

선형 상보성 수식화를 이용한 마찰 접촉 대변형 동역학 문제의 해석

성재혁* · 곽병만*

Large Displacement Dynamic Analysis with Frictional Contact by Linear Complementarity Formulation

Jae Hyuk Sung and Byung Man Kwak

Key Words : Complementarity(상보성), Frictional contact(마찰접촉), Nonlinear dynamics(비선형 동역학), Total Lagrangian(전체형 라그랑지언)

Abstract

For a large deformation nonlinear dynamic analysis of two-dimensional frictional contact, the linear complementarity formulation combined with a linearization is used. The solution procedure is based on the total Lagrangian formulation with a predictor and corrector scheme. For contact searching, a hierarchical scheme with a circular territory is used. A second-order approximation of displacements is used to detect impact time and position. The formulation is illustrated by means of numerical examples.

1. 서론

대부분의 기계시스템에서 발생하는 접촉현상은 시스템 내에서 하중의 주요한 전달수단이며, 이에 의한 국부적인 변형이나 응력, 온도분포 등은 시스템의 거동을 이해하는 데에 있어서 매우 중요하다. 이를 위한 접촉해석의 방법은 몇가지로 분류할 수 있다. 첫째, 접촉영역과 접촉상태를 가정한 후 접촉조건을 만족하도록 축차적으로 보정하는 방법이다[1]. 또 다른 방법은 접촉제한조건을 가진 변분 수식화 문제로 기술하고 수학적 계획법을 이용하여 해석하는 것이다[2]. 또한 접촉문제를 일반화 방정식[3]이나 상보성 문제[4-6]와 같이 수학적으로 동일한 문제로 변환하여 해석하는 방법이 있다. Kwak 등은 접촉현상을 완전하게 기술하는 상보성 문제를 제안한 바 있으며[5] 최근에는 이를 확장하여 선형 동접촉 문제에 적용하였다[6].

본 연구에서는 이를 도입하여 매 시간증분마다 접촉조건과 쿨롱의 마찰법칙으로부터 유도되는

선형 상보성 문제를 기하학적 비선형성을 가지는 구조 방정식의 선형화 과정과 연계하여 마찰 동접촉 문제를 해석하고자 한다.

2. 유한요소 수식화

2.1 운동방정식의 이산화

외부 가상일 \mathfrak{R}_E 과 접촉 가상일 \mathfrak{R}_C 을 고려하여 가상일의 원리를 적용하면 시간 $t+\Delta t$ 에서 비선형 마찰 동접촉 문제는 물체 Ω^k 에 대해 다음과 같이 전체형 라그랑지언 수식화로 기술된다[7].

$$\int_{\Omega^k} \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega^k} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} E_{ij} d\Omega = \mathfrak{R}_E^k + \mathfrak{R}_C^k \quad (1)$$

subject to

$${}^{t+\Delta t} D_n {}^{t+\Delta t} S_n = 0, \quad {}^{t+\Delta t} D_n \geq 0, \quad {}^{t+\Delta t} S_n \geq 0 \quad (2)$$

$$-\mu {}^{t+\Delta t} S_n \leq {}^{t+\Delta t} S_t \leq \mu {}^{t+\Delta t} S_n \quad (3)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{D}_n = 0 \quad \text{for } {}^{t+\Delta t} S_n > 0 \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{D}_t = 0 \quad \text{for stick state} \quad (5)$$

* 한국과학기술원 기계공학과

여기서 우측 상첨자는 Ω^k 에 대한 물리량을 나타내며 ${}^0\rho$ 는 밀도이고 ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ 와 ${}^{t+\Delta t}E_{ij}$ 는 에너지 공액관계인 2nd Piola-Kirchhoff stress tensor 와 Green-Lagrange strain tensor 이다. 또한 ${}^{t+\Delta t}S_n$ 과 ${}^{t+\Delta t}S_t$ 는 수직 및 접선방향의 접촉력이며 ${}^{t+\Delta t}D_n$ 과 ${}^{t+\Delta t}D_t$ 는 각각 접촉간극과 상대 미끄러짐량이다.

식 (1)의 비선형 방정식은 선형화를 통해 근사해를 구할 수가 있다. 이를 위해 시간 t 와 $t+\Delta t$ 사이의 변위증분을 다음과 같이 정의한다.

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^t u_i \quad (6)$$

응력과 변형률은 다음과 같이 분해할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}_0 S_{ij}, \quad {}^{t+\Delta t}E_{ij} = {}^t E_{ij} + {}_0 E_{ij} \quad (7)$$

여기서 변형률 증분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}_0 E_{ij} &= {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij} \\ {}_0 e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + {}_0^t u_{k,i} {}_0 u_{k,j} + {}_0 u_{k,i} {}_0^t u_{k,j}) \\ {}_0 \eta_{ij} &= \frac{1}{2} {}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j} \end{aligned} \quad (8)$$

이제 $\delta {}^{t+\Delta t}E_{ij} = \delta {}_0 E_{ij}$ 이며 ${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijkl} {}_0 E_{kl}$ 임을 고려하고 ${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijkl} {}_0 e_{kl}$ 과 $\delta {}_0 E_{ij} = \delta {}_0 e_{ij}$ 의 근사화를 도입하면 운동방정식을 다음과 같이 선형화된 형태로 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^k} {}^0 \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega^k} {}_0 C_{ijkl} {}_0 e_{kl} \delta {}_0 e_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^k} {}_0^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d\Omega \\ = {}^{t+\Delta t} g_E^k + {}^{t+\Delta t} g_C^k - \int_{\Omega^k} {}_0^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

일반적인 유한요소 이산화 과정을 따라 형상함수 $h_n(\mathbf{x})$ 를 도입하면 변위와 이의 도함수는 다음과 같이 절점변위 ${}^t u_i^n(t)$ 로써 기술할 수가 있다.

$${}^t u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N h_n(\mathbf{x}) {}^t u_i^n(t) \quad (10)$$

이로부터 다음과 같이 행렬형태의 운동방정식이 구해진다.

$$\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{M}^k + {}_0^k \mathbf{K}^k \Delta \mathbf{u}^k) = {}^{t+\Delta t} g_E^k + {}^{t+\Delta t} g_C^k - \delta \mathbf{u}^T {}_0^t \mathbf{F}^k \quad (11)$$

여기서 질량행렬, 강성행렬, 내력벡터, 변위증분은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^k &= \int_{\Omega^k} {}^0 \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega \\ {}_0^k \mathbf{K}^k &= \int_{\Omega^k} {}_0^t \mathbf{B}_L^T {}_0^t \mathbf{C} {}_0^t \mathbf{B}_L d\Omega + \int_{\Omega^k} {}_0^t \mathbf{B}_{NL}^T {}_0^t \mathbf{S} {}_0^t \mathbf{B}_{NL} d\Omega \\ {}_0^t \mathbf{F}^k &= \int_{\Omega^k} {}_0^t \mathbf{B}_L^T {}_0^t \hat{\mathbf{S}} d\Omega \\ \Delta \mathbf{u}^k &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^k - {}^t \mathbf{u}^k \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 \mathbf{H} 는 형상함수 행렬이고 ${}_0^t \mathbf{B}_L$ 와 ${}_0^t \mathbf{B}_{NL}$ 은 각각 선형 및 비선형 변형률-변위 변환행렬이며 ${}_0^t \mathbf{S}$ and ${}_0^t \hat{\mathbf{S}}$ 는 응력 행렬과 벡터이고 ${}_0^t \mathbf{C}$ 는 증분형 재료상수 행렬이다. 또한 ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$ 는 절점의 가속도 벡터이고 $\Delta \mathbf{u}^k$ 는 변위증분 벡터이다.

2.1.1 외부 가상일

외부 가상일은 다음과 같이 기술된다.

$${}^{t+\Delta t} g_E^k = \int_{\Omega^k} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_s^k} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i d\Gamma \quad (13)$$

여기서 ${}^{t+\Delta t} f_i^B$ 와 ${}^{t+\Delta t} f_i^S$ 은 각각 체력과 표면력이며 이 식은 다음과 같이 행렬형태로 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} g_E^k &= \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^k \\ &= \delta \mathbf{u}^T \left(\int_{\Omega^k} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B d\Omega + \int_{\Gamma_s^k} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (14)$$

2.1.2 접촉 가상일

접촉 가상일은 다음과 같이 기술된다.

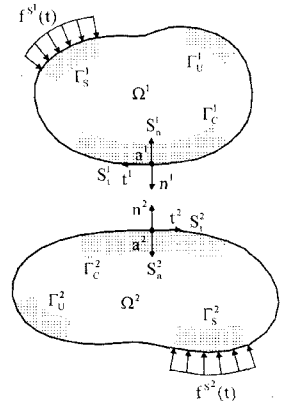
$${}^{t+\Delta t} g_C^k = \int_{\Gamma_c^k} {}^{t+\Delta t} f_i^C \delta u_i d\Gamma = \int_{\Gamma_c^k} ({}^{t+\Delta t} S_t t_i - {}^{t+\Delta t} S_n n_i) \delta u_i d\Gamma \quad (15)$$

여기서 ${}^{t+\Delta t} f_i^C$ 는 접촉력이며 n_i 와 t_i 는 접촉표면의 외향 단위 법선벡터와 단위 접선벡터이다.

이제 그림과 같이 점 \mathbf{a}^1 과 \mathbf{a}^2 로 이루어진 접촉쌍을 생각하자.

$t+\Delta t$ 에서의 접촉간극은 다음과 같이 선형화된 형태로 표현할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} D_n = {}^{t+\Delta t} n_i ({}^{t+\Delta t} u_i^1 - {}^{t+\Delta t} u_i^2) - {}^t n_i ({}^t u_i^1 - {}^t u_i^2) + {}^t D_n \quad (16)$$



또한 시간증분 Δt 동안의 미끄러짐량은 다음과 같이 선형화된 형태로 표현할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}D_t = {}^{t+\Delta t}t_i \left({}^{t+\Delta t}u_i^1 - {}^{t+\Delta t}u_i^2 \right) - {}^t t_i \left({}^t u_i^1 - {}^t u_i^2 \right) \quad (17)$$

이산화된 모델의 모든 접촉쌍에 대하여 정렬하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}D_n = {}^{t+\Delta t}D_{nu} - {}^{t+\Delta t}U - {}^t D_{nu} - {}^t U + {}^t D_n \quad (18)$$

$${}^{t+\Delta t}D_t = {}^{t+\Delta t}D_{tu} - {}^{t+\Delta t}U - {}^t D_{tu} - {}^t U \quad (19)$$

여기서 $U = \{u^1 | u^2\}^T$ 는 조합된 변위벡터이며, $D_{nu} = \{D_{nu}^1 | D_{nu}^2\}$ 와 $D_{tu} = \{D_{tu}^1 | D_{tu}^2\}$ 는 조합된 변환행렬이다. 이로부터 접촉력에 의한 가상일은 모든 접촉쌍에 대하여 다음과 같이 조합된 행렬형태로 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}g_C &= \delta D_n^T {}^{t+\Delta t}P_n + \delta D_t^T {}^{t+\Delta t}P_t \\ &= \delta U^T \left({}^{t+\Delta t}D_{nu}^T {}^{t+\Delta t}P_n + {}^{t+\Delta t}D_{tu}^T {}^{t+\Delta t}P_t \right) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 ${}^{t+\Delta t}P_n$ 과 ${}^{t+\Delta t}P_t$ 는 법선 및 접선방향의 절점력이다.

2.1.3 비선형 마찰 동점접 문제의 운동방정식

이제 식 (11)와 (14), (15)로부터 다음과 같이 두 물체가 접촉하는 경우에 대해 이산화된 운동방정식을 얻게 된다.

$$M {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + {}_0^t K \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}_0^t F + {}^{t+\Delta t}D_{nu}^T {}^{t+\Delta t}P_n + {}^{t+\Delta t}D_{tu}^T {}^{t+\Delta t}P_t \quad (21)$$

여기서 각 항은 다음과 같이 두 물체에 대해 결합된 행렬을 나타낸다.

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M^1 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix}, \quad {}_0^t K = \begin{bmatrix} {}_0^t K^1 & 0 \\ 0 & {}_0^t K^2 \end{bmatrix}, \\ {}^{t+\Delta t}R &= \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}R^1 \\ {}^{t+\Delta t}R^2 \end{bmatrix}, \quad {}_0^t F = \begin{bmatrix} {}_0^t F^1 \\ {}_0^t F^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

또한 접촉조건과 마찰조건은 이산화된 형태로 다음과 같이 기술할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}D_n^T {}^{t+\Delta t}P_n = 0, \quad {}^{t+\Delta t}D_n \geq 0, \quad {}^{t+\Delta t}P_n \geq 0 \quad (23)$$

$$-\mu {}^{t+\Delta t}P_n \leq {}^{t+\Delta t}P_t \leq \mu {}^{t+\Delta t}P_n \quad (24)$$

3. 시간적분과 충돌조건

3.1 시간적분 알고리즘

매 시간간격마다 동적평형을 만족하는 운동방정식의 응답을 구하기 위해 Zienkiewicz 등[8]의 단일단계 시간적분 알고리즘을 도입하였다. 시간증분 Δt 동안 절점의 변위벡터 ${}^{t+\Delta t}U$ 는 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}U = {}^t U + \Delta t {}^t \dot{U} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^{t+\Delta t} \ddot{U} \quad (25)$$

시간 t 에서 모든 응답을 알고 있는 경우 근사화된 응답을 동적 평형방정식에 대입하면 암시적인 시간적분 알고리즘이 구해지며 이 때 발생하는 비선형 방정식은 예측-보정 과정을 통해 풀 수 있다[9].

3.1.1 예측과정

해의 선형예측을 위해 같이 근사한다.

$${}^{t+\Delta t}D_{nu}^T {}^{t+\Delta t}P_n + {}^{t+\Delta t}D_{tu}^T {}^{t+\Delta t}P_t = {}^t D_{nu}^T {}^t P_n + {}^t D_{tu}^T {}^t P_t \quad (26)$$

식(25)와 (26)을 식 (21)에 대입하여 다음과 같이 변위증분의 선형 예측치를 구할 수 있다.

$$\Delta U^{(0)} = {}_0^t K^* \left[{}^{t+\Delta t}R + {}^t D_{nu}^T {}^t P_n + {}^t D_{tu}^T {}^t P_t - {}_0^t F + \frac{2}{\Delta t} M {}^t \dot{U} \right] \quad (27)$$

여기서 ${}_0^t K^* = {}_0^t K + \frac{2}{\Delta t} M$ 이다.

3.1.2 보정과정

보정과정에서는 다음과 같은 근사를 사용한다.

$$\begin{aligned} &{}^{t+\Delta t}D_{nu}^{(k+1)T} {}^{t+\Delta t}P_n^{(k+1)} + {}^{t+\Delta t}D_{tu}^{(k+1)T} {}^{t+\Delta t}P_t^{(k+1)} \\ &= {}^t D_{nu}^{(k)T} {}^t P_n^{(k)} + {}^t D_{tu}^{(k)T} {}^t P_t^{(k)} \end{aligned} \quad (28)$$

식 (25)로부터 구해지는 $\delta \ddot{U}^{(k+1)} = 2\delta \ddot{U}^{(k+1)}/\Delta t^2$ 의 관계식으로부터 변위증분에 대한 (k+1)번째 보정하는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta \ddot{U}^{(k+1)} &= {}^{t+\Delta t} {}_0^t K^{(k)T} \left[{}^{t+\Delta t} D_{nu}^{(k)T} {}^{t+\Delta t} P_n^{(k)} + {}^{t+\Delta t} D_{tu}^{(k)T} {}^{t+\Delta t} P_t^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + {}^{t+\Delta t} R - {}_0^t F^{(k)} - M {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k)} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

이와 같은 단일단계 알고리즘은 뉴마크 알고리즘과 동일한 안정성을 가진다.

3.2 충돌조건

시간 τ 에서 충돌이 발생하는 경우 $[\tau-0, \tau+0]$ 에 걸쳐서 운동방정식을 적분하면 속도 불연속의 식이 구해진다.

$${}^t\dot{\mathbf{U}}(+0) = {}^t\dot{\mathbf{U}}(-0) + \mathbf{M}^{-1} {}^t\mathbf{D}_{nu}^T \Phi + \mathbf{M}^{-1} {}^t\mathbf{D}_{tu}^T \Psi \quad (30)$$

여기서 $\Phi = \int_{\tau-0}^{\tau+0} \mathbf{P}_n dt$ 이고 $\Psi = \int_{\tau-0}^{\tau+0} \mathbf{P}_t dt$ 이다. 이를 고려할 때 법선 및 접선방향의 상대속도는 다음과 같이 구해진다.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_n = {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu} \quad {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} \quad (31)$$

$$= \frac{2}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_n - {}^t\mathbf{D}_n \right) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu} \quad {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\Psi$$

$$- {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Phi - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tu}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Psi$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_t = {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tu} \quad {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} \quad (32)$$

$$= \frac{2}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_t - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tu} \quad {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\Psi$$

$$- {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tu} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Phi - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tu} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tu}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Psi$$

접촉상태인 경우 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_n = {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_n = 0$ 이므로

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nuj} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nuk}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Phi_k + {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nuj} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tuk}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Psi_k$$

$$= - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nuj} \quad {}^t\dot{\mathbf{U}}_j - \frac{2}{\Delta t} {}^t\mathbf{D}_{nj} \quad (33)$$

접착상태인 경우 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_t = {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_t = 0$ 이므로

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tj} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tuk}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Phi_k + {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tj} \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tuk}^T \quad {}^{t+\Delta t}\Psi_k$$

$$= - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{tj} \quad {}^t\dot{\mathbf{U}}_j \quad (34)$$

미끄럼 상태인 경우

$${}^{t+\Delta t}\Psi_j = \text{sgn}({}^{t+\Delta t}P_{ij}) \mu \quad {}^{t+\Delta t}\Phi_j \quad (35)$$

접촉쌍에 대해 식 (34), (34), (35)을 연립하여 ${}^{t+\Delta t}\Phi$ 와 ${}^{t+\Delta t}\Psi$ 에 대해 풀면 속도의 불연속을 고려할 수 있다.

4. 선형 상보성 수식화

4.1 예측과정

시간 $t+\Delta t$ 에서 보조변수 \mathbf{T}^+ 와 \mathbf{T}^- 를 도입하면

마찰조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-{}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_t + 2\mathbf{T}^+ = \mu \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_n, \quad \mathbf{T}^+ \geq 0 \quad (36)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_t + 2\mathbf{T}^- = \mu \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_n, \quad \mathbf{T}^- \geq 0 \quad (37)$$

이로부터 다음의 관계식이 구해진다.

$$\mathbf{T}^+ + \mathbf{T}^- = \mu \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_n \quad (38)$$

$$\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^- = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_t \quad (39)$$

이제 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{nu}$ 를 ${}^t\mathbf{D}_{nu}$ 로 근사하면 접촉간극과 상대 미끄러짐량은 다음과 같이 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_n$, \mathbf{T}^+ , \mathbf{T}^- 의 항으로서 표현된다.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_n^{(0)} = {}^t\mathbf{D}_{nu} \Delta \dot{\mathbf{U}}^{(0)} + {}^t\mathbf{D}_n$$

$$= \mathbf{Q}_{11} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_n + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}^+ + \mathbf{Q}_{13} \mathbf{T}^- + {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_1 \quad (40)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{D}}_t^{(0)} = {}^t\mathbf{D}_{tu} \Delta \dot{\mathbf{U}}^{(0)}$$

$$= \mathbf{Q}_{21} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_n + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{T}^+ + \mathbf{Q}_{23} \mathbf{T}^- + {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_2 \quad (41)$$

여기서 각항은 다음과 같다

$$\mathbf{Q}_{11} = {}^t\mathbf{D}_{nu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{nu}^T, \quad \mathbf{Q}_{12} = {}^t\mathbf{D}_{nu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{tu}^T,$$

$$\mathbf{Q}_{21} = {}^t\mathbf{D}_{tu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{nu}^T, \quad \mathbf{Q}_{22} = {}^t\mathbf{D}_{tu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{tu}^T,$$

$$\mathbf{Q}_{13} = -\mathbf{Q}_{12}, \quad \mathbf{Q}_{23} = -\mathbf{Q}_{22},$$

$$\mathbf{Q}_{14} = \frac{2}{\Delta t} \quad {}^t\mathbf{D}_{nu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{nu}^T, \quad \mathbf{Q}_{15} = \frac{2}{\Delta t} \quad {}^t\mathbf{D}_{nu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{tu}^T,$$

$$\mathbf{Q}_{24} = \frac{2}{\Delta t} \quad {}^t\mathbf{D}_{tu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{nu}^T, \quad \mathbf{Q}_{25} = \frac{2}{\Delta t} \quad {}^t\mathbf{D}_{tu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \quad {}^t\mathbf{D}_{tu}^T,$$

$${}^t\mathbf{R}_1 = {}^t\mathbf{D}_{nu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{F} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}^t \dot{\mathbf{U}} \right) + {}^t\mathbf{D}_n,$$

$${}^t\mathbf{R}_2 = {}^t\mathbf{D}_{tu} \quad {}^t\mathbf{K}^{*-1} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{F} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}^t \dot{\mathbf{U}} \right),$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{Q}_{14} \quad {}^{t+\Delta t}\Phi + \mathbf{Q}_{15} \quad {}^{t+\Delta t}\Psi + {}^t\mathbf{R}_1,$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{Q}_{24} \quad {}^{t+\Delta t}\Phi + \mathbf{Q}_{25} \quad {}^{t+\Delta t}\Psi + {}^t\mathbf{R}_2 \quad (42)$$

또한 상대 미끄러짐량은 음이 아닌 두 값의 차로 표현할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_t^+ - \mathbf{D}_t^-, \quad \mathbf{D}_t^+ \geq 0, \quad \mathbf{D}_t^- \geq 0 \quad (43)$$

이로부터 다음과 같은 상보성 관계가 유도된다.

$$\mathbf{D}_t^{+T} \mathbf{T}^+ = 0, \quad \mathbf{D}_t^+ \geq 0, \quad \mathbf{T}^+ \geq 0 \quad (44)$$

$$\mathbf{D}_t^{-T} \mathbf{T}^- = 0, \quad \mathbf{D}_t^- \geq 0, \quad \mathbf{T}^- \geq 0 \quad (45)$$

이제 식 (23), (38), (40), (41), (44), (45)을 정리하면 다음과 같은 선형 상보성 관계식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{Dz} + \mathbf{q} \\ \mathbf{w}^T \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{w} \geq 0, \quad \mathbf{z} \geq 0 \end{aligned} \quad (46)$$

여기서 각 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_n, \mathbf{D}_t^+, \mathbf{T}^+ \}^T, \quad \mathbf{z} = \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_n, \mathbf{T}^+, \mathbf{D}_t^- \}^T \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} - \mu \mathbf{Q}_{12} & 2\mathbf{Q}_{12} & 0 \\ \mathbf{Q}_{12}^T - \mu \mathbf{Q}_{22} & 2\mathbf{Q}_{22} & \mathbf{I} \\ \mu \mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \{ {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{R}}_1, {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{R}}_2, 0 \}^T \end{aligned} \quad (47)$$

위의 상보성 문제를 Lemke 의 피보팅 알고리즘 [10] 등의 방법으로 풀면 시간 $t + \Delta t$ 에 대한 선형 예측 응답을 구할 수 있다.

4.2 보정과정

예측과정과 유사하게 접촉간극과 상대 미끄러짐 량이 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{D}}_n^{(k+1)} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_{nt}^{(k)} \delta \dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_n^{(k)} \\ &= \mathbf{Q}_{11} {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_n + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}^+ + \mathbf{Q}_{13} \mathbf{T}^- + {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{R}}_1 \quad (48) \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{D}}_t^{(k+1)} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_{nt}^{(k)} \delta \dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{Q}_{21} {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_n + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{T}^+ + \mathbf{Q}_{23} \mathbf{T}^- + {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{R}}_2 \quad (49) \end{aligned}$$

이로부터 유도되는 상보성 관계식을 풀면 시간 $t + \Delta t$ 에서의 평형상태를 구하기 위한 응답의 보정치가 계산된다.

5. 접촉탐색과 접촉검출

5.1 접촉탐색

접촉탐색은 유한요소법과 같은 근사법을 사용하는 경우, 예상되는 모든 접촉점에 대한 표적 세그먼트를 찾는 과정이다. 본 연구에서는 Zhong 과 Nilsson[11]의 계층-영역(hierarchy-territory) 알고리즘을 도입하였고 원형의 탐색영역을 사용하였다.

5.2 접촉검출

접촉검출은 접촉탐색을 통하여 발견된 모든 접촉쌍에 대하여 접촉 발생을 검출하고 접촉발생시 정확한 접촉시간과 접촉위치를 계산하는 과정이다. 선형 세그먼트의 경우 변위의 이차근사로부터 다음과 같이 충돌시간에 대한 식이 구해진다

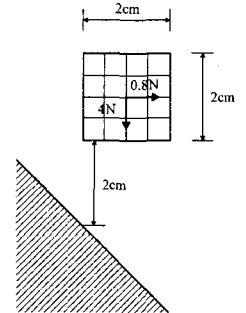
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ {}^t \mathbf{n}_b' \cdot (\ddot{\mathbf{U}}_a - h_1 \ddot{\mathbf{U}}_b^1 - h_2 \ddot{\mathbf{U}}_b^2) \} \tau^2 \\ & + \{ {}^t \mathbf{n}_b' \cdot ({}^t \dot{\mathbf{U}}_a - h_1 {}^t \dot{\mathbf{U}}_b^1 - h_2 {}^t \dot{\mathbf{U}}_b^2) \} \tau + {}^t \mathbf{D}_n = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

여기서 $\ddot{\mathbf{U}}_a$ 는 접촉점에 대한 값이고 $\ddot{\mathbf{U}}_b^1$ 과 $\ddot{\mathbf{U}}_b^2$ 는 세그먼트를 구성하는 두 점 b^1 과 b^2 에 대한 값이다.

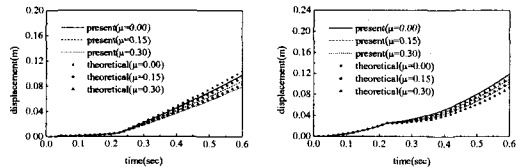
6. 수치 예제

6.1 블록과 경사면의 충돌

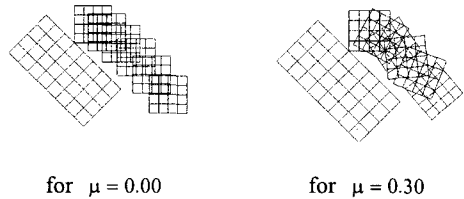
그림과 같이 힘을 받는 블록과 경사면의 충돌문제를 마찰계수를 변화시키면서 해석하였다. 블록은 $E = 1 \times 10^7$ N/cm², $\nu = 0.2$, $\rho = 1$ kg/cm³, $t = 1$ cm 이며 경사면은 탄성계수가 블록의 두 배의 값을 가진다. 시간적분간격은 $\Delta t = 1.5 \times 10^{-5}$ sec 를 사용하였다.



완전탄성충돌을 가정한 경우의 해와 계산된 결과를 비교하여 수평 및 수직변위를 나타내면 같다.



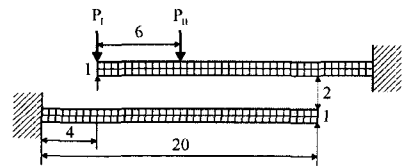
시간간격 0.04 에 대해 블록의 운동을 나타내면 다음과 같다.



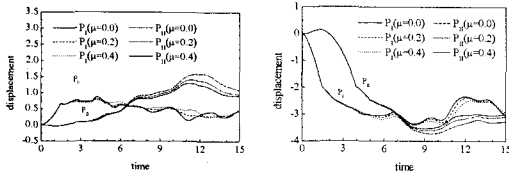
6.2 두 외팔보의 충돌

그림과 같이 두 외팔보의 충돌문제를 해석하였다.

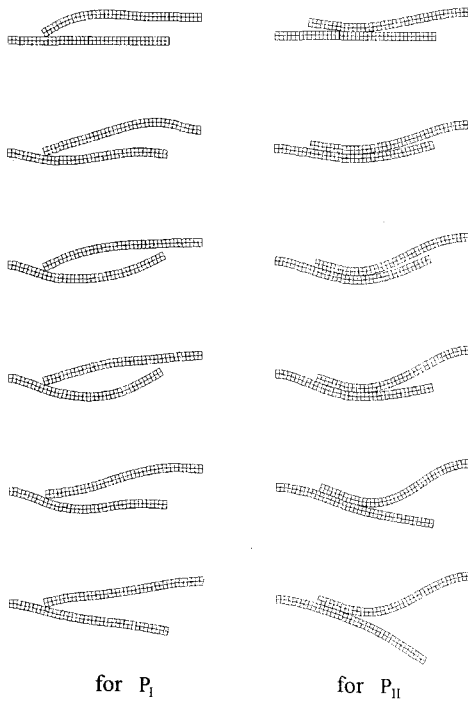
재료상수 $E = 4000$, $\nu = 0.3$, $\rho = 4$, $t = 0.01$ 이고 힘의 크기



는 0.15 이며 마찰계수의 값을 변화시켜 해석하였다. 시간적분간격은 0.015 를 사용하였다. 계산된 수평 및 수직변위는 다음과 같다.



$\mu = 0.4$ 인 경우, 두 하중의 경우에 대해 외팔보의 운동을 시간간격 2.0 으로 나타내면 다음과 같다.



7. 결론

전체형 라그랑지언 수식화에 기초한 대변위 동적 해석과 선형 상보성 수식화를 결합하여 기하학적 비선형을 포함하는 2 차원 마찰 동접촉 해석을 수행하였다. 상보성 수식화를 통하여 접촉제한조건과 마찰조건을 정확하게 만족하는 해를 구하였으며 예측-보정 과정으로 이루어진 단일단계 시간적분 알고리즘을 이용하여 동적 평형방정식을 만족하는 응답을 구하였다. 절점 대 세그먼트의 접촉쌍을 정확히 탐색하기 위하여 원형의 계층 탐색영역을 사용하였고 변위의 이차근사를 이용하여 정확한 충돌시간과 위치를 계산하였으며 충돌조건

을 이용하여 충돌 시 발생하는 속도의 불연속을 계산하였다. 수치예제를 통하여 이상의 계산과정의 유효성을 검증하였다.

후기

본 연구는 국가지정연구실 사업인 “동시공학 설계개념에 의한 통합 최적설계 시스템개발” 의 일환으로 지원 받았음을 밝힙니다

참고문헌

- (1) Hughes, T. J. R. , Taylor, R. L. , Sackman, J. L. , Curnier, A. , Kanoknukulchai, W. , 1976, “A Finite Element Method for A Class of Contact-impact Problems”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* , 8, pp. 249-276.
- (2) Bathe, K. J. , Bouzinov, P. A. , 1997, “On The Constraint Function Method for Contact Problems”, *Comput. Struct.* , 64(5-6), pp. 1069-1085.
- (3) Klarbring, A. and Björkman, G. , 1992, “Solution of Large Displacement Contact Problems with Friction Using Newton's Method for Generalized Equations”, *Int. J. Num. Meth. Engng.* , 34, pp. 249-269.
- (4) Klarbring, A. and Björkman, G. , 1988, “A Mathematical Programming Approach to Contact Problems with Friction and Varying Contact Surface”, *Comput. Struct.* , 30, pp. 1185-1198.
- (5) Kwak, B. M. , 1991, “Complementarity Problem Formulation of Three-dimensional Frictional Contact”, *ASME J. Appl. Mech.* , 113, p. 134-140.
- (6) Kim, J. O. and Kwak, B. M. , 1996, “Dynamic Analysis of Two-dimensional Frictional Contact by Linear Complementarity Problem Formulation”, *Int. J. Solids Struct.* , 33(30), P. 4605-4624.
- (7) Bathe, K. J. , 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall.
- (8) Zienkiewicz, O. C. , Wood W. L. and Hine, N. W. , 1984, “A Unified Set of Single Step Algorithms Part 1: General Formulation and Applications”, *Int. J. Num. Meth. Engng.* , 20, p. 1529-1552.
- (9) Crisfield, M. A. , 1997, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley.
- (10) Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M. , 1979, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley.
- (11) Zhong, Z. H. and Nilsson, L. , 1989, “A Contact Searching Algorithm for General Contact Problems”, *Comput. Struct.* , 33(1), p. 197-209.