

이산 섬유 배열각을 이용한 복합재료 적층 평판의 최적 설계

김 태 욱*

Layup Optimization for Composite Laminates with Discrete Ply Angles

Tae-Uk Kim

Key Words: Stacking Sequence Optimization(적층순서 최적화), Branch and Bound Method(분기법)

Abstract

In this paper, an algorithm for stacking sequence optimization which deals with discrete ply angles is used for optimization of composite laminated plates. To handle discrete ply angles, the branch and bound method is modified. Numerical results show that the optimal stacking sequence is found with fewer evaluations of objective function than expected with the size of feasible region, which shows the algorithm can be effectively used for layup optimization of composite laminates.

1. 서 론

섬유강화 복합재료 적층 평판은 기존의 등방성 재료에 비해 강성/무게, 강도/무게비가 뛰어나고, 사용 목적에 따라 여러 인자를 조정할 수 있는 설계의 유연성이 우수함에 항공기, 잠수함, 자동차 등의 경량화가 요구되는 부품 재료로 널리 사용되고 있다. 따라서 복합재료 적층 평판의 최적 설계에 대해서는 많은 연구가 이루어졌으며, 주로 층(layer)의 두께와 섬유 배열각(ply angle)을 설계 변수로 하여 강성, 강도, 좌굴 하중, 무게 등의 다양한 목적 함수와 구속 조건을 이용하였다. 먼저 강도나 강성의 최적화에 관한 연구로는 Park⁽¹⁾의 방법을 들 수 있다. 이는 고전 적층 이론을 이용해 미리 가정한 몇 개의 적층 순서에 대해 최초 파괴 조건(first ply Failure criterion)을 최소화하는 섬유 배열각을 계산하여 강도를 최대

화한 방법이다. 또, Kim 등⁽²⁾은 Tsai-Wu 파괴 조건을 목적 함수로 하여 이를 최대화하는 적층 순서를 계산하였다. 그러나 모두 제한된 형태의 간단한 적층 순서에 대해, 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다. 한편, 강성을 최대화하는 방법으로는 목적 함수로 적층판의 변형 에너지를 최소화하는 방법이 널리 쓰였다. Tauchert와 Adibhalta⁽³⁾는 섬유 배열각을 연속 변수로 두고 고전 적층 이론을 이용하여 강성을 최대화하였고, Kam과 Chang⁽⁴⁾은 전단 변형을 고려하기 위해 1차 전단 이론을 이용하였는데 역시 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다.

섬유 배열각과 층의 두께를 설계 변수로 두는 다단계 최적화(multilevel optimization)기법에 대한 연구도 있었는데, 이는 각 변수를 독립적으로 결정하는 두 개의 최적화 단계를 반복 계산하여 목적 함수를 최소화하는 방법이다. Kam과 Lai⁽⁵⁾는 섬유 배열각을 설계 변수로 강성을 최적화하고, 두께를 변수로 전체 무게를 최소화하였는데 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다. Franco 등⁽⁶⁾은 고차 전단 이론을 사용하여 고유 진동수와 무게를 목적 함수로 두었고, Mota 등⁽⁷⁾은 좌굴 하중, 강성, 무게 등의 최적화를 하였는데 이상의 연구

* 회원, 한국항공우주연구원

는 모두 섬유 배열각을 연속 변수로 취급하였다.

섬유 배열각을 이산 변수로 다룬 연구도 있었는데, Haftka와 Walsh⁽⁸⁾는 0 또는 1을 갖는 변수를 도입하여 고전 이론에 기초한 좌굴 하중을 최소화하였고, Adali 등⁽⁹⁾도 좌굴 하중과 관련된 다목적함수 최적화에 이러한 방법을 이용하였다. 한편 이와 같은 0-1 변수를 도입할 경우 설계 변수의 개수는 (층 층의 수) × (사용 가능한 섬유 배열각의 수)가 되어 층의 수가 늘어날 경우 설계 변수의 수가 상당히 증가하게 된다. 최근에는 유전 알고리즘을 이용한 연구가 이루어졌는데, Riche와 Haftka⁽¹⁰⁾, Sivakumar 등⁽¹¹⁾의 연구를 들 수 있다.

이상의 연구들을 설계 변수의 측면에서 고찰해보면 많은 연구가 섬유 배열각을 연속 변수로 취급한 점을 알 수 있다. 그러나 실제의 경우 섬유 배열각은 0°, ±45°, 90° 등과 같이 사용할 수 있는 값이 제한되어 있는 경우가 많다. 따라서 섬유 배열각이 설계 변수일 경우 이들의 조합에 의한 적층 순서(stacking sequence) 최적화가 이루어져야 하며, 층의 수와 사용 가능한 배열각의 수가 많아지더라도 이를 효율적으로 처리할 수 있는 이산 변수 최적화 방법이 필요하게 된다.

본 논문에서는 이를 위해, 정수 계획법(Integer Programming)에 널리 쓰이는 분기법(branch and bound method)⁽¹²⁻¹³⁾을 복합재료 적층판의 경우에 알맞게 수정하고, 이러한 방법을 실제 최적화 문제에 효율적으로 사용할 수 있음을 보이게 된다.

2. 최적화 이론

2.1 분기법(Branch and bound method)

적층 평판의 적층 순서 최적화를 위해서 분기법에 기초한 알고리즘을 이용하게 되는데, 이를 위해 먼저 분기법에 대해 간략히 살펴보기로 한다. Fig. 1은 정수 변수 최적화 문제의 경우에서 분기(branching)가 이루어지는 과정을 예를 들어 간략하게 도시한 것이다. 즉 n개의 설계 변수 중 X_k 와 X_{k+1} 이 정수가 아닌 값을 얻었다고 가정 한 뒤 이후의 탐색 과정을 나타낸 것이다. P_i 는 노드를 나타낸 것이고, f_i 는 그 때의 목적 함수, f_U 는 현재 최적해에 의한 목적 함수를 말한다. 분기의 예로 P_2 로부터는 X_{k+1} 에 관한 구속 조

건과 함께, P_4 와 P_5 가 만들어진다. 또한 P_3 와 P_4 는 탐색이 종료되는 상황인데, 각각 정수 최적해를 얻었거나 f_U 보다 큰 목적함수를 가지는 경우를 나타내었다. P_2 와 P_5 로부터는 최적해가 나올 가능성이 있으므로 분기가 이루어지는데, 이러한 것을 라이브 노드(live node)라 한다.

이와 같은 알고리즘을 적층 평판의 적층순서 최적화에 그대로 적용하기는 곤란하며, 0-1 변수를 도입하더라도 섬유 배열각의 수와 층의 수가 증가할 경우 설계 변수가 너무 많아지므로 계산상의 어려움이 따르게 된다. 따라서 최적화 과정의 대부분을 차지하는 목적 함수의 계산 횟수를 가능한 줄이고, 설계 변수의 수가 많은 적층 평판 최적화에 사용하기 편리한 알고리즘 개발의 필요성은 크다고 할 수 있다.

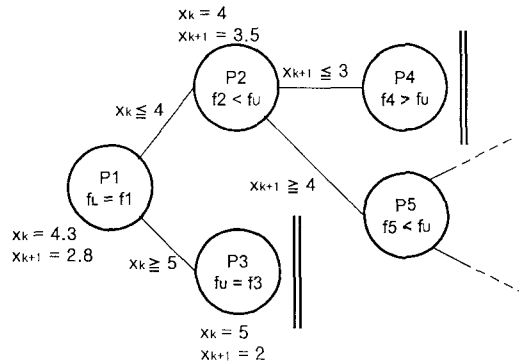


Fig. 1 Branch and bound tree for integer programming.

2.2 적층 순서 최적화

본 논문에서는 적층 평판의 강성 또는 좌굴 하중을 최대화하는 적층 순서를 구하게 된다. 한편 강성의 최대화에는 목적 함수로 변형 에너지를 최소화하여, 적층 평판의 평균적인 강성을 최대화하는 방법을 사용하게 된다.

이러한 적층 순서 최적화에는 앞서 언급하였듯이 이산 변수 최적화가 요구되는데, 이를 위해 기존의 분기법에 기초한 수정된 알고리즘을 이용하게 된다. 분기법은 정수 변수 최적화 문제에 사용되는 가장 일반적이고 강력한 방법의 하나인데, 기본 원리는 최적해의 후보가 되는 정수 영역내의 모든 점들을 어떻게 효율적으로 하나하나 검사하느냐에 있다고 할 수 있다. 다음에서 기존

의 분기법이 적층 순서 최적화에 적용되는 과정을 간략히 설명하기로 한다.

먼저 임의의 섬유 배열각, θ_i 를 갖는 층의 강성 행렬 성분은 Tsai와 Pagano의 불변량⁽¹⁴⁾, U_i 등을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (2)$$

$$Q_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (3)$$

$$Q_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta \quad (4)$$

$$Q_{44} = \overline{Q_{44}} \cos^2 \theta + \overline{Q_{55}} \sin^2 \theta \quad (5)$$

$$Q_{55} = \overline{Q_{55}} \cos^2 \theta + \overline{Q_{44}} \sin^2 \theta \quad (6)$$

여기서 $\overline{Q_{ii}}$ 는 $\theta = 0$ 일 때의 강성이며, U_i 는 이들의 함수이다. 이 때 식 (2)부터 (6)까지의 대각 요소가 최대값을 가지는 경우는 다음과 같다.

$$(Q_{11})_{\max} = U_1 + U_2 + U_3 = \overline{Q_{11}} \quad (7)$$

(at $\theta = 0$)

$$(Q_{22})_{\max} = U_1 + U_2 + U_3 = \overline{Q_{11}} \quad (8)$$

(at $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$(Q_{66})_{\max} = U_5 + U_3 = \frac{\overline{Q_{11}} + \overline{Q_{22}} - 2\overline{Q_{12}}}{4} \quad (9)$$

(at $\theta = \frac{\pi}{4}$)

$$(Q_{44})_{\max} = \overline{Q_{55}} \quad (at \theta = \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

$$(Q_{55})_{\max} = \overline{Q_{55}} \quad (at \theta = 0) \quad (11)$$

식 (7)부터 (11)까지의 $(Q_{ii})_{\max}$ 를 동시에 강성 행렬의 대각 요소로 가진다는 것은 실제 일어날 수 없는 경우이다. 즉, 각 성분 모두 최대의 강성을 가지게 되는데, 이를 강성으로 가지는 층을 이상층(ideal layer)이라고 정의한다.

만약 임의의 적층 순서에 대해 실제 층의 강성을 모두 이상층의 강성으로 대체한 뒤 적층 평판의 변형 에너지를 구할 경우, 그 값은 원래의 값보다 항상 작거나 적어도 같게 된다. 즉,

$$W = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [K_i] \{u_i\} \leq \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad (12)$$

가 성립한다. 여기서 $\{u\}$ 는 변위 벡터, $[K]$ 는 적층 평판의 강성 행렬을 나타내며 하첨자 i 는 이상층으로 대체한 뒤 구한 값을 의미한다. 이러한 원리는 좌굴 해석에도 똑같이 이용될 수 있다. 즉, 좌굴 하중은 다음 식에 의해 결정된다.

$$([K] + \lambda [K_G]) \{u\} = \{0\} \quad (13)$$

여기서 $[K_G]$ 는 기하학적 강성 행렬(geometric stiffness matrix)로 물성치와는 무관하다. 좌굴 하중은 위 식의 1차 고유치를 구하면 되는데, Rayleigh 계수와 다음의 관계를 가진다.

$$\lambda_1 = \min \rho(u) \quad (14)$$

$$= \min \left(\frac{\{u\}^T [K] \{u\}}{\{u\}^T [K_G] \{u\}} \right)$$

실제 층을 이상층으로 대체할 경우 $[K]$ 의 대각 요소만이 커지고 $[K_G]$ 는 변하지 않으므로, Rayleigh 계수의 최소값은 더 커지게 되고 따라서 좌굴 하중으로 더 큰 값을 얻게 될 것이다.

즉 목적 함수, F 가 변형 에너지나 좌굴 하중(압축 하중이므로 음의 부호이다.)일 경우, 다음 식이 성립한다. 식에서 i 는 이상층을 나타낸다.

$$F([\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N]) \geq F([i/i/\dots/i]) \quad (15)$$

$$F([\theta_1/i/\dots/i]) \geq F([i/i/\dots/i]) \quad (16)$$

$$F([\theta_1/\theta_2/i/\dots/i]) \geq F([\theta_1/i/i/\dots/i]) \quad (17)$$

$$F([\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N]) \geq F([\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_{N-1}/i]) \quad (18)$$

식 (15)에서 (18)은 임의의 적층 순서가 주어졌을 때, 실제 층을 이상층으로 바꾸고 목적 함수를 계산하면, 그 값은 반드시 감소하거나 적어도 동일하다는 것을 보여준다. 즉 위 식의 우변은, 이상층이 존재하는 적층 순서에서 이를 임의의 섬유 배열각을 갖는 실제 층으로 바꾸고 계산한

목적 함수들의 하한치가 되는 것이다.

이상의 성질을 이용하여, 다음과 같이 기존의 분기법을 적층 순서 최적화에 적합하게 수정할 수 있다. 최적화의 첫 단계로 초기 적층 순서를 설정하고, 그 때의 목적 함수로 F^* 를 얻는다. 다음 단계로 적층 평판의 모든 층을 이상층으로 대체한 뒤, 이상층을 하나씩 소거해가는 과정을 밟게 된다. 즉, 이상층에 의한 강성을 사용 가능한 섬유 배열각에 의한 실제 강성을 갖는 층으로 바꾸게 되는 것이다. 이러한 과정에서 이상층이 존재하는데도 불구하고, F^* 보다 큰 값을 얻는 적층 순서에 대해서는 식 (15)~(18)에 따라, 더 이상의 탐색(이상층을 실제 강성층으로 대체하는 과정)이 필요없게 되어 계산상의 효율성을 확보하게 된다.

Fig. 2는 초기 적층 순서로 $s_1 \sim s_n$ 이 주어지고 섬유 배열각으로 $\theta_1 \sim \theta_4$ 를 사용할 수 있을 때의 탐색 과정 일부를 도시한 것이다. Fig. 2에 나타난 과정을 모든 이상층이 소거될 때까지 수행하면 최적의 적층 순서를 얻을 수 있고, F^* 는 최종적으로 최적해일 때의 목적 함수가 됨을 알 수 있다.

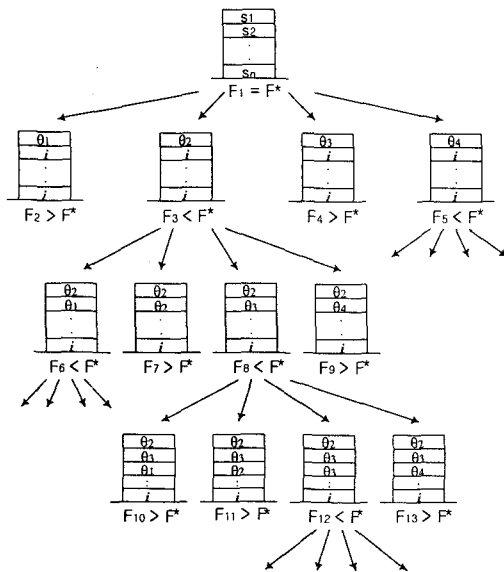


Fig. 2 Search for optimal stacking sequence using branch and bound algorithm.

3. 수치 결과

2.1 해석 모델

적층 순서 최적화의 목적 함수로는 변형 에너지와 좌굴 하중이 사용된다. 적층 평판의 정적 및 좌굴 해석 도구로 Reddy의 고차 전단이론⁽¹⁵⁾에 기초한 유한요소법을 사용하였다. 이 방법에서는 변위 u, v 를 두께 방향 좌표, z 의 3차 다항식으로 가정한다. 따라서 지그재그(zigzag) 분포를 보이는 u, v 를 근사적으로 나타내고, 포물선 형태의 전단 응력 분포를 얻게 되어 전단 보정계수 (shear correction factor)가 필요없게 된다. 식 (39)는 고차 전단이론의 변위장을 나타낸 것이다.

$$u = u_0(x, y) + z \left[\psi_x - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$v = v_0(x, y) + z \left[\psi_y - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (39)$$

$$w = w_0(x, y)$$

수치해석을 위해서는 대칭 적층 평판(symmetric laminated plate)을 고려하였고, 유한요소 해석을 위해 전체 평판을 36개의 4절점 요소로 분할하였다. 통상적으로 대칭 적층 평판의 해석에는 1/4 모델을 많이 사용하는데, 이는 직교 적층(cross ply)에 유효한 개념이며, 일반적인 대칭 적층판의 해석결과에는 오차를 줄 수 있다.⁽¹⁶⁾ Table 1은 sine하중이 작용하는 $[0/90]_s$, $[45/-45]_s$ 단순 지지 적층판에 대해, full-model과 quarter-model을 이용하여 계산한 최대 처짐을 비교한 것이다. 직교 적층에 대해서는 두 모델이 동일한 결과를 주나, 그렇지 않은 경우에는 오차가 있음을 알 수 있다. 최대 처짐은 $w = \frac{w_{\max} E_2 h^3}{b_0 a^4} 100$ 에 의해 무차원화된 값이다.

Table 1 Comparison of Full and 1/4 Model

Sequence	quarter model	full model
$[0/90]_s$	0.7174	0.7174
$[45/-45]_s$	0.7189	0.5247

수치 결과에 이용된 물성치 및 각종 설계 자료는 다음과 같다.

- 초기 적층 순서 : $[0/90/\dots/0/90]_s$
- 섬유 배열각 : $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$
- 물성치 및 강도(T300/5208 graphite/epoxy)
 - $E_L = 19.2 \times 10^6 \text{ psi}$, $E_T = 1.56 \times 10^6 \text{ psi}$
 - $G_{LT} = 0.82 \times 10^6 \text{ psi}$, $G_{TT} = 0.49 \times 10^6 \text{ psi}$
 - $\nu_{LT} = 0.24$, $\nu_{TT} = 0.49$
 - $X_T = 219.5 \times 10^3 \text{ psi}$, $X_C = 246.0 \times 10^3 \text{ psi}$
 - $Y_T = Z_T = Y_C = Z_C = 6.35 \times 10^3 \text{ psi}$
 - $R = 9.80 \times 10^3 \text{ psi}$, $S = T = 12.6 \times 10^3 \text{ psi}$

수치해석 예로는 층의 수가 8, 12, 16, 20인 단 순지지된 정사각 적층 평판에 대해 균일 하중하의 변형 에너지를 최소화(강성의 최대화)하거나 좌굴 하중을 최대화하는 적층 순서를 찾게 하였다. 한편 동일한 섬유 배열각을 갖는 층이 연속적으로 많이 존재할 때 적층 평판은 매트릭스(matrix) 균열 현상이 일어나기 쉬우며 가능한 이를 피해야 한다고 알려져 있다. 따라서 본 최적화 과정에서는 이러한 층의 수가 4개를 넘지 않도록 하는 구속 조건을 부가하였다. Table 2와 Table 3은 최적 적층 순서와 이 때 수행된 목적 함수의 계산수를 전체 설계 영역의 크기와 비교한 값을 나타낸 것이다. 여기서 괄호 안의 값은 $\frac{\text{목적 함수 계산수}}{\text{전체 설계 영역}} \times 100(\%)$ 에 의해 계산된 값이며, f^* 는 최적해일 때의 목적 함수, f^0 는 초기 설계에 의한 목적 함수를 나타낸다. Table 4는 full-model과 quarter-model에 의한 해를 비교한 것인데, 서로 다른 결과를 보임을 알 수 있다.

Table 2 Results of Stiffness Maximization

Number of layers	Optimum	f^*/f^0	Objective evaluation
4	$[\pm 45]_s$	0.6881	12(75.00)
8	$[45/-45_2/45]_s$	0.6222	28(10.94)
12	$[45/-45_2/\pm 45/45]_s$	0.6377	212(5.18)
16	$[45/-45_2/45/45_2/-45]_s$	0.6627	1316(2.01)

Table 3 Results of Buckling Load Maximization

Number of layers	Optimum	f^*/f^0	Objective evaluation
4	$[\pm 45]_s$	1.3731	12(75.00)
8	$[45/-45_2/45]_s$	1.6120	28(10.94)
12	$[45/-45_2/\pm 45/45]_s$	1.5797	164(4.00)
16	$[45/-45_2/45/45_2/-45]_s$	1.5222	1036(1.58)

Table 4 Optimal Solutions from full and 1/4 model (Bending stiffness maximization)

Number of layers	Quarter model	Full model
4	$[\pm 45]_s$	$[\pm 45]_s$
8	$[45/-45_2/45]_s$	$[-45_2/45]_s$
12	$[45/-45_2/\pm 45/45]_s$	$[-45_2/\pm 45/45_2]_s$
16	$[45/-45_2/45/45_2/-45]_s$	$[-45_3/45_4/0]_s$

이상의 결과로부터 최적해를 찾는데 수행된 목적 함수의 계산 횟수는 전체 설계 영역에 비해 현저히 적고, 이러한 경향은 층의 수가 많아질 경우에 더욱 뚜렷이 나타남을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 사용한 적층 순서 최적화 알고리즘은, 계산상의 효율성을 지니면서 최적해를 찾을 수 있는 매우 효과적인 방법임을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 섬유 배열각의 이산성을 고려하여 적층 평판의 최적 설계를 수행하였다. 이를 위해 분기법을 적층 평판의 경우에 알맞게 수정하였고, 강성과 좌굴하중의 최적화에 적용한 수치해석 결과를 통하여 알고리즘의 효율성을 입증하였다. 즉, 본 논문의 적층 순서 최적화 알고리즘은 유전 알고리즘이 갖는 여러 장점을 지니고, 계산량이 있어서도 효율성을 가지며 최적해를 찾을 수 있는 방법이다. 한편 각 층의 두께도 사용할 수 있는 값이 제한되어 있는 경우가 많은데, 이상의 알고리즘은 이러한 문제에도 적용가능 할 것으로 보이며, 이에 대한 연구가 진행중이다.

참고문헌

- (1) Park, W. J., 1982, "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," *J. Compos. Mater.*, Vol. 16, pp. 341~355.
- (2) Kim, C. W., Hwang, W., Park, H. C., and Han, K. S., 1997, "Stacking Sequence Optimization of Laminated Plates," *Compos. Struct.*, Vol. 39, pp. 283~288.
- (3) Tauchert, T. R., and Adibhatla, S., 1984, "Design of Laminated Plates for Maximum Stiffness," *J. Compos. Mater.*, Vol. 18, pp. 58~69.
- (4) Kam, T. Y., and Chang, R. R., 1992, "Optimum Layup of Thick Laminated Composite Plates for Maximum Stiffness," *Eng. Opt.*, Vol. 19, pp. 237~249.
- (5) Kam, T. Y., and Lai, M. D., 1989, "Multilevel Optimal Design of Laminated Composite Plate Structures," *Comput. Struct.*, Vol. 31, pp. 197~202.
- (6) Franco Correia, V. M., Mota Soares, C. M., and Mota Soares, C. A., 1997, "Higher Order Models on the Eigenfrequency Analysis and Optimal Design of Laminated Composite Structures," *Compos. Struct.*, Vol. 39, pp. 237~253.
- (7) Mota Soares, C. M., Mota Soares, C. A., and Franco Correia, V. M., 1997, "Optimization of Multilaminated Structures Using Higher-Order Deformation Models," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 149, pp. 133~152.
- (8) Haftka, R. T., and Walsh, J. L., 1992, "Stacking-Sequence Optimization for Buckling of Laminated Plates by Integer Programming," *AIAA J.*, Vol. 30, pp. 814~819.
- (9) Adali, S., Richter, A., and Verijenko, V. E., 1997, "Optimization of Shear-Deformable Laminated Plates Under Buckling and Strength Criteria," *Compos. Struct.*, Vol. 39, pp. 167~178.
- (10) Riche, R. L., and Haftka, R. T., 1993, "Optimization of Laminated Stacking Sequence for Buckling Load Maximization by Genetic Algorithm," *AIAA J.*, Vol. 31, pp. 951~956.
- (11) Sivakumar, K., Iyenger, N. G. R., and Kalyanmoy Deb, 1998, "Optimum Design of Laminated Composite Plates with Cutouts Using a Genetic Algorithm," *Compos. Struct.*, Vol. 42, pp. 265~279.
- (12) Winston, W. L., *Introduction to Mathematical Programming*, Duxbury Press, California, 1995.
- (13) Hajela P., and Shii C. J., 1989, "Optimal Design of Laminated Composites Using A Modified Mixed Integer and Discrete Programming Algorithm," *Comput. Struct.*, Vol. 32, pp. 213~221.
- (14) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, Tokyo, 1975.
- (15) Reddy, J. N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745~752.
- (16) Cheng, G., 1987, "On the Symmetry of Laminated Composite Rectangular Plates," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 3, pp. 547~551