

혼합 요소에서의 개선된 민감도 계산법

조맹효* · 김현기**

The calculation of refined semi-analytic sensitivity based on the hybrid element

Maenghyo Cho, HyunGi Kim

Key Words: Rigid body mode(강체모드) ; Semi Analytic Method(반해석적방법) ; Finite Difference Method(유한차분법)

Abstract

Structural optimization often require the evaluation of design sensitivities. The Semi Analytic method(SAM) is popular for shape optimization because this method has several advantages. But when relatively large rigid body motions are identified for individual elements, the SA method shows severe inaccuracy. In this paper, the improvement of design sensitivities corresponding to the rigid body mode is evaluated by exact differentiation of the rigid body modes. Moreover, the error of the SA method caused by numerical difference scheme is alleviated by using a series approximation for the sensitivity derivatives and considering the higher order terms.

1. 서론

민감도 해석은 기계 공학의 설계와 해석에서 중요하며, 설계 변수의 변화가 전체 구조 시스템에 어떠한 영향을 미치는가를 미리 예측, 평가하고, 설계 변경에 대한 지침을 수립하고자 할 때 설계자에게 더 좋은 설계를 위한 방향과 방법을 제시하는 중요한 척도가 되고 있다.

본 논문에서는 혼합 4절점 유한요소[1]를 사용하여 기존의 방법이 가지고 있었던 한계를 보완하기 위해 강체모드를 고려하여 round off error를 개선하였다. 그리고, truncation error를 줄이는 방안으로써 차분에 의해 계산되는 부분에 대해서는 고차항을 고려하기 위한 반복법을 추가하여, 더욱 개선된 결과를 제시하였다.

2. 반해석적 방법의 개선

반해석적 방법과 유한차분법 모두 강체모드가 큰 경우에 step size에 따라 신뢰할 수 없는 결과가 나타나게 된다. 따라서, 대부분의 오차를 발생시키는 $\frac{dK}{dx}$ 에 대해서, 강체모드가 차지하는 오차 부분을 제거 해야 할 필요가 있다.[2]

2.1 강체모드

기존의 반해석적 방법은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{du}{dx} = K^{-1} \left(\frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right) \quad (1)$$

대부분의 오차는 $\frac{dK}{dx}$ 를 차분으로 계산할 때 발생하게 된다.

2.1.1 강체모드 분리

$$\delta W_i = \delta u \cdot K u = \sum_{e=1}^N \delta u_e \cdot K_e u_e \quad (2)$$

위의 관계에서 강체모드 공간의 벡터는 $K_e r = 0$

* 서울대학교 기계항공공학부

** 서울대학교 기계공학부

이 된다. 그리고 이 식을 설계 변수로 미분하게 되면, 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$K_e r_k + K_e r'_k = 0 \quad (3)$$

변위장은 다음의 과정을 통해서 순수 변형 부분과 순수 강제모드 부분으로 분리 할 수 있다.

$$u_e = u_e^\epsilon + \sum_{k=1}^r \frac{u_e^\epsilon \cdot r_k}{r_k \cdot r_k} r_k = u_e^\epsilon + \alpha^k r_k \quad (4)$$

α^k 는 변위장 벡터를 강제모드벡터와의 내적을 통해서 강제모드 부분을 분리하는 것을 의미한다. 이 식을 가상 하중 벡터에 대입하면, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$q_e = f_e - K_e u_e = f_e - K_e (u_e^\epsilon + \alpha^k r_k)$$

$$K_e (\alpha^k r_k) = \alpha^k (K_e r_k) = -\alpha^k (K_e r'_k)$$

따라서, 가상 하중 벡터는 다음과 같이 정리된다.

$$q_e = f_e - K_e u_e^\epsilon + \alpha^k K_e r'_k \quad (5)$$

위의 식에서 $K_e u_e^\epsilon$ 는 차분에 의해 계산되고,

$\alpha^k K_e r'_k$ 는 엄밀해로 계산된다.

$K_e u_e^\epsilon$ 이 강제모드 공간에 미치는 영향을 제거하고, 정리하면 다음과 같다.

$$q_e = f_e - K_e u_e^\epsilon + \left[\frac{r_k \cdot K_e u_e^\epsilon}{r_k \cdot r_k} \right] r_k + \alpha^k K_e r'_k \quad (6)$$

2.2 강제모드의 전개

2.2.1 벌칙 기법(Penalty Method)

강제모드를 구성하기 위해서는 각 요소의 zero 고유치가 자유도의 개수와 일치해야 한다.

본 논문에서 사용하는 혼합요소는 회전각 자유도를 가지고 있기 때문에, $\theta_z = \frac{1}{2}(u_y - v_x)$ 관계를 이용하여 허구 강제 모드를 제어하였다.[3]

2.2.2 강제모드벡터

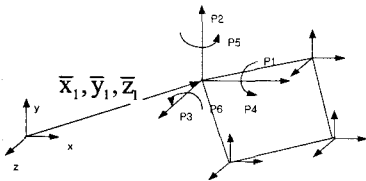


Figure 1. Rigid body mode in 4 node element

Figure 1 에서, 강제모드 조건을 만족시키는 힘 평형식과 모멘트 평형식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1 + p_7 + p_{13} + p_{19} &= 0 \\ p_2 + p_8 + p_{14} + p_{20} &= 0 \\ p_3 + p_9 + p_{15} + p_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -p_2 \bar{z}_1 + p_3 \bar{y}_1 + p_4 - p_3 \bar{z}_2 + p_5 \bar{y}_2 + p_6 - p_4 \bar{z}_3 + p_5 \bar{y}_3 + p_6 - p_5 \bar{z}_4 + p_6 \bar{y}_4 + p_{22} &= 0 \\ p_7 \bar{z}_1 - p_8 \bar{y}_1 + p_7 + p_8 \bar{z}_2 - p_8 \bar{y}_2 + p_9 + p_8 \bar{z}_3 - p_8 \bar{y}_3 + p_9 + p_8 \bar{z}_4 - p_8 \bar{y}_4 + p_{23} &= 0 \\ -p_7 \bar{y}_1 + p_8 \bar{x}_1 + p_8 - p_7 \bar{y}_2 + p_8 \bar{x}_2 + p_9 - p_7 \bar{y}_3 + p_8 \bar{x}_3 + p_9 - p_7 \bar{y}_4 + p_8 \bar{x}_4 + p_{24} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

위의 평형식들을 정리하면 강제모드 벡터를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & I & 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & -\bar{z}_1 \bar{y}_1 & 0 & -\bar{z}_2 \bar{y}_2 & 0 & -\bar{z}_3 \bar{y}_3 & 0 & -\bar{z}_4 \bar{y}_4 \\ \bar{z}_1 & 0 & -\bar{x}_1 & I & \bar{z}_2 & 0 & -\bar{x}_2 & I & \bar{z}_3 & 0 & -\bar{x}_3 & I & \bar{z}_4 & 0 & -\bar{x}_4 & I \\ -\bar{y}_1 \bar{x}_1 & 0 & \bar{y}_2 \bar{x}_2 & 0 & \bar{y}_3 \bar{x}_3 & 0 & \bar{y}_4 \bar{x}_4 & 0 & -\bar{y}_4 \bar{x}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서, I 는 단위행열을 의미한다.

위의 관계에 의해 병진과 회전 강제모드 벡터는 다음과 같이 정리할 수 있다.

병진강제모드 벡터

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1^T \\ \bar{r}_2^T \\ \bar{r}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000000100000010000001000000 \\ 0100000010000001000000100000 \\ 0010000001000000100000010000 \end{bmatrix}$$

회전강제모드 벡터

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_4^T \\ \bar{r}_5^T \\ \bar{r}_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-z_1 y_1 1000-z_2 y_2 1000-z_3 y_3 1000-z_4 y_4 1000 \\ z_1 0-x_1 010z_2 0-x_2 010z_3 0-x_3 010z_4 0-x_4 010 \\ -y_1 x_1 0001-y_2 x_2 0001-y_3 x_3 0001-y_4 x_4 0001 \end{bmatrix}$$

위의 강제모드벡터는 직교화 과정을 통해 기준축으로 일반화 시킬 수가 있다. 그 과정은 아래와 같다.[2]

$$r_k = \begin{cases} \bar{r}_k & \text{if } k \in \{1,2,3\} \\ \bar{r}_k - \sum_{p=1}^k a_k^p \bar{r}_p & \text{if } k \in \{4,5,6\} \\ 0 & \text{if } p \geq k \end{cases} \rightarrow a_k^p = \begin{cases} \frac{\bar{r}_k \cdot \bar{r}_p}{\bar{r}_p \cdot \bar{r}_p} & \text{if } p < k \\ 0 & \text{if } p \geq k \end{cases} \quad (9)$$

3. $\frac{dK}{dx}$ 의 반복법에 의한 개선 방법

앞에서는 차분으로 계산되는 K' 에 대해 강제모드를 분리하여 오차를 제거하였다. 그러나, 강제모드가 제거된 순수 변형에 대해서는 K' 가 차분으로 계산되기 때문에, 그 부분에서 발생하는 오차를 고려할 필요가 있다.

$Ku = F$ 는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\Delta K u + K \Delta u = \Delta F \quad (10)$$

여기에, 양쪽 항에 두 개의 항을 추가하여 다음의 식을 만들었다.

$$\begin{aligned} \Delta Ku + K\Delta u + Ku + \Delta K\Delta u &= \Delta F + F + \Delta K\Delta u \\ (\Delta K + K)(\Delta u + u) &= (\Delta F + F) + \Delta K\Delta u \\ (\Delta u + u) &= (\Delta K + K)^{-1}(\Delta F + F + \Delta K\Delta u) \end{aligned}$$

이 식은 다시 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} (\Delta u + u) &= (I + K^{-1}\Delta K)^{-1}(u + K^{-1}\Delta F + K^{-1}\Delta K\Delta u) \\ (I + K^{-1}\Delta K)^{-1} &\text{은 Von Neumann series에 의해} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (K^{-1}\Delta K)^n &\text{으로 전개될 수 있다. [4]} \end{aligned}$$

그리고, $\Delta u = K^{-1}(\Delta F - \Delta Ku)$ 를 대입하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta u &= -K^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (K^{-1}\Delta K)^k \Delta Ku \quad (11) \\ &\quad - K^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\Delta KK^{-1})^n \Delta Ku \end{aligned}$$

$u_e = u_e^e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_e^e \cdot r_k}{r_k \cdot r_k} r_k$ 을 위의 식에 대입하면, 다음과 같다

$$\begin{aligned} q_e &= -K^{-1}(I - \Delta KK^{-1} + \Delta KK^{-1} - \Delta KK^{-1}\Delta KK^{-1} + \dots) \\ &\quad \left(K_e u_e^e - \left[\frac{r_k \cdot K_e u_e^e}{r_k \cdot r_k} \right] r_k \right) \\ &\quad + \left[\frac{r_k \cdot K_e u_e^e}{r_k \cdot r_k} \right] r_k + a^k K_e r_k \quad (12) \end{aligned}$$

우변의 첫 번째 항은 반복법에 의해 계산되는 부분이고, 두 번째 항은 엄밀해에 의해 계산된다.

4. 해석 결과

두 가지로 나누어 문제를 해석하였다. 강체모드가 큰 모델에서는 강체모드 부분을 엄밀해로 계산하는 방법에 대한 결과를 알 수 있고, 강체모드가 크지 않은 모델은 차분에 의한 계산을 반복법에 의해 얼마나 개선시킬 수 있는지를 확인할 수 있다.

4.1 강체모드가 큰 모델

4.1.1 외팔보

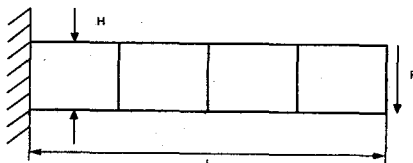


Figure 2. Cantilever Beam

Figure 2는 전단력이 작용하는 외팔보 문제이다.

$F=1\text{N/mm}$, $L=50\text{mm}$, $H=1\text{mm}$, $E=2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$ 이다. 끝단에서의 엄밀해는 다음과 같다.

$$u_{exact} = 12 \frac{FL^2}{EH^3} = 0.142857 \quad (13)$$

Figure 3은 외팔보의 민감도 해석 결과를 로그 단위로 나타낸 도표이다. 결과에서 유한차분법과 반해석적 방법은 step size에 따라서 일정한 수렴성을 보이지 않고 있다.

10^{-5} 에서 부터 10^{-8} 정도까지는 좋은 수렴성을 보이지만, 나머지 범위에서는 불규칙한 형태를 보이고 있다. 특히, 10^{-10} 범위를 벗어나면 큰 오차를 나타내며, 발산하는 경향을 보이고 있다.

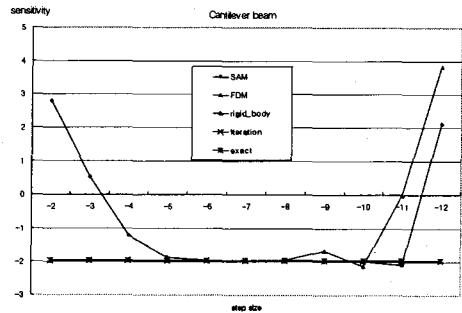


Figure 3. Sensitivity of cantilever Beam

그러나, 강체모드와 반복법을 고려한 해석 10^{-2} 부터 10^{-12} 까지 안정적인 수렴성을 보이고 있으며, 이러한 경향은 뒤에서 제시하게 될 문제에서도 나타나고 있다.

4.1.2 실린더 판

Figure 4는 실린더 한쪽은 고정 되어 있고 반대편에 순수 굽힘 모우먼트만이 작용하고 있는 문제이다.

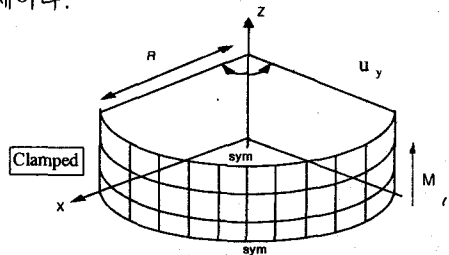


Figure 4. Cylindrical panel

$M=1N/mm, R=100mm, t=0.6mm, E = 3 \times 10^5 N/mm^2$

$\nu=0.3, \phi = \frac{\pi}{2}$ 이다.

끝단에서의 처짐 엄밀해는 다음과 같다.

$$u_{y, exact} = -R \cos \phi + R \cos([C+1]\phi) = 2.64677 \quad (14)$$

결과는 Figure 5에서 로그 단위로 나타내었다.

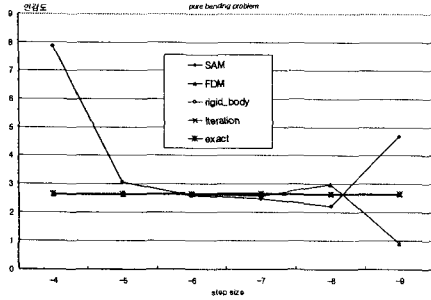


Figure 5. Sensitivity of cylindrical panel

유한차분법은 초기 step size 에 대해서는 안정적인 수렴성을 보이다가 10^{-8} 부터 수렴성이 급격히 떨어지는 것을 볼 수 있다. 반해석적 방법은 10^{-5} 에서 수렴값을 갖지만, 10^{-8} 에서 오차가 급격히 증가 하고 있다. 반면, 강체모드와 반복법을 고려한 해석 방법은 step size에 관계없이 안정적인 수렴 경향을 보이고 있다.

4.2 강체모드가 크지 않은 모델

앞에서 해석하였던 강체모드가 큰 모델에서는 $\frac{dK}{dx}$ 의 차분 계산 부분에 대한 반복법의 영향이 크게 작용하지 않았다. 그것은 강체모드 부분이 차분에 의해 계산되는 부분에 비해 계산된 차수가 훨씬 크기 때문에 반복법에 의해 개선되더라도 계산 결과에는 영향을 크게 미치지 못하였기 때문이다. 다음은 강체모드가 크지 않기에 때문에 차분과 강체모드 부분의 차수가 비슷하여 Iteration 반복법의 영향을 알 수 있는 문제이다. 해석에 사용된 물성치와 엄밀해는 다음과 같다.

$F=1N/mm, L=100mm, t=1mm, \nu=0.3, H=20mm$

$$u_{exact} = \frac{F(1-\nu^2)}{Et} = 4.55 \times 10^{-6} \quad (15)$$

Figure 6 과 Figure 7에 해석을 수행한 균일 격자 모델과 불균일 격자 모델을 제시하였고, 해석 결과는 Figure 8과 Figure 9에 나타내었다.

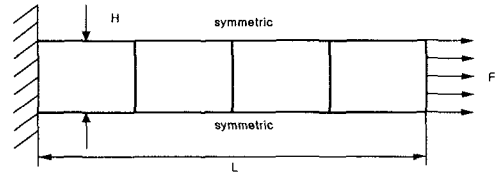


Figure 6. Regular element model

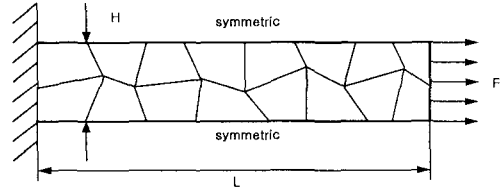


Figure 7. Irregular element model

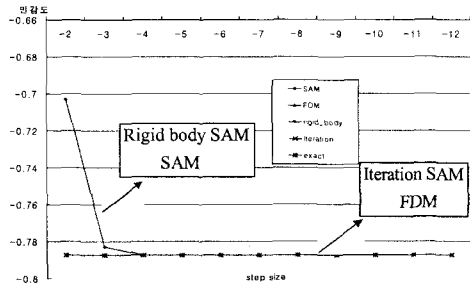


Figure 8. Sensitivity of regular element

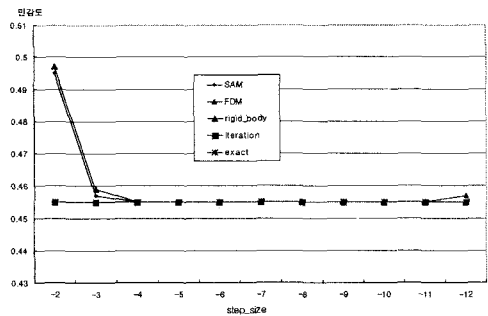


Figure 9. Sensitivity of irregular element

위의 결과에서, 강체모드가 크지 않은 모델에서는 유한차분법과 반복법을 고려한 해석 방법이 좋은 결과를 내고 있음을 알 수 있다. 그러나, 강체모드만을 고려한 방법은 step size 10^{-4} 까지 수렴성이 떨어진다. 이것은 K 부분에서 step size 가 큰 값일 때 truncation error가 크기 때문에 생기는 것으로 step size 가 작아 질수록 그 오차는 감소하게 된다. 불균일 격자에서도 동일한 경향을 보인다.

4.3 고유값 민감도 해석

비감쇠 진동일 때 고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$K(x)u(x) - \lambda(x)M(x)u(x) = 0 \quad (16)$$

이 문제는 설계 변수에 대해서 미분을 하여 정리하면, 다음과 같은 식이 세워진다.

$$\frac{d\lambda}{dx} \cong \frac{u^T \left(\frac{K(b+hl_i) - K(b)}{h} - \lambda \frac{M(b+hl_i) - M(b)}{h} \right) u}{u^T M u} \quad (17)$$

이 식에서 우변의 분모 $u^T M u$ 와 분자의 두 번째 항 $\lambda u^T \frac{dM}{dx} u$ 는 간단히 계산될 수 있다. 여기서, $\frac{dM}{dx}$ 는 차분으로 계산되며, 변화량은 아주 작은 값으로 선택하였다. 첫 번째 항은 강제모드를 고려하여, 엄밀해로 계산이 가능하다.

$u^T K' u$ 에서 u 를 순수 변형과 강제모드 부분으로 분리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (u_e^{\epsilon T} + \alpha^k r_k^T) K' (u_e^{\epsilon} + \alpha^k r_k) \\ &= (u_e^{\epsilon T} + \alpha^k r_k^T) (K' u_e^{\epsilon} - \alpha^k K r_k') \\ &= u_e^{\epsilon T} K' u_e^{\epsilon} + \alpha^k r_k^T K' u_e^{\epsilon} \\ & \quad - \alpha^k u_e^{\epsilon T} K r_k' - (\alpha^k)^2 r_k^T K r_k' \end{aligned} \quad (18)$$

위의 식에서 네 번째 항은 $Kr=0$ 에 의해 소거되고, 두 번째 항을 $-\alpha^k r_k^T K u_e^{\epsilon}$ 로 바꾸면, 두 번째와 세 번째는 동일한 식이므로, 위의 식은 $u_e^{\epsilon T} K' u_e^{\epsilon} - 2\alpha^k u_e^{\epsilon T} K r_k'$ 이 된다. 따라

$$\frac{d\lambda}{dx} \cong \frac{u_e^{\epsilon T} K' u_e^{\epsilon} - 2\alpha^k u_e^{\epsilon T} K r_k' - \lambda u^T M' u}{u^T M u}$$

서, 설계 변수 변화에 대한 고유치 민감도는 다음과 같이 표현된다.

(19)

4.3.1 동적(Dynamic)문제 해석결과

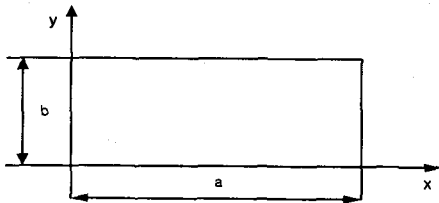


Figure 10. Vibration problem of plate
경계 조건은 단순지기로 하였고, E=100, t=1,

$\nu=0.3$ 이다. 고유값 엄밀해와 민감도 엄밀해는 아래에 주어져 있다.

고유값 엄밀해

$$\Phi = \frac{\lambda_{nm}}{\beta^2} = \pi^4 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (20)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{D}{\rho h} \right)$$

고유값 민감도 엄밀해

$$\frac{\delta\Phi}{\delta a} = -\frac{4n^2\pi^4}{a^3} \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] \quad (21)$$

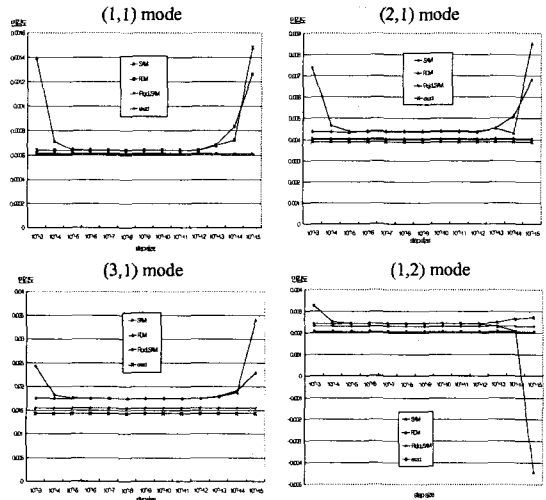


Figure 11. a/b=2 ,Result of eigenvalue sensitivity

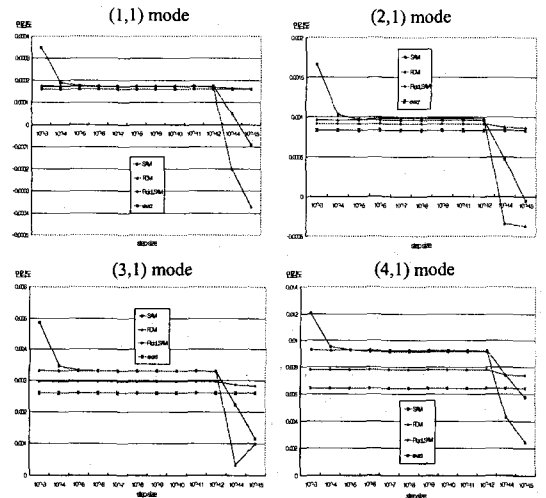


Figure 12. a/b=3 ,Result of eigenvalue sensitivity

이 문제에 대해 길이비 $a/b=2$, $a/b=3$ 인 경우, 반해석적 방법, 유한차분법, 강제모드를 고려한 반해석적 방법을 각각 1차 모드부터 4차 모드까지 지드까지 각 모드에서 동일한 격자수 일 때 step size의 변화에 따른 수렴 경향을 나타내었다. 기존의 반해석적 방법이나 유한차분법은 step size 범위 $10^{-1} \sim 10^{-4}$ 에서 truncation error가 크게 발생하고, 10^{-10} 부터는 round off error에 의해 오차가 크게 생기는 것을 알 수 있다. 그와 비교해 볼 때, 강제모드를 고려한 경우는 두 가지의 주된 오차를 크게 감소시킬 수 있고, step size에 무관하게 안정적인 수렴값을 가지게 되는 것을 알 수 있다.

5. 결론

기존의 반해석적 방법은 유한차분법에 비해 메모리와 연산 시간을 절약할 수 있고, 간단한 계산으로도 비교적 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있었다. 그러나, 상대적으로 강제모드가 큰 경우에는 step size의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내고 있다. 특히, $10^{-1} \sim 10^{-7}$ 에서 truncation error가 주된 원인이고, 10^{-7} 부터는 round-off가 주된 원인이 된다.[5]

본 논문에서는 두 경우의 오차를 모두 제거하기 위해 강제모드와 그 미분의 정확한 계산을 이용하여 round off error를 줄였고, truncation error의 개선을 위해서 반복법을 통해 오차를 줄였다. 고유치 문제에서는 K 항에 대해서는 r_k 를 사용하여 엄밀해로 계산하였고, M 는 step size를 매우 작은 값으로 선택하여 계산함으로써 truncation error를 감소시켰다.

결론적으로, 강제모드가 큰 구조물에서는 변위장을 순수 변형부와 순수 강제모드부로 분리하여 계산함으로써 오차 감소의 효과를 얻을 수 있고, 강제모드가 크지 않은 구조물에서 발생할 수 있는 truncation error는 반복법을 이용한 고차항의 추가으로써 개선할 수 있었다.

본 연구에서 제시한 민감도 계산법은 계산 효율이 높고 정확도가 보장되며, 구현하기가 간편

하므로 상용 유한 요소 소프트웨어에도 쉽게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

후기

이 논문은 2001년도 두뇌 한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) M.A.Aminpour, 1992, "An assumed stress hybrid 4 node shell element with drilling degrees freedom", Int.J.Meth,Engng,33, pp. 19 ~ 38
- (2) F.Van Keulen and H.De Boer, 1998, "Rigorous improvement of Semi-analytical design sensitivities by exact defferentiation of rigid body motions". Int.J.Numer. Meth. Engng,42, pp. 71 ~ 91
- (3) O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor,"The finite element method", fourth edition vol.1, pp 249 ~ 256
- (4) Suha Oral, 2000, "A Mindlin plate finite element with semi analytical shape design sensitivities", Computers and Structures,78, pp 467 ~ 472
- (5) E.Parente Jr. and L.E.Vaz, 2001, "Improvement of semi-analytical design sensitivities of non-linear structures using equilibrium relations", Int.J.Numer.Meth.Engng,50, pp 2127 ~ 2142