

# 무요소법을 이용한 보와 판의 효과적인 해석

송태한\* · 석병호\* · 임장근\*\*

## Effective Analysis of Beams and Plates using the RKPM

Taehan Song, Byungho Seog and Jangkeun Lim

**Key Words :** Meshfree Method(무요소법), Reproducing Kernel Particle Method(RKPM), Shear Locking(전단강성과잉), Timoshenko Beam(티모셴코 보), Mindlin Plate(민들린 평판), Shear Relaxation Factor(전단완화계수)

### Abstract

In this paper, RKPM is extended for solving moderately thick and thin structures. General Timoshenko beam and Mindlin plate theory are used for formulation. Shear locking is the main difficulty in analysis of these kinds of structures. Shear relaxation factor, which is formulated using the difference between bending and shear strain energy, is introduced to overcome shear locking. Analysis results obtained reveal that RKPM using introduced method is free of locking and very effectively applicable to deeply as well as shallowly beams and plates.

### 1. 서론

무요소법은 유한요소법, 유한 체적법 등 수치해석법의 적용과정에서 발생하는 요소구성에 대한 근본적인 문제를 해결하기 위해 제안된 방법이다. 1990년대 초반부터 연구되기 시작한 무요소법은 해석 영역에 배치된 질점들만으로 형상함수를 구성하여 수치해석이 이루어지는 간편함으로 인해 집중적인 연구가 이루어지게 되었으며 형상함수를 구성하는 수식화 방법에 따라 여러 가지 이름으로 개발되었고<sup>(1-4)</sup> 각종 문제에 적용되면서 해석의 영역을 넓혀가고 있다

무요소법을 이용한 보 및 평판의 해석으로는 Belytschko 등<sup>(5)</sup>에 의해 얇은 평판 및 셸에 대한 해석이 처음 시도되었으며 Liu 등<sup>(6)</sup>은 RKPM을 적용한 얇은 보 해석을 위한 HRKPM의 이론적 배경과 간단한 예제를 보였다. Atluri 등<sup>(7)</sup>이 일반화된 최소 자승법을 적용하여 얇은 보와 평판에 대한 수식을 전개하였으며 얇은 보 예제에 적용하였다. 강성과잉이 문제가 되고 있는 두꺼운 보 및 평판

에 대해서는 Liu 등<sup>(8)</sup>이 형상함수가 가중함수의 특성에 좌우되어 가중함수와 유사한 형태를 갖는데 착안하여 필수 경계조건을 만족시키는 스플라인 함수를 제안하고 이를 형상함수로 이용하여 티모셴코 보(Timoshenko beam)와, 민들린 평판(Mindlin plate) 문제를 해석하였다. 또한, 최근에 Duarte 등<sup>(9)</sup>은 강성과잉을 해결하기 위해 고차의 근사함수를 쉽게 이용할 수 있는 h-p Cloud 법에 적용하여 두꺼운 평판문제를 해결하였다.

본 논문에서는 RKPM을 이용하여 전단변형을 고려한 보 및 평판에 대하여 확장 적용할 수 있도록 연구 하였다. 일반적인 RKPM의 수식을 티모셴코 보와 민들린 평판 이론에 적용하였으며 전단 강성 과잉현상을 제거하기 위해 전단강성과 굽힘강성의 비를 이용하는 제한함수를 도입하였고, 이를 바탕으로 강성과잉이 나타나는 실제 문제에 적용하여 수치적 안정성과 보 및 평판 단면의 두께에 따른 거동 해석의 정확성을 살펴보고자 한다.

### 2. RKPM의 기본방정식

RKPM은 다음과 같은 수정 커널 함수를<sup>(3,6)</sup> 정의하여 이용한다.

\* 회원, 한양대학교 대학원

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

$$u^R(x) = \int_{\Omega_{\bar{x}}} u(\bar{x}) \tilde{\phi}_{a(\bar{x})}(x-\bar{x}) d\Omega_{\bar{x}} \quad (1)$$

$u^R(x)$  은 원래의 함수  $u(\bar{x})$  를 영향영역 반경  $a(\bar{x})$  를 갖는 수정커널함수를 이용, 변환하여 얻은 함수이다. 여기서 수정 커널 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{\phi}_{a(\bar{x})}(x-\bar{x}) = \mathfrak{R}(x; x-\bar{x}) \phi_{a(\bar{x})}(x-\bar{x}) \quad (2)$$

단,

$$\mathfrak{R}(x; x-\bar{x}) = \sum_{i=0}^N b_i(x)(x-\bar{x})^i \approx B^T(x) Q(x-\bar{x}) \quad (3)$$

$$B^T(x-\bar{x}) = [b_0(x) \quad b_1(x) \quad b_2(x) \quad \dots] \quad (4)$$

$$Q^T(x-\bar{x}) = [1 \quad (x-\bar{x}) \quad (x-\bar{x})^2 \quad \dots] \quad (5)$$

$\phi_{a(\bar{x})}(x-\bar{x})$  은 커널함수를 나타낸다. 식(1)에  $u(\bar{x})$  의 테일러 급수를 이용하여 대입하고 재생 조건의 고차 일관성조건을 부여하여 정리하면 다음과 같은 형태의 RKPM 형상함수를 얻게 된다.

$$\Psi_I(x) = Q^T(0) \bar{M}^{-1} Q(x-x_I) \phi_{a(\bar{x})}(x-x_I) \quad (6)$$

단,

$$\bar{M}(x) = \sum_{I=1}^n Q(x-x_I) \phi_{a(\bar{x})}(x-x_I) Q^T(x-x_I) \quad (7)$$

$$Q^T(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots] \quad (8)$$

여기서 형상함수의 계산에 사용되는 커널함수는 영향영역 내의 절점들과의 연관을 맺어주는 역할을 하는 함수로서 여러 가지가 사용되고 있으나 논문에서는 3 차 스플라인 함수를 적용하였다. 또한 무요소법에서 형상함수가 크로벡터 델타의 성질을 갖고 있지 않아서 경계조건의 처리에 어려움이 있는데 이를 위해 형상함수 수정법<sup>(12)</sup> 이용하였다.

### 3. 두꺼운 보와 평판이론

#### 3.1 티모센코 보

보의 길이가 단면 높이에 비하여 비교적 길지 않아 전단을 고려하는 티모센코 보의 처짐과 단면의 회전각을 각각 주변수로 취급하게 된다. 따라서 보의 한점에서 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u &= -y\theta \\ v &= v(x) \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서  $u, v$  는 각각  $x, y$  방향의 변위,  $\theta$  는 단면의 회전각을 나타낸다. 이를 이용하면 변형률과 응력은 다음과 같다.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx} \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = -\theta(x) + \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (11)$$

$G, E$  는 각각 전단계수와 Young 계수 이다. 또한, 티모센코 보의 전체 포텐셜 에너지는

$$\begin{aligned} \pi &= \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{d^2\theta}{dx^2} \right)^2 dx \\ &+ \int_0^L \kappa^2 GA \left( -\theta(x) + \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p(x)v dx \end{aligned} \quad (12)$$

와 같이 된다. 여기서  $\kappa^2, p(x)$  는 각각 전단 보정계수, 단위 길이당 분포로 하중을 나타낸다.

#### 3.2 민들린 평판

전단변형을 고려하는 민들린 평판의 임의의 점에서 변위 성분은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} u &= z\psi_x(x, y) \\ v &= z\psi_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $u, v, w$  는 각각  $x, y, z$  방향의 변위이고  $\psi_x, \psi_y$  는 각각  $xz$  평면과  $yz$  평면의 회전성분을 나타낸다. 또한 곡률과 전단변형률은

$$\chi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\phi = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \end{Bmatrix} \quad (15)$$

와 같이 나타낼 수 있으며 굽힘 모멘트와 전단력은 다음과 같다.

$$M = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T = D_f \chi \quad (16)$$

$$Q = [Q_x \quad Q_y]^T = D_s \phi$$

민들린 평판의 전체 포텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \iint \chi^T D_f \chi dx dy + \frac{1}{2} \iint \phi^T D_s \phi dx dy \\ &- \iint q w dx dy \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$D_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$D_s = k^2 G I \quad (19)$$

이다. 식(17)의 첫 항은 굽힘 에너지를 두 번째 항은 전단 변형 에너지를 나타내고 있다.

#### 4. 강성과잉

강성과잉 현상은 보나 판등에서 단면의 두께가 길이에 비해 작아지는 경우 전단변형에너지가 굽힘에너지보다 상당히 커짐에 따라 해의 정확도를 저하시키는 현상이다. 식(12), (17)에서 길이가 일정한 경우 전단강성과 굽힘 강성에  $l^2$ 의 차이가 나타나게 되는데  $l$ 의 값이 영에 가까워짐 따라 값의 차이가 현저히 나타나게 되며 전단에너지의 값이 과대평가 된다. 이러한 강성과잉 현상을 해소하기 위해 기존의 유한 요소법에서는 감차 적분이나 선별 적분법 혹은 고차의 요소를 사용하는 방법이 제안 되고 있다. 그러나 무요소법에서의 감차적분이나 선별적분의 적용이 곤란하고 고차의 요소를 사용하기 위하여 기저함수의 차수를 증가시키는 방법도 무요소법에서는 형상함수를 얻기 위한 역행렬때문에 적용에 어려움이 있다.

한편 Tessler 등<sup>(10-11)</sup>은 유한요소법에서 이러한 강성과잉 현상을 제거하기 위하여 얇은 보를 기초로 보요소에 가상의 절점 변위를 도입하여 각 변위장의 차수를 달리하고 강성과잉을 제거하도록 제한 조건을 가하여 단순한 형태의 변형률장을 도입하였다. 본 논문에서는 이러한 Tessler의 방법중 제한 조건을 적용하는 방법을 채택하여 무요소법인 RKPM에서의 강성과잉 현상을 해결하고 두꺼운 보 및 판문제에 적용할 수 있도록 하였다. 그러나 무요소법에서는 영향영역의 반경에 따라 계산되는 절점의 수가 달라지기 때문에 유한요소법에서와는 달리 전단에너지와 굽힘에너지의 관계에서 얻어지는 단면의 두께  $l^2$ 의 차이를 이용하고자 하였고 이와 같은 성질을 이용한 전단 완화 계수 (shear relaxation factor)를<sup>(10)</sup> 도입하였으며 이의 사용에 필요한 상수는 무요소 방법의 수치실험을 통해 적용하였다. 우선, 일반적인 강성행렬의 전단항에 전단완화계수  $\phi^2$ 을 다음과 같이 도입한다.

$$\begin{aligned} K &= K_b + K_s \\ &= K_b + \phi^2 K_s \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $K_b, K_s$ 는 각각 굽힘과 전단의 강성행렬을 나타내며  $K_s$ 는 일반적인 전단 수정함수를 이용하여 얻은 전단강성행렬이다. 여기에 사용되는 전단 완화계수는 다음식과 같이 정의된다.

$$\phi^2 = (1 + C_s^{-1} \alpha)^{-1} \quad (21)$$

$$\alpha = \sum k_s^0 / \sum k_b^0 \quad (22)$$

여기서  $\alpha$ 는 각변형과 관련된 전단과 굽힘 강성의 합에 대한 비율을 말하여  $C_s$ 는 영구 상수를 나타낸다. 결과적으로  $\phi^2$ 의 값은 전단과 굽힘강성에서 단면두께  $l^2$ 의 차이를 보정하는 제한 조건으로 작용하게 된다. 이러한 전단 완화 계수는 단면의 두께에 따라 변동되며 단면의 두께가 두꺼운 경우에는 거의 영향을 미치지 못하다가 단면의 두께가 얇아짐에 따라 점차 영의 값에 근사해가면서 얇은 보나 평판에 적용되는 Kirchhoff의 조건을 만족시키게 된다.

#### 5. 수치예제 및 검토

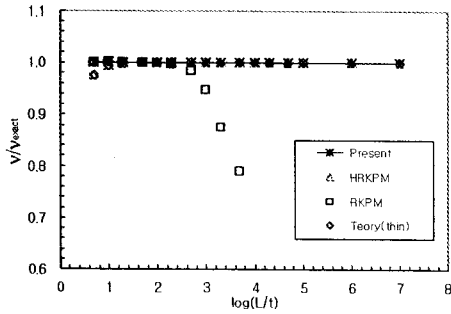
무요소법의 하나인 RKPM을 이용하여 두꺼운 보 및 평판에 이용할 수 있도록 확장 적용하고, 강성과잉문제에 대한 해석 방법의 타당성을 검토하기 위하여 다음과 같은 수치 실험을 하였다.

##### 5.1 보

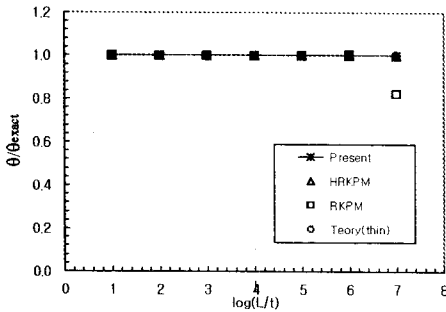
사각 단면을 갖는 보에 대한 수치실험을 하였다. 20개의 절점을 이용하여 다른 형태의 경계조건과 하중조건을 갖는 문제에 적용하였다. 식(21)에서의 보에 대한 영구상수  $C_s^{-1}$ 는 0.01을 사용하였다.

Fig.1은 외팔보 문제로 끝단에 집중하중을 받고 있는 문제의 수치실험 결과를 나타낸 그림이다. (a)는 두께와 길이의 비에 대한 끝단의 처짐 값을, 그리고 (b)는 각 변형 값을 티모셴코 보의 이론해<sup>(13)</sup>로 정규화하여 나타내었다. 그림에서는 티모셴코 보 이론의 RKPM 해(RKPM), 오일러 보 이론의 RKPM 해(HRKPM), 오일러 보의 이론치(Theory) 그리고 본 논문에서 제시한 방법의 해석결과(Present)를 비교하였다.

티모셴코 보 이론만을 적용한 결과는 두께가 얇아 짐에 따라 전단 강성과잉 현상을 보여 그 값이 현저히 부정확해지고 있으며 오일러 보 이론에



(a) Displacement



(b) Rotation

Fig. 1 Cantilever beam with end point load.

의한 결과는 오일러 보의 이론치와 일치하지만 두께가 두꺼워짐에 따라 해가 부정확해짐을 보인다. 논문에서 제안한 방법의 해석 결과는 문제가 되고 있는 전단강성 과잉 현상이 완전히 제거되어 두께가 현저히 작아져도 정확한 결과를 보여주고 있다.

Table 1. Convergence of tip displacements according to  $t/L$  in cantilever.

$t/L$	Number of Nodes			
	6	10	15	20
1E-1	0.990	0.999	1.000	1.000
1E-2	0.921	0.989	0.998	0.999
1E-3	0.898	0.985	0.997	0.999

Table 2. Comparison of tip displacements according to Gauss points.

Gauss Point	Number of Nodes			
	6	10	15	20
3	0.907	0.986	0.997	1.000
4	0.921	0.989	0.998	0.999
5	0.921	0.989	0.998	0.999
6	0.921	0.989	0.998	0.999

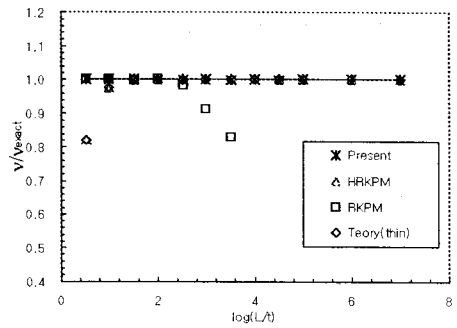


Fig. 2 Simple beam with central point load.

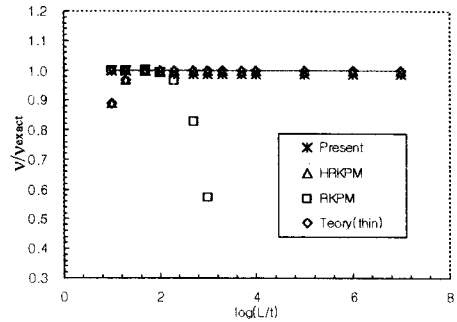


Fig. 3 Clamped beam with distributed load.

Table 1.은 동일한 예제를 이용하여 보의 두께변화와 절점수의 변화에 따른 수렴성을 검토한 결과를 나타낸 것이다. 절점의 수가 증가하면서 해가 이론해에 수렴함을 알 수 있다. 또한 Table 2 에서는 적분점수에 따른 수렴 결과를  $t/L=0.01$  인 경우에 대하여 비교하였으며 4 개 이상의 적분점수에 따라 정확히 수렴됨을 보이고 있다.

Fig2 는 Fig.1 과 동일한 형태를 사용한 모델에 경계조건을 단순보 형태로 취하고 보의 중심에 집중하중을 받는 문제의 수치 결과를 비교한 그림이다. 역시 Fig. 1 과 동일한 형태를 보이고 있다. Fig. 3 은 양단 고정보에 분포하중을 받고 있는 문제의 결과이며 역시 앞의 예제와 같이 단면깊이에 관계없이 정확한 결과를 보이고 있다.

## 5.2 평판문제

Fig. 4 와 같은 81 개의 절점을 가진 사각평판으로 RKPM 의 민들린 평판에 대한 확장 해석의 타당성을 검토하였다. 역시 평판에서도 강성과잉 현상이 문제가 되므로 각각 보 예제에서 보인 바와 같은 형태로 하중과 경계조건을 다르게 하여 결과를 비교하였다. 평판에 대한 영구상수  $C_s^{-1}$  는 0.05 를 사용하였다. 수치해의 결과는 얇은 평판의 이론해로 정규화하여 나타내었다. 보 예제에서와 같이 본 논문에서 제시한 방법의 해석결과(Present), 얇은 평판 이론의 RKPM 해(HRKPM), 민들린 평

판 이론의 RKPM 해(RKPM), 두꺼운 평판의 유한 요소해석 결과 그리고 얇은 평판의 이론치(Theory(thin))를 비교하였다. 단순지지 사각평판의 중심부에 집중하중을 받는 문제와 분포하중을 받는 문제의 결과를 각각 Fig. 5 와 Fig. 6 에 나타내었고, Fig. 7 에서는 사각평판의 각 방향으로 고정 지지의 경계조건에 분포하중을 받는 예제의 결과를 나타내었다. 3 가지 예제에서 모두 만들어진 평판 이론의 RKPM 해에서는 강성과잉 현상이 나타나고 있으며 논문에서 제시한 방법의 결과에서는 두꺼운 평판의 경우 유한요소해의 결과와 잘 일치하고 있으며 얇은 평판의 경우에도 HRKPM 과 동일한 결과를 보임으로서 강성과잉 현상이 나타나고 있지 않음을 알 수 있다.

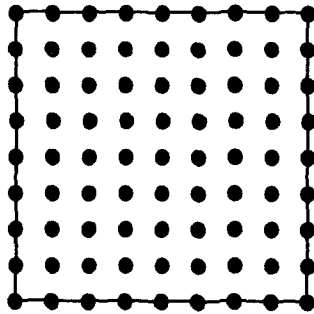


Fig. 4 Plate model with 81 nodes

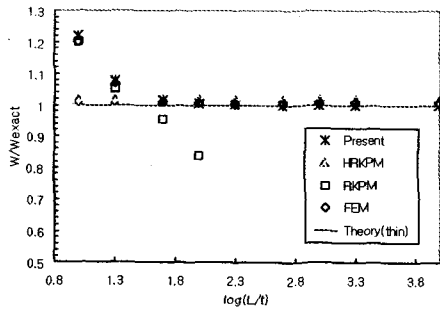


Fig. 5 Simple square plate under central point load.

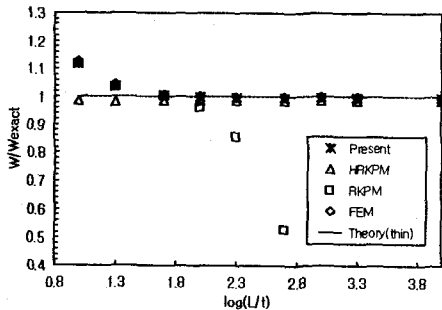


Fig. 6 Simple square plate under distributed load.

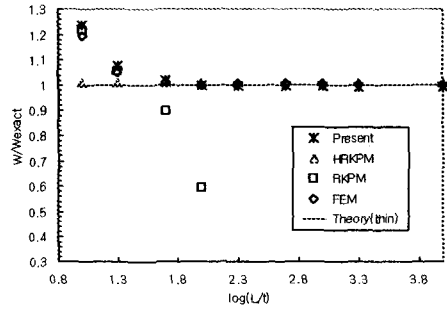


Fig. 7 Clamped square plate under distributed load.

## 6. 결론

무요소법으로 두꺼운 보와 평판을 해석할 때 생기는 강성과잉 현상을 없애기 위하여 전단완화 계수를 도입하였으며 이의 유용성을 규명하기 위하여 여러가지 수치예제를 해석하고 그 결과를 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 전단골힘 이론에 전단완화 계수를 도입함으로써 강성과잉 현상을 제거할 수 있다.
- 2) RKPM 으로 얇은 판을 해석한 결과는 HRKPM 로 해석한 결과와 동일한 특성을 보인다.

## 참고문헌

- (1) Monaghan J. J., 1988, "An Introduction to SPH," *Computer Physics Communications*, Vol. 48, pp. 89-96.
- (2) Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L., 1994, "Element Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256
- (3) Liu W. K., Jun S. and Zhang Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081-1106
- (4) Duarte C. A., Oden J. T., 1996, "An h-p Adaptive Method Using Clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp.237-262
- (5) Krysl, P. and Belytschko, T., 1995, "Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method," *Computational Mechanics*, Volume 17, Issue 1-2, Pages 26-35
- (6) Kam Liu Wing, Chen Yijung, R. Aziz Uras and Tang Chang Chin, 1996, "Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, Pages 91-157
- (7) Atluri, S.N., Cho, J.Y. and Kim, H.-G., 1999, "Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations," *Computational Mechanics*, Volume 24, Issue 5, Pages 334-347
- (8) Brian M. Donning and Kam Liu Wing, 1998,

- "Meshless methods for shear-deformable beams and plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 152, Issues 1-2, Pages 47-71
- (9) Oscar Garcia; Eduardo A. Fancello, Clovis S. de Barcellos and C. Armando Duarte, 2000, "hp-clouds in Mindlin's thick plate model," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 47, Issue 8, Pages 1381-1400
- (10) Alexander Tessler and Thomas J.R. Hughes, 1983, "An Improved Treatment of Transverse Shear in The Mindlin-Type Four-Node Quadrilateral Element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 39, Pages 311-335
- (11) Alexander Tessler and Thomas J.R. Hughes, 1985, "A Three-Node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, Pages 71-101
- (12) 석병호, 송태한, 임장근, 2000, "EFGM 에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법", 대한기계학회 논문집, pp.803~809
- (13) Herbert Reismann and Peter S. Pawlik, 1980, *Elasticity-Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc.