

스핀업 유동에서의 비선형 에크만 분출 모델의 성능평가 Performance Evaluation of Nonlinear Ekman Pumping Models for a Spin-up Flow

최윤환¹ · 문중춘² · 서용권³

Yoon Hwan Choi¹, Jong Choon Moon², and Yong Kweon Suh³

1. 서 론

스핀업(spin-up)이란 유체가 담고 있는 용기가 정지상태에서 갑자기 회전하거나, 용기와 유체가 상대적 운동이 없는 강체회전(solid body rotation)인 상태의 일정한 각속도(Ω_s)로 회전하는 동안 갑자기 변동 각속도($\Delta\Omega$)만큼 증가하여 또 다른(최종) 각속도($\Omega_0 = \Omega_s + \Delta\Omega$)의 강체회전 상태로 도달하는 과도기적 현상을 의미한다. 예를 들면, 회전하는 하나의 큰 용기라 할 수 있는 지구에서 해류의 유동을 들 수 있다. 즉 강체회전 상태인 해류가 시시각각으로 변하는 바람의 영향으로 해류표면에 전단응력이 가해져 이로 인해 유동이 변하는 것 등이다.

지금까지 스핀업에 관한 연구들은 대부분이 축대칭 문제이다. 회전유동에서 말하는 축대칭이란 속도나 압력이 원주방향 위치 변화에 무관한 것을 의미한다. 이와 같은 축대칭 형상을 가지는 용기중 대표적인 것이 원통용기이고 환상공간이나 깔때기 모양도 여기에 해당된다. 축대칭 문제와 관련된 고전적인 연구로는 Greenspan and Howard(1963)가 원통용기에 관하여 연구를 행한 바 있다.

한편 근래에는 비축대칭 형상의 스핀업 문제가 관심거리로 대두되고 있다. 원통용기나 환상공간 그리고 깔때기 모양의 용기 내에 장애물이 설치되어 있거나, 직사각형 용기가 대표적인 비축대칭 형상이라 할 수 있다. 이와 같은 비축대칭 형상에 관한 연구를 살펴보면, van Heijst *et al.*(1992)이 반원통(semicircular)

용기 내의 스핀업 유동에 관하여 실험과 수치해석을 통하여 비점성영역의 유동은 2차원적이라는 것을 확인하였고, 에크만 경계층의 두께는 수심에 비례하여 일정하게 변화하는 것을 밝혔다.

직사각형 용기 내의 스핀업에 관한 연구를 보면 van Heijst *et al.*(1989, 1990)이 실험을 통하여 직사각형 용기에 생성되는 셀(cell)의 개수가 종횡비(aspect ratio)와 극히 작은 섭동(perturbation) 또는 교란(disorder)에 의해 바뀌어질 수 있다는 것을 밝혀냈고, 레이놀즈수가 변하더라도 스핀업 초기의 유동은 크게 달라지지 않는 현상을 확인하였는데 이러한 원인은 회전에 의해 형성된 포물형의 자유표면과 소용돌이의 상호작용에 의한 것이라 생각하였다. van Heijst *et al.*(1994)은 직사각형 용기 바닥에 경사를 주고 이에 따른 자유표면에서의 와류의 거동과 혼합을 연구한 바 있다. 그리고 서(1993)와 Suh(1994)는 직사각형 용기의 종횡비에 따른 용기 내의 셀형성 메카니즘을 수치해석으로 연구하였다. 또한 최근에는 Lopez *et al.*(1996)이 직사각형의 종횡비와 레이놀즈수를 변수로 하여 용기 좌우 모서리에서 발생한 반시계방향 와류의 혼합여부를 조사하였다. 한편, Suh and van Heijst(2000)는 직사각형 용기 내에 장애물(원형막대)을 설치하여 이로 인한 유동특성을 실험과 이론해석으로 파악하였다. 그러나 이들 연구는 모두 에크만 분출 모델이 전혀 사용되지 않았기 때문에 수치해석과 실험의 결과가 장시간 동안 잘 일치하는 결과를 찾을 수 없다.

¹ 동아대학교 생산기술연구소(Department of Mechanical Engineering, Dong-A University, Pusan 604-714, Korea)

² 경동정보대학 기계산업시스템계열(Department of Mechanical Industrial System, Kyung Dong College of Techno Information 712-904, Korea)

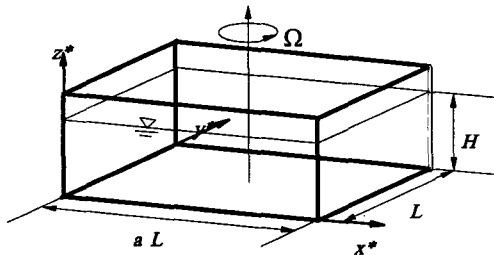
³ 동아대학교 기계산업시스템 공학부(Department of Mechanical Engineering, Dong-A University, Pusan 604-714, Korea)

따라서, 이러한 비축대칭 형상에서 계산기의 용량을 고려한 2차원적인 계산을 위해서는 서두에서 설명한 3차원 효과에 해당하는 에크만 경계층에 대한 효과를 고려하여야 한다. 선행 연구(최와 서, 1999; 서 등, 2000)에서는 에크만 경계층에 대한 수학적 모델로서 선두 오더(leading order)의 모델이 제안되었다. 이와 같은 선두 오더 모델(앞으로는 'L-모델'이라 부름)에 관하여 van Heijst 등(2000)은 바탕회전(background rotation)하에서 고립와류(solitary vortex)의 유동과 같은 단순한 축대칭 유동에 적용한 결과 실험과 수치해석이 비교적 잘 일치하는 결과를 얻었다. 하지만, 지금까지 조사한 바에 의하면 비축대칭 형상을 가지는 스핀업 유동에 관하여 에크만 경계층을 고려한 연구는 선행 연구(최와 서, 1999; 서 등, 2000)를 제외하고는 찾아볼 수 없었다.

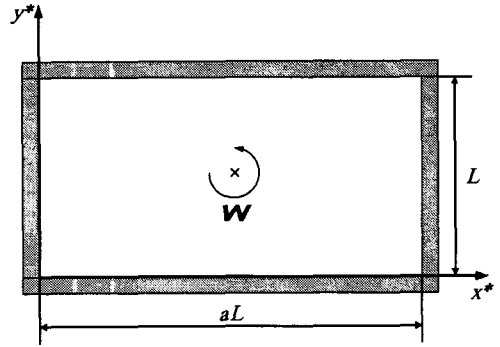
본 연구 모델과 같이 비축대칭 형상을 가지는 직사각형 용기에서는 모서리 부분의 유동 박리현상에 의한 유동의 복잡성과 불안정성이 동반되므로 좀더 정밀한 유동 모델이 필요하다는 것을 생각할 수 있다. 또한 바탕회전에 대한 요동회전의 각속도 비인 로스비수가 커질 때 실제 유동을 묘사하는 데 있어서 한계가 있음을 선행 연구(최윤환, 서용권, 1999; 서 등, 2000)를 통하여 알 수 있었다. 한편, 바닥의 경계층 방정식은 선형이기 때문에 선두 오더 해에 덧붙여 1차 오더의 해를 해석적으로 구할 수 있다는 것을 예측할 수 있다. 이러한 배경 하에서 본 연구에서는 1차 수정(first-order correction) 에크만 분출 모델(M-모델)을 제안함과 동시에 실제유동과의 비교를 통하여 에크만 분출 모델의 타당성을 입증하고자 한다.

2. 이론해석

2.1 유동 모델과 지배방정식



(a) Perspective view



(b) Top view

Fig. 1. Schematic diagram of the model basin and the coordinates system

본 연구에 사용된 모델과 좌표계는 Fig. 1과 같다. 여기서 H 는 수심, L 은 용기의 세로방향(y^* -방향) 길이, aL 은 가로방향(x^* -방향) 길이이다. 본 연구는 종횡비가 2인 직사각형에 관한 연구이므로 $a=2$ 이다. 용기는 $x^*=aL/2$, $y^*=L/2$ 인 지점 즉, 용기의 중앙을 축으로 하여 회전한다. Fig. 1(a)와 같이, 동점성계수 ν 인 유체가 담긴 직사각형 용기가 바탕 각속도 Ω_0 로 강제운동을 하는 상태에서 갑자기 $\Delta\Omega$ 를 더한 최종각속도 $\Omega_0 + \Delta\Omega$ 로 회전하는 경우에 용기 내에 형성되는 스핀업 유동을 대상으로 한다. 이와 같은 조건에서 속도를 $L\Delta\Omega$ 로, 시간을 $1/\Delta\Omega$ 로, 길이를 L 로, 그리고 압력을 $\rho L^2 \Omega_0 \Delta\Omega$ 로 무차원화하면 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + f \right] v \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + y \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + f \right] u \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v - x \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

여기서, 무차원 각속도 변화를 나타내는 f 와 라플라스 연산자 ∇^2 는 다음과 같다.

$$f = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \cos \omega t) & \text{for } 0 \leq t \leq \pi/\omega \\ 0 & \text{for } \pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega \end{cases}$$

식 (1a)와 (1b)에서 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \quad \text{Re} = \frac{L^2\Delta\Omega}{\nu} \quad \omega = \frac{\omega^*}{\Omega_0}$$

여기서, ε 는 로스비 수, Re 는 레이놀즈 수, 그리고 ω 는 용기의 최초의 각속도(Ω_s)에서 최종 각속도(Ω_0)로 이전되는 동안의 변화를 나타내는 각속도이다. 더욱 구체적으로 말하자면, 용기의 회전 각속도 변화는 실제로 π/ω 의 시간동안 이루어진다.

식 (1a, 1b)에서 압력항을 소거하기 위해 식(1b)를 x 에 대해 미분한 결과를 식 (1a)를 y 에 대하여 미분한 결과를 빼고 와도

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

을 도입하면 아래와 같은 와도방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + f + \frac{1}{2} \zeta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \zeta - 2 \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 모든 경계면에서 경계조건은 다음과 같다.

$$u = v = 0 \quad (8)$$

식 (2)에서 수직속도 w 는 다음에서 유도될 에크만 분출모델로부터 구해준다.

2.2 에크만 분출 속도식

바닥의 에크만 경계층에 대한 지배 방정식은 경계층의 두께와 수직방향의 속도는 각각 경계층 바깥영역에서 정의되는 길이와 수평 방향 속도에 비해 매우 작다는 가정하에서 다음과 같이 세울 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + W \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + f \right\} v \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + W \frac{\partial v}{\partial \xi} + 2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + f \right\} u \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - x \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad (10)$$

여기서 수직방향의 새로운 좌표 ξ 와 수직속도성분 W 는 아래와 같이 정의된다.

$$\xi = z \sqrt{\frac{\text{Re}}{\varepsilon}} \quad (11a)$$

$$W = w \sqrt{\frac{\text{Re}}{\varepsilon}} \quad (11b)$$

다음으로 속도성분 u, v, W 를 아래와 같이 전개한다.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (12a)$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \quad (12b)$$

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots \quad (12c)$$

한편, 식 (9a), (9b)에서 압력은 경계층 바깥 부분에서 구해진 것으로부터 공급된다. 식 (1a), (1b)에서 압력에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -2v + \varepsilon P_x \quad (13a)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 2u + \varepsilon P_y \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} P_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ - 2fv - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u - y \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} P_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ + 2fu - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v + x \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (14b)$$

ε 에 대해 같은 차수의 항끼리 모으면 선두 오더, 1차 오더, \dots , 등의 방정식을 얻는다. 우선 선두 오더의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + 2v_0 = 2v \quad (15a)$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + 2u_0 = -2u \quad (15b)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial W_0}{\partial \xi} = 0 \quad (16)$$

이어서 1차오더의 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2v_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ &+ W_0 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - 2v_0 f - P_x - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_0 - y \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - 2u_1 &= \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &+ W_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + 2v_0 f - P_y - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v_0 + x \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = 0 \quad (18)$$

식 (15a, 15b)는 2계 연립 선형 상미분 형태이다. 이 방정식들의 u_0 , v_0 를 연속방정식(식 (16))에 대입하면 다음과 같은 선두 오더에 대한 수직방향 속도를 구할 수 있다.

$$W_0 = \frac{\zeta}{2} \left[1 - e^{-\varepsilon} (\sin \xi + \cos \xi) \right] \quad (19)$$

선두 오더 방정식에서 구한 속도, u_0 , v_0 , W_0 를 이용하여 1차 오더에 대한 속도, u_1 , v_1 , W_1 를 구해보자. 1차 오더의 방정식에서 좌변은 구해야 될 미지의 값이고, 우변은 선두 오더에 의해 계산된 기지의 값이다. 선두오더에서 구한 결과를 이용하여 u_1 , v_1 을 구한다. 이것을 연속방정식(식 (18))에 대입하여 W_1 을 구하고 식 (19)에서 구한 선두오더에 대한 결과를 ξ 에 대하여 경계층 영역 $0 \sim \infty$ 범위에서 적분하고, 식 (12c)에 대입하면 최종적으로 구하고자 하는 에크만 분출 속도식을 얻을 수 있으며,

이 결과는 Hart(1994)가 구한 결과와 일치한다. 마지막으로 식 (7)의 좌변에 존재하는 속도장의 구배를 Taylor-Proudman 이론(Pedlosky, 1979)에 의한 식을 적용하면 아래와 같은 에크만 분출 속도를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cong \frac{w_E}{h} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_E}{h} &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\text{Re}}} \left[\frac{\zeta}{2} - \varepsilon \left\{ \frac{1}{8} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right. \right. \\ &+ \frac{1}{4} \zeta \sin \omega t - \frac{1}{8} \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \zeta \\ &+ \frac{7}{80} \zeta^2 + \frac{13}{80} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{7}{80} \left(v \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ &\left. \left. + \frac{3}{20} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)의 우변의 첫 번째 항이 선두 오더의 에크만 분출 속도(L-모델)이며, 나머지가 1차 수정 속도(M-모델)이다. 그리고 N-모델은 에크만 분출 속도(식 (21))를 무시한 경우에 해당한다. 에크만 분출속도의 식 (21)은 물론 주유동이 정상적인 경우에도 적용될 수 있다.(이 때는 $\partial \zeta / \partial t$ 와 $\zeta \sin \omega t$ 가 사라진다.)

속도를 유동함수 ψ 와 속도포텐셜 ϕ 을 도입하여 정의한 식

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (22a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (22b)$$

위 식을 연속방정식(식 (20))와 와도의 식에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = w_E / h, \quad \nabla^2 \psi = -\zeta \quad (23)$$

정리하면, 경계층 바깥의 대부분의 영역에 대해 풀어야 할 식은 식 (7)과 (23)이며, u , v 는 식 (22a),

(22b)로 구한다. 벽면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (24a)$$

$$\psi = 0 \quad (24b)$$

3. 수치해석 및 실험방법

3.1 수치해석 방법

식 (7)과 (23)의 공간미분은 중심차분의 방법으로 차분화하였으며, 식 (7) 차분식의 시간적분은 4계의 룬게-쿠타(Runge-Kutta)법으로 처리하였고, 식 (23)의 차분식은 PCGM(preconditioned conjugate gradient method)을 사용하여 해를 구하였다. 격자계로서는 ζ, ψ, ϕ 가 같은 지점에서 정의되는 균일 표준 격자계(standard grid system)가 사용되었다.

3.2 실험방법

본 연구에서는 속도 가변형의 회전 테이블을 사용하여 가시화 실험을 수행하였다. Fig. 2는 실험장치를 도시한 것이다. 그림에서 왼쪽 부분이 유동가시화를 위한 회전테이블 장치이다.

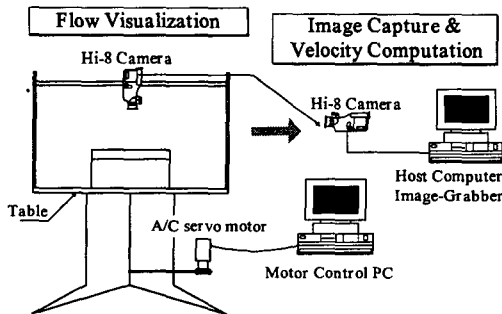


Fig. 2. Schematic diagram of the experimental apparatus

회전테이블은 서보모터와 서보모터 드라이브에 의하여 가변적으로 회전할 수 있으며, 서보모터 드라이브의 제어는 C-프로그램으로 코딩한 프로그램에 의하여 제어된다. 여기서 원활한 테이블의 회전을 위하여 1/80의 감속비를 가지는 감속기가 사용되었고, 정확한 위치제어를 위하여 타이밍벨트가 회전축과 모터 연결용으로 사용되었다.

유동가시화실험 및 PIV 해석에 대하여 설명하면, 가로× 세로가 0.3× 0.15 [m]의 크기를 가지는 아크릴로 제작된 직사각형 용기의 중심이 회전테이블의 중심에 위치하도록 한다. 테이블을 일정한 속도로 장시

간 회전시켜 용기 내의 유체(물, 23~25 °C)가 강제회전하도록 한 뒤 어느 시점에서 테이블의 회전속도를 주어진 양만큼 증가시켰다. Fig. 3은 테이블의 회전속도 변화를 나타낸 것이다. 여기서 T_1 은 테이블이 정지상태에서 일정각속도에 도달하는 시간을 나타낸 것이고, T_2 는 일정각속도에서 변동각속도를 더한 최종각속도에 도달하는 시간을 나타낸다. 따라서 T_2 에 의해 식 (3)에 나타난 ω 값이 결정되며, 이 값은 제어용 프로그램에 의해 주어진다. 유동가시화에서는 표면에 띄워진 입자의 이동을 Hi-8 mm 캠코더를 사용하여 촬영하였다. 촬영한 영상은 이미지 보드(DT-3155)를 통해 디지털화하였으며, 초당 30개 정도의 프레임의 저장한 뒤 속도장 계산에 사용하였다. 속도장 계산에는 PIV 해석을 위한 상용 프로그램인 Thinker's EYES를 사용하였다.

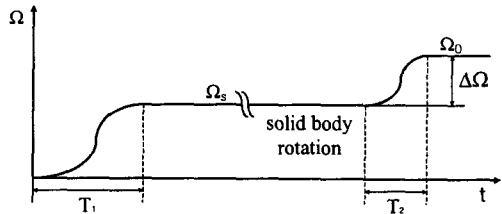


Fig. 3. Schematic diagram of the turntable's rotational speed control

4. 결과 및 검토

4.1 운동 에너지를 통한 에크만 분출모델의 검증

수치해석에 사용된 세 가지 에크만 분출 속도 모델 즉 L-, M-, N-모델의 정밀도는 PIV에 의한 유속 측정결과와의 비교로써 검증하였다. Fig. 4 (a)는 $Re=5890$ 그리고 (b)는 $Re=14725$ 에서 공간에 대해 평균한 운동 에너지의 시간변화를 나타낸 것이다. 운동 에너지는 아래와 같이 정의된 식으로 구하였다.

$$E(t) = \frac{1}{A} \int (u^2 + v^2) dA \quad (25)$$

여기서 $E(t)$ 는 각 시간에 대한 운동 에너지이며, A 는 유동장의 면적이다.

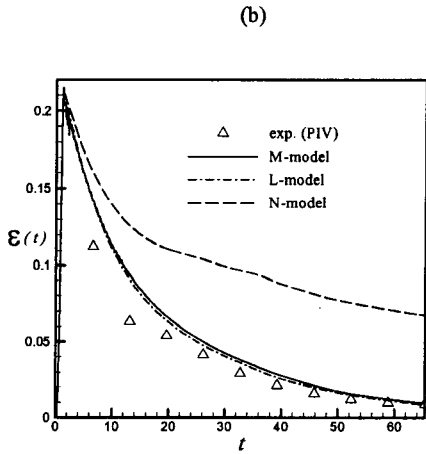
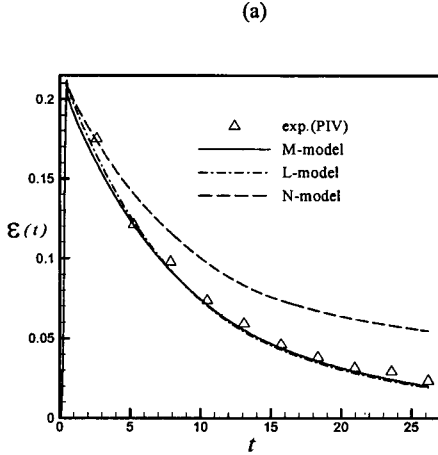


Fig. 4. Time evolutions of the kinetic energy given by the numerical and experimental methods for (a) $Re = 5890$ and (b) $Re=14725$ at $h=0.8$ and $\varepsilon = 0.625$.

그림에서 L-모델과 M-모델의 결과는 실험 결과와 잘 일치한다. 그러나, 둘 사이의 차이는 거의 없음을 알 수 있다. 이것은 M-모델이 적어도 본 유동모델과 파라미터 조건에서는 거의 불필요함을 의미한다. 한편, 이 그림에서는 또한 N-모델의 결과(파선)가 다른 결과들과 시간이 흐를수록 그 격차가 커지고 있음을 보여주고 있다. 그리고 이 격차는 Re 가 커질수록(Fig. 4 (b)) 더욱더 크게 나타난다. 이는 N-모델이 초기 때는 잘 맞지만 시간이 흐를수록 실제유동과 차이가 커진다는 선행연구(최와 서, 1999; 서 등, 2000)의 결과를 이해시켜주는 셈이다.

N-모델의 결과가 다른 결과에 비해 같은 시점에서 항상 높은 운동 에너지를 보임(Fig. 4)은 식 (7), (20),

및 (21)을 통해 알 수 있다. 즉, 식 (7)의 좌변 마지막 항

$$2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + f + \frac{1}{2} \zeta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (26)$$

에서, 두 번째 괄호내 항은 식 (20), (21)에서 알 수 있는 바와 같이, 선두 오더의 모델만 고려한다면, ζ 에 비례한다. 그리고 충분히 작은 ε 에 대해 첫 번째 괄호내의 항 중에서 $1/\varepsilon$ 이 지배적이라고 가정한다면 결국 식 (26)은

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon Re} \zeta} \quad (27)$$

가 되어 이것은 식 (7)에서 와도의 감쇠 역할을 한다고 볼 수 있다. 따라서 식 (26)이 없는 N-모델에서는 그만큼 와도의 감쇠가 작아지고 이에 따라 운동 에너지의 감쇠도 미약하다.

4.1 에크만 분출속도항 비교

Fig. 4에 대한 결과를 에크만 분출속도 식의 각 항을 나누어서 검토해 보도록 한다. 우선 에크만 분출속도 w_E/h 의 시간항과 체적항 그리고 점성항은 식 (7)에 의해 아래와 같이 근사적으로 둘 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{4} f \zeta - \frac{1}{8} \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta = \\ & - \frac{1}{8} \left\{ u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\} + \frac{1}{4} f \zeta - \frac{1}{4} \frac{df}{dt} \quad (28) \end{aligned}$$

위 식을 에크만 분출 속도식(식 (21))에 대입하면 아래와 같은 형태가 된다.

$$\begin{aligned} w_E = & \sqrt{\frac{\varepsilon}{Re} \left[\frac{\zeta}{2} - \varepsilon \left\{ \frac{1}{4} \left(\zeta \sin \omega t - \frac{df}{dt} \right) \right. \right.} \\ & + \frac{7}{80} \zeta^2 + \frac{3}{80} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ & \left. \left. + \frac{7}{80} \left(v \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \right.} \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{3}{20} \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial y} \right) \right\} \quad (29)$$

M-모델과 L-모델의 에크만 분출 속도를 비교하기 위하여 식 (29)을 아래와 같이 각 항별로 분리하여 그 크기를 각각 비교하였다.

$$w_E = \sqrt{E(K_0 + K_1)} \quad (30)$$

$$K_0 = \frac{1}{2} \zeta \quad (31a)$$

$$K_1 = K_{11} + K_{12} + K_{13} + K_{14} \quad (31b)$$

$$K_{11} = -\frac{7}{80} \varepsilon \zeta^2 \quad (31c)$$

$$K_{12} = -\frac{3}{80} \varepsilon \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (31d)$$

$$K_{13} = -\frac{7}{80} \varepsilon \left(v \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (31e)$$

$$K_{14} = -\frac{3}{20} \varepsilon \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial y} \right) \quad (31f)$$

여기서 E는 ε / Re 이다. 식 (31a)만을 고려한 경우가 L-모델에 해당하며, 식 (30)의 모든 항을 고려한 경우는 M-모델이다.

Fig. 5는 $Re=5890$, $\varepsilon = 0.625$ 그리고 $h=0.8$ 인 경우 $y=1/2$ 인 지점에서 얻은 식 (30)의 각 항의 크기를 비교한 것이다. K_0 가 가장 크게 나타남을 알 수 있다. 본 수치해석 결과는 $\varepsilon = 0.625$ 에 대한 것이므로 ε 이 1에 비해 매우 작은 값은 아니다. 따라서 비록 K_{11} , K_{12} , ..., K_{14} 에 ε 이 곱해져 있기는 하지만 이것보다는 그 앞의 상수 $7/80$, $3/80$, ... 등이 작기 때문에 K_{11} , K_{12} , ..., K_{14} 들이 K_0 보다 작은 값을 가진다. 따라서 이러한 조건에서는 선두 오더 항만으로 충분하다고 생각된다. ε 이 증가할수록 실제 유동장과 가까운 결과를 얻기 위해서는 1차 오더 항을 고려해야 할 것이다.(Fig. 6 관련설명참조)

한편 K_0 (식 31a)을 제외하면 와도의 제곱이 곱해진 K_{11} (31c)의 값이 절대치로서 가장 크게 나타난다. (K_0 과 부호가 반대인 값을 가짐) 식 K_{11} (31c) 다음으로 크게 나타나는 것은 K_0 과 부호가 반대인 식 (31f)의 K_{14} 인데, 이 두 값을 합하면 상쇄(相殺)된다.

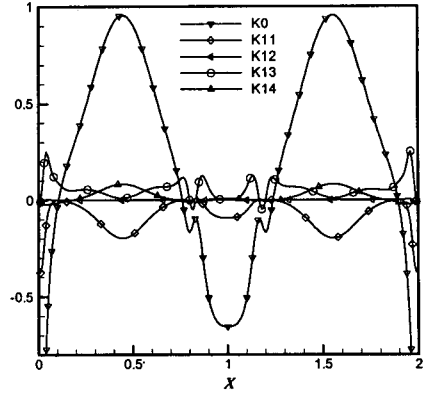


Fig. 5. Distributions of K_0 , K_{11} , K_{12} , ..., K_{14} (refer to (31)-(32f) in the text) at $y=1/2$ and at $t=32.7$; $Re=5890$ and $\varepsilon = 0.625$.

따라서 M-모델에서는 이 값들을 모두 합하게 되므로 에크만 분출 속도는 줄어들게 되고, 이로 인하여 와도의 감쇠 작용도 비교적 작아지게 된다.

4.3 실제 유동장을 통한 검증

Fig. 4의 결과만을 놓고 보면 M-모델과 L-모델간의 차이는 없는 것으로 파악된다. 하지만 Fig. 4의 결과는 공간에 대한 평균운동에너지를 나타낸 것이므로 이것만으로는 실제 유동장 내에서의 와류의 거동을 정확히 파악하기는 어렵다. 모델간의 정밀도에 대한 검증은 위해서는 실제 유동양상을 비교 검토할 필요가 있으며, 이를 위해 각 시간에 대한 순간 속도장을 사용하여 비교하고자 한다. Fig. 6은 Fig. 4와 동일한 파라미터이고 다만 $Re=14730$ 인 경우에 대하여 시간에 따른 순간속도장을 나타낸 것이다. Fig. 6에서 (a), (b), (c), (d)는 각각 PIV 유동측정에 의한 실험결과, M-모델, L-모델 그리고 N-모델을 사용한 수치해석 결과이다.

우선 PIV에 의한 유동측정(Fig. 6 (a))에서 와류들의 거동을 살펴보면, $t=6.5$ 일 때 용기의 중앙에는 한 개의 시계방향의 와류가 생성되며, 유동장 초기에는 이 와류가 유동영역의 대부분을 차지한다. 이 시계방향의 와류로 인하여 용기의 모서리 부분인 우상(右上)과 좌하(左下)에 유동 박리 현상이 발생하고 이로 인하여 반시계방향의 와류가 생성된다.

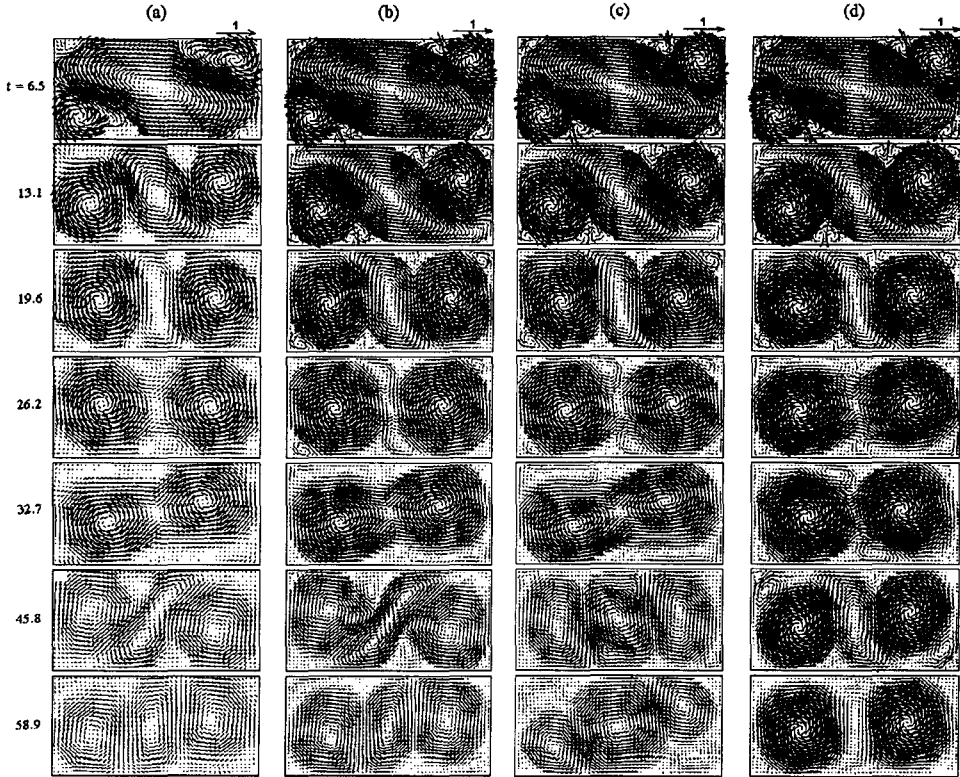


Fig. 6. Velocity vectors at the times indicated for $Re=14730, h=0.8$, and $\varepsilon=0.625$ given by (a) experimental method and numerical methods with (b) M-, (c) L-, and (d) N-models.

그리고 시간이 경과하면 두 개의 반시계방향 와류가 차지하는 영역이 커지고, 반대로 중앙의 시계방향 와류의 영역을 줄어든다. 그리고 $t=45.8$ 일 때 두 개의 반시계방향 와류는 용기의 중앙에서 서로 결합(merging)한다. 이 경우 전체 유동장은 시계-반시계-시계방향의 와류 구조를 가지며 이 구조는 시간이 지나도 변하지 않고, Fig. 4 (b)에서 알 수 있듯이 마찰에 의하여 유동장의 에너지만 줄어들게 된다. 이와 같은 유동양상은 M-모델(Fig. 6 (b))에서도 유사하게 나타난다. 그리고 L-모델(Fig. 6 (c))의 경우는 $t=32.7$ 까지는 실제 유동장과 유사한 유동양상을 보이지만 $t=45.8$ 이 되면 중앙에서 두 개의 반시계방향의 와류의 결합은 이루어지지만 실제 유동장보다 일찍 발생한다. 이러한 차이는 평균운동에너지를 나타낸 Fig. 4을 통해서도 알 수 있다. 따라서 시간이 장시간 경과했을 때는 M-모델이 L-모델에 비해서 실제 유동장과 좀더 유사한 결과를 보이므로 M-모델이 실제 유동장을 보다 더 정확히 표현할 수 있는 모델이라 생각된다.

한편, 예크만 분출 속도가 배제된 N-모델(Fig. 6 (d))인 경우의 유동양상은 PIV 유동측정결과에서 보이는 중앙에서 두 개의 반시계방향의 와류가 결합하는 현상도 존재하지 않고, 유동이 보다 강하게 나타나는 것을 알 수 있다. 이러한 차이점은 기존의 정성적인 실험(유동가시화)으로는 파악하기 어려운 점이며, PIV와 같은 정량적인 유동측정을 이용한 경우만 가능한 점이라는 것을 생각할 때 여기서 PIV의 의의를 찾을 수가 있다.

전반적으로 보면 N-모델을 사용했을 때가 다른 경우에 비해 큰 속도벡터를 보이고 있고, 이는 Fig. 4의 검토 결과를 뒷받침한다. 또한, N-모델의 결과에서는 시작 와류가 조기에 사라짐을 확인할 수 있다. 결과적으로 이는 시작 와류가 좌우 와류에 의해 늘어져서 2차원적 확산에 의해 사라진 것이다(초기의 시작 와류 및 양측 구석 와류의 거동은 Ekman 분출 속도를 무시한 서(1993), Suh(1994)의 연구 결과와 유사하다).

5. 결론

본 연구에서는 종횡비가 2인 직사각형 용기 내의 스피업 유동에 대하여 수치해석적인 방법과 실험적인 방법을 사용하여 에크만 분출 모델의 성능을 조사하였다. 수치해석에서는 3차원 효과를 고려한 에크만 분출 모델(L-모델, M-모델)을 사용하여 에크만 분출을 고려하지 않은 경우보다 실제 유동에 얼마나 잘 일치하는지를 파악하였다. 실험에서는 PIV를 이용한 유동측정을 통하여 정량적인 데이터를 얻었으며, 그 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 에크만 분출 모델을 사용하지 않은 경우는 유동장의 운동 에너지가 실제 유동장의 운동 에너지보다 크게 나타나고 와류의 거동도 상이하게 관측되므로 2차원적 유동해석에서는 에크만 분출 모델의 적용이 필요하다.
- 2) 에크만 분출 속도에 대한 모델로서 선두오더만 고려하여도 스피업 초기에는 실험과 많은 차이를 보이지 않지만 시간이 경과하면 선두오더와 1차 수정모델에 의한 결과가 차이를 보이므로 좀 더 정확한 유동해석을 위해서는 1차 수정모델의 사용이 필요하다.
- 3) 에크만 분출 속도항의 비교를 통하여 ϵ 이 증가하면 1차 수정 모델의 필요하다는 것을 확인하였다.

사 사

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (2000-1-3040 0-002-3) 지원으로 수행되었으며 이에 사의를 표한다.

참고문헌

서용권, 1993. "직사각형 내부에서의 2차원 스피업", 대한기체학회논문집, 17(7), pp. 1805~1812.
 최윤환, 서용권, "1999. 수직격판이 있는 용기 내의 지균류", 한국해양공학회지, 13(4), pp. 124~131.
 서용권, 최윤환, 김성균, 이두열, 2000. PIV를 이용한

바탕회전하에서 회전요동하는 직사각형 용기 내의 유동해석. 대한기체학회논문집, 24(6), pp. 845-851.

H. I. Andersson, J. T. Billdal and G. J. F. van Heijst, 1992. Spin-up in a Semi-circular Cylinder. *Int. J. Num. Methods in Fluids* 15, pp. 503-524.
 H. P. Greenspan, L. N. Howard, 1963. On a Time-dependent Motion in a Rotating Fluid. *J. Fluid Mech.* 17, pp. 385-404.
 John E. Hart, Nonlinear Ekman Suction and Ageostrophic Effects in Rapidly Rotating flows. 1994. *Geophys. Astro-phys. Fluid Dynamics* 79, pp. 201-222.
 G. J. F. van Heijst, 1989. Spin-up Phenomena in Non-Axisymmetric Containers. *J. Fluid Mech.* 206, pp. 171.
 G. J. F. van Heijst, P. A. Davies and R. G. Davis, 1990. Spin-up in a Rectangular Container. *Phys. Fluids A2*, pp. 150-191.
 G. J. F. van Heijst, L. R. M. Maas and C. W. M. Williams, 1994. The Spin-up of Fluid in a Rectangular Container with a Sloping Bottom. *J. Fluid Mech.* 265, pp. 125-159.
 D. M. Henderson, J. M. Lopez and D. L. Stewart, 1996. Vortex Evolution in Non-Axisymmetric Impulsive Spin-up from Rest. *J. Fluid Mech.* 324, pp. 109-134.
 J. Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics. 1979. *Springer-Verlag*, pp. 43-45.
 L. Z. Sanson, G. J. F. van Heijst, 2000. Nonlinear Ekman Effects in Rotating Barotropic Flows. *J. Fluid Mech.* 412, pp. 75-91.
 Y. K. Suh, 1994. Numerical Study on Two-Dimensional Spin-up in a Rectangle. *Phys. Fluids* 6, pp. 2333-2344.
 Y. K. Suh, G. J. F. van Heijst, 2000. Spin-up in a Rectangular Container with an Internal Cylindrical Obstacle. *Phys. Fluids* 12, pp. 1986-1996.