강도를 갖는 비대칭 공간-변형 셀룰라 신경망을 통해 연상 메모리를 구현하는 문제를 다룬다. 이 연상 메모리의 목적은 주어진 양극 패턴을 신경망의 기억 벡터로 저장하고, 저장된 패턴에 충분히 가까운 임의의 벡터가 초기 조건으로 주어졌을 때 저장된 패턴이 최종 출력으로 연상될 수 있도록 하는 데 있다.

Liu와 Michel[2]은 신경 연상 메모리 설계에 가장 효과적이라고 알려져 있는 고유구조 방법(eigenstructure method)으로, Liu와 Lu[3]는 퍼센트론 학습 알고리즘을 기반으로, Park과 Park[4, 5]는 일반화된 고유값 문제(GEVP)를 기반으로 대칭 연결 가중 행렬을 갖는 공간-변형 셀룰라 신경망을 설계하는 방법을 제안했다. 본 논문의 설계 방법론은 Park와 Park의 전략과 빈집한 관련을 갖고 있으며, 더 좋은 성능을 얻기 위한 연결 연구로 볼 수 있다.

본 논문에서는 다음의 정의들과 기호 약속들을 사용한다. \mathbf{R}^n 실수 n 벡터들의 선형 공간을 나타낸다. 임의의 대칭 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 에 대해, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ 가 만족되면, \mathbf{A} 는 양의 정부호(positive definite)이다라고 하며, $\mathbf{A} > 0$ 으로 표기한다. 또한 $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ 는 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 가 양의 정부호임을 의미한다. \mathbf{H}^n 은 초입방체 $[-1, +1]^n$ 을 뜻한다. \mathbf{H}^n 에 속하는 모든 양극 벡터들의 집합은 \mathbf{B}^n 으로 표시된다. 두개의 벡터 α 와 α^* 사이의 해밍 거리는 $IID(\alpha, \alpha^*)$ 로 표기된다.

2. 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 시스템에 관한 배경 결과 및 주 이론

2.1 시스템 모델

본 논문에서 고려하는 이차원, 연속 시간, 제로 입력인 셀룰라 신경망은 아래와 같은 행렬-벡터 형태로 표현될 수 있다[1][2].

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{sat}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{sat}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1)$$

셀룰라 신경망 시스템 (1)은 $n = M \times N$ 개의 셀들로 구성된 이차원 $M \times N$ 배열이다. 여기서 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 는 상태 벡터, $\mathbf{y} \in \mathbf{H}^n$ 는 출력 벡터, $\mathbf{T} = [T_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 는 연결 강도 행렬, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ 은 바이어스 벡터를 나타내고, $\mathbf{sat}(\mathbf{x}) = [\mathbf{sat}(x_1), \dots, \mathbf{sat}(x_n)]^T$ 이다($\mathbf{sat}(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|)$). (1)의 초기 조건 벡터들은 항상 $|x_i(0)| \leq 1, i = 1, \dots, n$ 를 만족한다고 가정한다. 본 논문에서 다루는 셀룰라 신경망 시스템 (1)의 조밀하지 않은 \mathbf{T} 는 아래 정의되는 색인 행렬 $\mathbf{S} = [S_{ij,kl}] \in \mathbf{R}^{M \times M \times N \times N}$ [2]에 의해 결정된다($\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{S})$).

$$S_{ij,kl} = \begin{cases} 1, & C(k,l) \in N_r(i,j) \\ 0, & \text{그 외의 경우.} \end{cases}$$

양의 정수 r 에 대해 i 번째 행 j 번째 열 셀 $C(i,j)$ 의 r -이웃 $N_r(i,j)$ 은 $N_r(i,j) = \{C(k,l) : \max(|k-i|, |l-j|) \leq r, 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N\}$ 로 정의된다.

연결 가중 행렬에 더 이상의 제약 조건이 가해지지 않은 경우 위와 같은 종류의 셀룰라 신경망은 공간-변형 셀룰라 신경망으로 불린다.

2.2 시스템 설계 문제

효과적인 연상 메모리 기능을 수행하기 위해 셀룰라 신경망 메모리는 아래의 성질들을 만족해야 한다[4].

- 본 논문에서 프로토타입 패턴이라고 불릴 양극 벡터를 신경망의 기억 벡터로 저장한다.
- 저장된 프로토타입 패턴에 충분히 가까운 양극 벡터가 초기 조건으로 주어졌을 때, 신경망의 출력은 프로토타입 패턴을 향해 움직인다.
- 프로토타입 패턴이 아닌 기억 벡터, 즉, 의사 패턴의 수는 적다. 특히, \mathbf{B}^n 밖의 의사 패턴의 수는 최소화한다.

2.3 시스템 정성적 분석

주어진 셀룰라 신경망 메모리가 위의 설계 조건들을 만족하는지를 체크하기 위해 사용될 수 있는 이미 알려진 결과들은 본 논문의 설계 과정에 중요한 역할을 할 것이다:

- 만약 양각 벡터 $\alpha \in \mathbf{B}^n$ 가 아래 부등식

$$\alpha_i \left(\sum_{j=1}^n T_{ij} \alpha_j + b_i \right) > 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

을 만족하면, α 는 시스템 (1)의 기억 벡터이다[2].

- 만약 $T_{ii} \geq 1, \quad i = 1, \dots, n,$ (3)

이면 시스템 (1)의 기억 벡터는 오직 \mathbf{B}^n 에만 존재할 수 있다[3].

2.4 시스템 설계 핵심 지침

아래에 제시되는 새로운 이론은, 본 논문의 셀룰라 신경망 메모리 설계 방법론의 핵심 역할을 수행한다. 이론 진계를 명료하고 편리하게 하기 위해 $Z_i \equiv \{j | S_{ij} = 1, j \neq i\}$ 라는 표시 기호를 사용하도록 한다. 본 이론에서는 연결 강도 행렬 \mathbf{T} 가 대칭*이 아니어도 됨에 주목하자.

이론: 색인 행렬 $\mathbf{S} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ 와 프로토타입 패턴 $\alpha^* \in \mathbf{B}^n$ 이 주어지고, 셀룰라 신경망 파라미터 $\mathbf{T} = \mathbf{T}|\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 와 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ 가 $\kappa_i \geq 0$ 인 경우 다음 식

$$\alpha_i^* \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^* + b_i \right) > \kappa_i \max_{j \in Z_i} |T_{ij}| + (T_{ii} - 1) \quad (4)$$

을 만족하면, $\alpha_i \neq \alpha_i^*, \sum_{j \in Z_i} |\alpha_j - \alpha_j^*| < \kappa_i$ 인 $\alpha \in \mathbf{B}^n$ 는 다음 특성을 갖는다:

- 만약 $\mathbf{x}(0) = \alpha^*$ 이면, $x_i(t)$ 는 $t = 0$ 일 때의 α_i^* 로 움직인다.
- α 는 기억 벡터가 아니다.

증명: 생략

3. 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리를 설계하기 위한 GEVP/LMIP 접근 방법

이런 장에서는, 이전 장에서의 성질들을 기반으로 한 공간-변형 셀룰라 신경망을 설계하는 절차를 세우기로 한다. 설계 절차의 주 부분은 GEVP와/혹은 LMIP를 푸는 것으로 이루어진다. 두가지 모두 LMI(선형 행렬 부등식) 기반 문제이며, 최근 확립된 내부점 알고리즘에 의해 효과적으로 풀릴 수 있다(자세한 것은 [6] 참조).

3.1 선형 행렬 부등식(LMI)

선형 행렬 부등식은 다음과 같은 형태의 제약 조건이다.

$$A(z) \equiv A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_N A_N > 0. \quad (5)$$

여기서 $z = [z_1 \dots z_N]^T$ 는 변수이고, A_0, \dots, A_N 은 주어진 대칭 행렬들이다.

3.2 선형 행렬 부등식 문제(LMIP)

LMI (5)에 대응되는 LMIP는 $A(z_0) > 0$ 인 해 $z^0 \in \mathbf{R}^n$ 을 찾거나 혹은 LMI가 해가 없다는 것을 결정하는 것이다.

*인접 가중 행렬 \mathbf{T} 의 대칭성은 시스템 (1)의 모든 케적이 평형점으로 수렴하는 충분 조건이다[1]. 그러나 본 논문에서는 적용성과 성능을 향상시키기 위해 연결 가중 행렬에 이 충분 조건을 가하지 않았다.

3.3 일반화된 고유값 문제(GEVP)

GEVP의 기본 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda B(z) - A(z) > 0, \\ & B(z) > 0, \\ & C(z) > 0. \end{aligned}$$

여기서 A, B, C 는 변수 z 에 관한 affine 함수인 대칭 행렬들이다.

3.4 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 설계 전략을 GEVP/LMIP로 변환

앞에서 언급된 결과와 제시된 이론으로부터, 우리는 설계를 위한 지침을 얻을 수 있다.

첫째로, 각각의 프로토타입 패턴을 기억 벡터로 저장하고, 꼭지점에 오지 않는 기억 벡터들의 출현을 막는 것이 셀룰라 신경망 메모리의 가장 기초적인 두가지 요구조건이기 때문에, 조건 (2)와 (3)은 본 설계 과정에서 최고 우선순위에 올려져야 한다. 또한, 셀룰라 신경망 메모리의 각 파라미터들은 적절한 상한, 하한을 갖고 있어야 한다. 다음으로, 제안된 이론을 통해 각각의 κ_i 가 커질수록 프로토타입 패턴 α^* 의 의사 패턴이 존재하지 않는 흡입 영역이 커짐을 예상할 수 있다. 그러므로, 본 설계 작업에서, κ_i 가 양수이면서 (4)의 해가 존재할 때 κ_i 를 최대화하는 전략을 채택한다. $T_{ii} = 1, \kappa_i$ 가 양수일 때 식 (4)의 해 존재 여부는 다음 식에서와 동일하다.

$$\alpha_i^* \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^* + b_i \right) > 0. \quad (6)$$

그러므로, 식 (6)의 해가 존재할 때 우리의 전략은, 다음과 같이 요약될 수 있다: $T_{ii} = 1$ 로 고정하고, $\kappa_i \geq 0$ 을 최대화하며 다음 식을 만족하는 $T_{ij} \in (-U, U), j \in Z_i, b_i \in (-U, U)$ 를 찾는다.

$$\alpha_i^* \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^* + b_i \right) > \kappa_i \max_{j \in Z_i} |T_{ij}|. \quad (7)$$

$\max_{j \in Z_i} |T_{ij}| \neq 0, \kappa_i > 0$ 이며, (7)을 선형 제약 조건으로 변환시키기 위해 (7) 사이에 양변수 q_i 라는 제약을 가하도록 한다.

조건 (6)이 임의의 $T_{ij}, j \in Z_i$ 와 b_i 에 대해 만족되지 않을 때, 위의 전략은 적용될 수 없다. 이 경우, 기본적인 요구 조건 (2)와 (3)만을 만족하는 $T_{ij}, j \in Z_i$ 를 찾는 것이 전략이다.

$$\begin{cases} T_{ii} > 1 \\ \alpha_i^* \left(\sum_{j=1}^n T_{ij} \alpha_j^* + b_i \right) = T_{ii} + \alpha_i^* \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^* + b_i \right) > 1. \end{cases} \quad (8)$$

T_{ii} 가 충분히 클 때, 식 (8)은 간단히 만족될 수 있으나, 큰 T_{ii} 는 신경망의 의사 패턴의 수를 증가시키는 경향이 있다. 이런 주변 효과를 피하기 위해, ϵ 이 작은 양수일 때, T_{ii} 를 $T_{ii} = 1 + \epsilon$ 로 고정시킨다.

위의 전략을 통해 우리는 셀룰라 신경망 메모리를 설계할 새로운 방법론을 세울 수 있다. 본 논문에서 고려되고 있는 공간-변형 셀룰라 신경망 모델에 색인 행렬 $\mathbf{S} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ 와 프로토타입 패턴 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)} \in \mathbf{B}^n$ 이 주어졌을 때, 본 이론에서 주장되는 관점에서 향상된 성능을 갖는 셀룰라 신경망 메모리의 파라미터들(즉, $\mathbf{T} = \mathbf{T}|\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 와 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$)은 아래의 순서에 따라 얻어진다:

각각의 $i \in \{1, \dots, n\}$ 에 대해:

- 만약 다음 부등식

$$\alpha_i^{(k)} \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^{(k)} + b_i \right) > 0, k = 1, \dots, m \quad (9)$$

의 해가 존재하면:

- $T_{ii} = 1$ 로 고정하고
- 아래 최적화 문제를 풀어 $T_{ij}, j \in Z_i$ 와 b_i 를 찾는다.

$$\begin{aligned} \min \quad & (-\kappa_i) \\ \text{s.t.} \quad & (-\kappa_i)q_i + \alpha_i^* \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^* + b_i \right) > 0 \\ & |T_{ij}| < q_i, j \in Z_i \\ & |b_i| < U \\ & L < q_i < U \end{aligned} \quad (10)$$

- 그렇지 않으면:

- $T_{ii} = 1 + \epsilon$ 로 고정하고
- 아래 최적화 문제를 풀어 $T_{ij}, j \in Z_i$ 와 b_i 를 찾는다.

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} \left(\sum_{j \in Z_i} T_{ij} \alpha_j^{(k)} + b_i \right) &> -c, k = 1, \dots, m \\ -U < T_{ij} < U, j \in Z_i \\ -U < b_i < U. \end{aligned} \quad (11)$$

위의 순서에서, 문제 (9)와 (11)은 LMIP인 반면, 문제 (10)은 GEVP임을 주목하자.

4. 실험 및 분석

본 논문에서 제안된 GEVP/LMP 접근 방법의 적용 가능성을 검증하기 위해 $n = 7 \times 7$ 개의 셀이 이웃 반경 $r \in \{1, 2, 3\}$ 로 연결되어 있는 셀룰라 신경망 메모리를 고려한다. 본 예제에서는 그림 1에서 보여지는 영문 CGA 폰트 26 글자를 저장하는 것을 목적으로 한다.

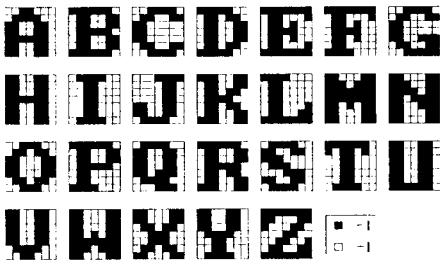


그림 1. 프로토타입 패턴 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(26)}$

각각의 $r \in \{1, 2, 3\}$ 과 이에 대응되는 색인 행렬 S 에 대해, $L = 1, U = 10, \epsilon = 0.1$ 인 제안된 설계 방법론에 따라 연결 가중 행렬 $T|_S$ 와 바이어스 벡터 b 를 구했다. 본 방법론에서 보여지는 GEVP와 LMP는 MATLAB LMI Control Toolbox의 "gevp" 함수와 "fesp" 함수를 사용하여 풀었다. 설계된 셀룰라 신경망의 성능 평가를 위해, 다음과 같이 정의되는 평균 상기 확률 $Prob(l)$ 를 사용했다: 프로토타입 패턴 $\alpha^{(k)}$ 와 정수 $l \in \{0, 1, \dots\}$ 가 주어졌을 때, $\delta B(\alpha^{(k)}, l) \equiv \{ \alpha \in \mathcal{B}^n | HD(\alpha, \alpha^{(k)}) = l \}$ 인 초기 조건 양극 벡터로 시작된 케지의 최종 결과가 $\alpha^{(k)}$ 로 나오는 확률을 상기 확률 $P(\alpha^{(k)}, l)$ 로 정의한다. 평균 상기 확률 $Prob(l)$ 는 모든 프로토타입 패턴 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)}$ 에 대한 $P(\alpha^{(k)}, l)$ 의 평균이다(즉, $Prob(l) \equiv \{ \sum_{k=1}^m P(\alpha^{(k)}, l) / m \}$). 시뮬레이션을 통해 $Prob(l)$ 를 구한다. $\bigcup_{k \in \{1, \dots, m\}} \delta B(\alpha^{(k)}, l)$ 인 각각의 실험

벡터는 시스템의 초기 조건으로 주어지고, 그것의 최종 결과는 충분히 긴 시간 뒤에 관찰되었다.

비교를 위해, 같은 예제를 풀 수 있는 세가지 설계 방법론을 고려하였다. Park과 Park[4, 5]의 GEVP 방법론과 최적 제약 조건하의 조밀하지 않은 셀룰라 신경망 설계 방법론[3]은 $T_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ 의 최적 제약 조건[3]을 사용한다. 그러나 이 경우 $r \in \{1, 2, 3\}$ 인 때 그림 1을 기억 벡터로 저장하는 문제 해가 없다. 그래서 이 설계 방법론들은 본 예제에서는 적용 가능하지 않다. 반면에, [2]의 고유구조 방법론은 최적 제약 조건에 의존하지 않는다. $k = 1, W_i = -7 \times [-1, \dots, 1] \times U_{i2}^1$ 인 때, 그 순서에 따라, 각각의 이웃 반경 $r \in \{1, 2, 3\}$ 에 대해 셀룰라 신경망 메모리를 설계하였다. 이 신경망들에 대해, 같은 실험 벡터를 갖고 시뮬레이션을 수행하였고, 그림 2에 보여지는 각각의 평균 상기 확률을 얻었다. 그림의 실험 결과 비교를 통해 본 논문의 설계 방법론의 우수성을 확인하였다.

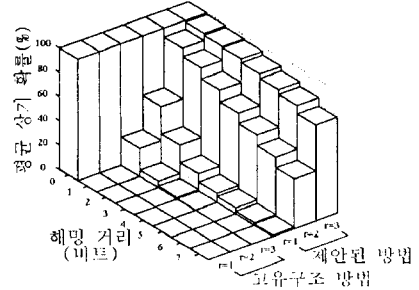


그림 2. 평균 상기 확률

참고 문헌

- [1] L. O. Chua and L. Yang, "Cellular neural networks: Theory and Applications," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 35, pp. 1257-1290, 1988.
- [2] D. Liu and A. N. Michel, "Cellular neural networks for associative memories," *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, Vol. 40, pp. 119-121, 1993.
- [3] D. Liu and Z. Lu, "A new synthesis approach for feedback neural networks based on the perceptron training algorithm," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 8, pp. 1468-1482, 1997.
- [4] J. Park, Y. Park, "An Optimization Approach to Design of Cellular Neural Networks," To appear in *International Journal of Systems Science*, 2000.
- [5] 김혜연, 박인복, 박주영, 이성환, "셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 설계를 위한 새로운 방법론," 한국정보과학회 가을 학술발표논문집(II), 제 26권 2호, pp. 339-341, 1999
- [6] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

¹ l 이 0 혹은 1인 경우는, 실험 벡터로 모든 가능한 양극 벡터를 사용하였다. 정수 l 이 1보다 큰 경우에는, $Prob(l)$ 을 계산하기 위한 실험 벡터는 각각의 프로토타입 패턴 $\alpha^{(k)}$ 에서 $\delta B(\alpha^{(k)}, l)$ 인 무작위로 선택된 100개의 양극 벡터들을 모았다.

² k, W_i, U_{i2} 의 정확한 의미는 [2]의 셀룰라 신경망 설계 방법론 (D)를 보시오.