

## 기술함수를 사용한 포화 비선형성 시스템의 안정화

송자윤  
인천전문대학 제어계측과

### Stabilization of Saturation Nonlinearity System using Describing Functions

Ja-Youn Song  
Incheon City College

**Abstract** - When the input is small, increase of the input leads to a corresponding increase of output, but when the input reaches a certain level, its further increase does produces little or no increase of the output. When this phenomenon happens, the device is said to be in saturation. Occurrence of saturation amounts to reducing the gain of the device as the input signals are increased. An extreme case of saturation is the on-off or relay nonlinearity. On-off nonlinearities have effects similar to those of saturation nonlinearities. Furthermore they can lead to "chattering" in the physical systems due to their discontinuous nature.

This paper presents stabilization method of saturation nonlinearity system using deadzone describing function etc.. And computer simulation results show that saturation nonlinearity can be eliminated due to deadzone nonlinearity.

### 1. 서 론

비선형 포화(saturation)현상은 유압이나 가열시스템[1] 등에서 볼 수 있는 바와 같이 기계적 움직임이 중지되는 것 같은 작은 신호들에 대해서는 비선형요소의 출력이 선형동작을 나타내지만 입력진폭이 포화를 일으킬 만큼 크다면 비선형요소의 출력은 정현파입력에 대해서 잘려진 정현파를 내보낸다[2,3]. 그러나 포화 비선형요소에 데드존(deadzone) 비선형요소를 병렬연결한 경우 정현파입력의 응답은 정현파로 되지만 포화 비선형요소를 포함한 플랜트시스템의 출력은 대부분 시스템 선형화나 기술함수 등에 의해 안정화시킬 수 있다[4-8].

본 연구는 포화 비선형성이 일어나는 가열시스템에 적용된 바 없는 데드존 비선형 기술함수 블록[5,9]을 사용한 포화 비선형 플랜트출력의 새로운 안정화기법을 제안하였으며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 이를 검증하였다.

### 2. 데드존 기술함수에 의한 포화 보상

포화 비선형성은 표 1에 나타낸 바와 같이 작은 입력신호에 대하여 포화 비선형요소의 출력은 입력에 비례하지만, 입력신호의 크기가 어느정도 커지면 입력에 비례하지 않고 잘려진 형태의 출력을 내보낸다. 표 1에서 알 수 있는 바와 같이 포화 비선형성의 기술함수  $N_s$ 와 데드존 비선형성의 기술함수  $N_d$ 를 비교해 보면 포화 비선형성의 경사  $k$ 가 데드존 비선형성의 경사와 같다면 다음과 같은 관계를 갖는다[4].

$$k = N_s + N_d \quad (1)$$

이와 같은 관계를 이용하면, 포화 비선형요소와 데드존 비선형요소를 그림 1과 같이 서로 병렬연결하거나 각각의

시스템 출력을 얻은 후에 합함으로써 포화 비선형성을 충분히 보상할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 비선형 시스템에 대해서는 모든 시스템에 일반적으로 적용될 수는 없기 때문에 이러한 방법을 적용할 때에는 어떠한 시스템이든지 모의 실험과 같은 시뮬레이션을 통해서 확실한 결과를 입증하는 것이 필요하다.

특히 기술함수의 적용은 수학적인 해석도 중요하지만 비선형요소로 된 시뮬링크 블록모델을 사용하여 컴퓨터에서 비선형 보상시스템을 구성하고 시뮬레이션을 실행해 보면 시스템의 보상을 어떻게 해야 할 것인지 쉽게 알 수 있게 된다.

포화특성은 리미트(limit)특성이라고도 하는데 그림 1과 같은 방법 외에 본 논문에 적용한 안정화방법과 백러쉬(backlash)특성으로도 안정화시킬 수 있다.

표 1 포화 및 데드존 특성 기술함수

비선형요소	기술함수
 포화 특성	$X \leq s \text{ 일 때 } N_s = 0$ $X > s \text{ 일 때 } N_s = k_2 + \frac{2(k_1 - k_2)}{\pi} \sin^{-1} \frac{s}{X} + \frac{2s(k_1 - k_2)}{\pi X} \sqrt{1 - \frac{s^2}{X^2}}$
 데드존 특성	$X \leq d \text{ 일 때 } N_d = 0$ $X > d \text{ 일 때 } N_d = k - \frac{2k}{\pi} \sin^{-1} \frac{d}{X} - \frac{2kd}{\pi X} \sqrt{1 - \frac{d^2}{X^2}}$

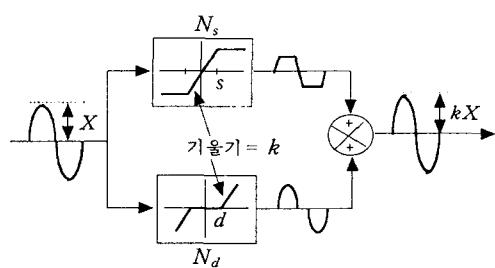


그림 1 포화 비선형과 데드존 비선형요소의 병렬합성 출력 ( $d = s$ )

### 3. 포화 비선형시스템의 안정화

#### 3.1 시스템 모델링

비선형 가열시스템의 경우 한계온도에 이르면 더 이상 온도가 오르지 않는 포화상태에 이르게 된다. 이러한 시스템에 대해서 효율적인 운전을 하기 위하여 본 연구에서는 3차 가열시스템을 고려하였다. 열역학적 3차 가열시스템에 관한 전기적 열-전류 유추회로는 그림 2와 같이 표현할 수 있으며 비포화상태에서 이 시스템의 미분방정식은

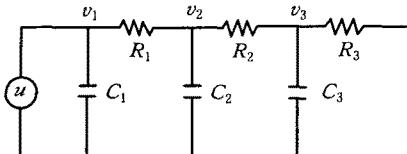


그림 2 3차 가열시스템의 전기적 열-전류 유추회로

$$\dot{v}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} v_1 + \frac{1}{R_1 C_1} v_2 + \frac{1}{C_1} u \quad (2)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{R_1 C_2} v_1 - \frac{1}{R_{12} C_2} v_2 + \frac{1}{R_2 C_2} v_3 \quad (3)$$

$$\dot{v}_3 = \frac{1}{R_2 C_3} v_2 - \frac{1}{R_{23} C_3} v_3 \quad (4)$$

와 같이 쓸 수 있다[7]. 여기서  $u$ 는 전류(열)입력을 나타내고  $R_{12} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ ,  $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$ 이며,  $R_i$ 는 전기저항(열저항),  $C_i$ 는 정전용량(열저항), 그리고  $v_i$ 는 전압(온도)을 나타낸다.

그림 2에서 마디 3의 측정된 전압(온도)  $v_3$ 를 출력  $y$ 로 하면 비포화상태에서 시스템의 상태행렬은

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & \frac{-1}{R_{12} C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2 C_3} & \frac{-1}{R_{23} C_3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1], \quad D = 0 \quad (6)$$

이고, 열입력  $u$ 로부터 제어되는 출력  $y$ 까지의 플랜트 전달함수는

$$G_p(s) = \frac{R_1 R_3}{L s^3 + M s^2 + N s + R_1} \quad (7)$$

로 주어진다. 여기서

$$L = R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3$$

$$N = R_1 R_1 C_1 + R_1 R_2 C_1 + R_1 R_3 C_1 + R_1 R_3 C_3 + R_1 R_2 C_2 + R_1 R_3 C_2$$

$$M = R_1 R_1 R_3 C_1 C_3 + R_1 R_2 R_3 C_1 C_3 + R_1 R_1 R_2 C_1 C_2 + R_1 R_1 R_3 C_1 C_2 + R_1 R_2 R_3 C_2 C_3$$

#### 3.2 포화 보상시스템의 설계

그림 2와 같은 가열시스템에서 포화 비선형성을 보상하기 위하여 데드존 비선형요소를 사용하고, 상태귀환 및 상태관측기 등을 사용하여 제어기를 구성할 수 있다.

우선 제어대상 플랜트의 응답에 있어서 과행량 2%이내 정정시간 0.2[s]를 갖도록 하고, 3번째 극은 원점에서

-10의 위치에 극배치를 한다면

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1, C_1 = C_2 = C_3 = 1 \quad (8)$$

인 경우, 고유각주파수는 25.65 [rad/s]로 되고 고유값  $P$ 와 원하는 극에 대한 고유방정식은

$$P = [-10 \ -20 + 16.06i \ -20 - 16.06i] \quad (9)$$

$$s^3 + 50s^2 + 1058s + 6579 = 0 \quad (10)$$

로 된다.

상태귀환 이득행렬  $K_0$ 와 관측기귀환 이득행렬  $K_e$ 는 식 (8)의 값을 식 (5),(6)에 대입하여 MATLAB에서

$$K_0 = \text{acker}(A, B, P) \quad (11)$$

$$K_e = \text{acker}(A', C', P) \quad (12)$$

와 같이 Ackermann의 공식으로 계산되는 프로그램을 쓰면 쉽게 얻어진다.

이상과 같이 얻어진 결과를 사용하여 포화보상 제어시스템을 구성하면 그림 3과 같이 나타낼 수 있다.

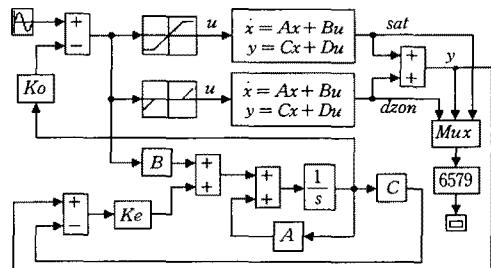


그림 3 포화보상 제어시스템 구성

#### 4. 시뮬레이션

컴퓨터 시뮬레이션을 위해서 표 2와 같은 상태에서의 입력을 가하였고, 실행한 결과는 그림 4~그림 8에 나타내었다. 보상을 하지 않은 포화시스템의 응답은 그림 4와 그림 5에서 알 수 있는 바와 같이 포화상태에서의 출력은 약 0.1배로 되므로 비포화상태와의 비교를 위해서 출력의 10배를 하여 나타낸 것이다. 그림 3과 같이 포화보상 제어를 하여 나타낸 것이다.

표 2 시스템상태와 입력

포화	데드존	정현파입력	계단입력
상한: 0.1 하한: -0.1	시작: -0.1 끝: 0.1	크기: 10 주파수: 3[rad/s] 기타: 0	최종값: 10 기타: 0

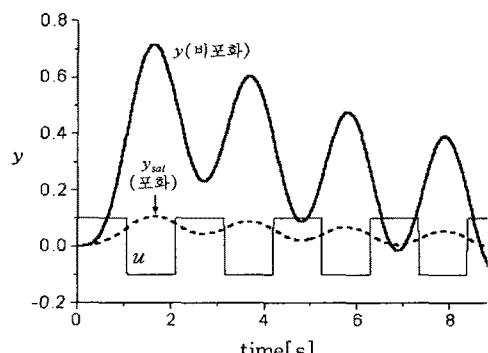


그림 4 무보상 무제어상태에서의 정현파입력과 출력응답

어시스템을 구성하여 실행한 결과는 그림 6과 그림 7에 나타낸 것으로서 극배치 후에 바라는 시스템 전달함수의 정상이득이  $1/6579$ 과 같이 작게 나오므로 원래 시스템 전달함수의 정상이들과 동등하게 하기 위해서 출력축에 이득을 6579배로 하였고, 그림에 나타낸 응답도 이와 같이 실행된 것이다. 그림 6은 비선형 포화시스템에 정현파 입력을 가했을 때이고, 그림 7은 계단입력을 가했을 때의 응답으로 테드존 비선형요소에 의해서 포화 비선형성은 완전히 보상되고, 상태귀환제어기 및 상태관측기를 구성함으로써 시스템출력이 빠르게 안정화되는 것을 확인하였다.

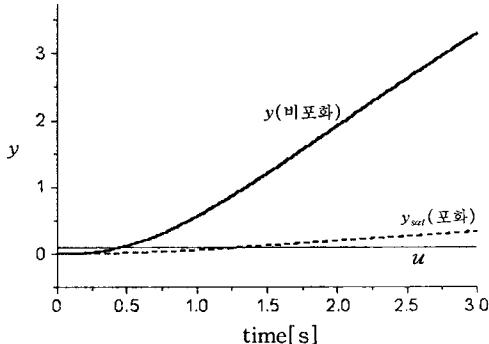


그림 5 무보상 무제어상태에서의 계단입력과 출력응답

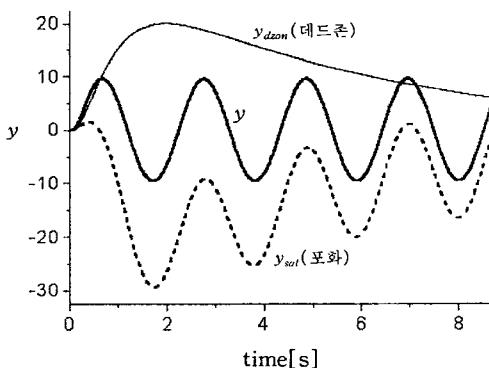


그림 6 데드존 보상에 의한 제어시스템의 응답  
(정현파입력의 경우)

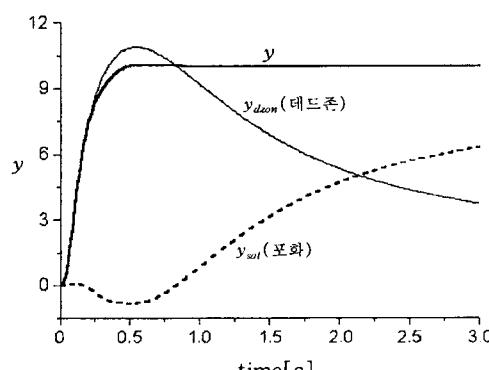


그림 7 데드존 보상에 의한 제어시스템의 응답  
(계단입력의 경우)

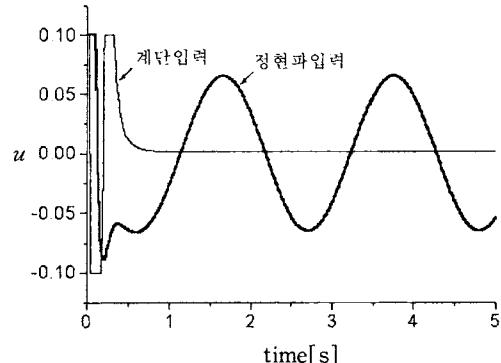


그림 8 제어입력의 변화

그림 8은 보상된 제어시스템에 정현파입력 또는 계단입력을 가했을 때 제어입력(포화 비선형요소의 출력)  $u$ 의 변화를 나타낸 것으로서 0.5[s] 이내에 안정상태 또는 제로에 이르고 있다.

## 5. 결 론

본 연구는 가열온도 제어시스템과 같은 비선형 포화시스템에 대하여 데드존 비선형요소를 사용하여 포화 비선형성을 보상하였고, 상태귀환제어기 및 상태관측기를 구성하여 시스템의 응답특성이 빠르게 안정화되는 것을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 보여주었다. 이와 같은 방법은 비선형 플랜트에서 비선형요소만을 분리할 수 없을 경우에 적용이 가능토록하기 위해 플랜트의 출력을 합하여 실행한 것으로서, 이러한 기술함수의 사용은 복잡모델을 컴퓨터에 입력하여 시뮬레이션을 실행하는 것이므로 수학적 계산 등이 매우 간편하고 실행결과를 빨리 확인할 수가 있으나 실제적인 시스템제어기 설계분야에 적용하기 위해서는 좀 더 충분한 검토가 있어야 될 것으로 생각한다.

## (참 고 문 헌)

- [1] 양원영 외 3명, "제어시스템", 광문각, pp. 49-56, 1995.
- [2] 김도현 외 2명, "현대제어시스템", 회중당, pp. 474-476, 1994.
- [3] 박종국 외 8명, "최신제어시스템", 사이텍미디어, pp. 707-725, 1999.
- [4] 강철구 외 3명, "현대제어공학", 회중당, pp. 633-655, 1997.
- [5] Jean-Jacques E.Slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall International Inc., pp. 169-179, 1991.
- [6] Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering 3rd Edition", Prentice-Hall International Inc..., pp. 59-60, 1997.
- [7] Bernard Friedland, "Advanced Control System Design", Prentice-Hall International Inc., pp.129-135, 1996.
- [8] K.Hui, C.W.Chan, "Stabilization of Systems with Deadzone Nonlinearity", Proceeding of the 1998, IEEE, International Conference on Control Applications, pp. 1036-1040, Trieste, Italy, 1-4 September 1998.
- [9] Carla Schwartz, Richard Gran, "Describing Function Analysis using MATLAB and Simulink", IEEE Control Systems Magazine, pp.19-26, August 2001.