

수학적 해석 방법에 의한 액체 저장탱크의 액동압 거동 해석

박종률* · 오택열**

Hydrodynamic Behavior Analysis of Vertical-Cylindrical Liquid-Storage Tanks by Mathematically Analytic Method

Jong-Ryul Park*, Taek-Yul Oh**

Key Words: Fluid Velocity Potential (유체속도퍼텐셜), Hydrodynamic Pressure (액동압), Impulsive Pressure (충격압), Convective Pressure (이류압), Sloshing Frequency(요동진동수)

Abstract

Hydrodynamic behavior and response of vertical-cylindrical liquid-storage tank is considered. The equation of the liquid motion is shown by Laplace's differential equation with the fluid velocity potential. The solution of the Laplace's differential equation of the liquid motion is expressed with the modified Bessel functions. Only rigid tank is studied. The effective masses and heights for the tank contents are presented for engineering design model.

1. 서론

액체를 저장하는 여러 다른 구조물 중에서 지반에 지지되는 얇은 두께의 직립 원통 탱크는 저장액체에 의해 생기는 유체 정압을 지지하는데 매우 효과적이기 때문에 세계적으로 가장 널리 사용되고 있다.

1964년, 알래스카에서의 지진으로 인한 탱크의 파손에 대한 연구보고에서부터 최근까지 수십 건의 파손 사례로 보아, 액체 저장 탱크의 거동과 성능을 더욱 더 잘 이해하는 것이 필요하다.

다행히 한국 내에서는 지진에 의한 탱크의 파손 사례는 아직 보고되지 않고 있으나 최근 한반도 내에서도 산업시설물이 파손될 수 있는 리히트 진도 4 이상의 지진이 발생되고 있어 지진에 대한 액체 저장 탱크의 안전도를 심각히 고려해

야 한다.

액체 저장 탱크가 지진하중을 받을 때, 저장액체의 진동 운동은 탱크 구조물을 통해 액체에 작용되는 지진 가속도에 의해 발달된다. 이 액 운동은 두 가지 형(mode)으로 나눌 수 있다. 첫 번째 것은 충격형(impulsive mode)으로 정의되는데 탱크 구조물의 운동과 조화되게 움직이는 액체 입자들의 운동에 의한 운동이다. 두 번째 것은 이류형(convective mode) 혹은 보통 액체요동(sloshing)으로 부르는 것으로 정의되는데 수직으로 요동하는 자유액면 근처에서의 액체 입자들의 운동에 의한 운동이다.

액체 저장 탱크의 동적 거동의 해석은 일반적으로 강체계(rigid system)와 유연체계(flexible system)의 두 개의 계(system)로 구분하여 연구되고 있다.

강체 탱크 모델에 대한 연구는 Jacobsen¹⁾, Housner²⁾³⁾, Epstein⁴⁾, Yang⁵⁾, Wozniak과 Mitchel⁶⁾, Haroun⁷⁾가 수행했다.

Jacobsen에 의해 제안된 해석 절차에서는 유체가 비압축성이고 비점성이라고 가정되었다. 중력

* 경희대학교 대학원

** 경희대학교 기계산업시스템부

파 효과는 제외되었으며 단지 저장 액체의 충격 운동만 고려되었다.

Housner는 액체 거동을 해석 시 충격파의 효과가 포함되었으며 에너지 법칙에 기초하여 저장 액체의 운동을 충격형과 이류형으로 분리하여 해석했다.

그후 Epstein는 Housner의 모델을 개선하였는데 이류운동은 주로 액체의 위 부분이 관여된다고 제안하고 자유 액면에서 $1.5R$ 의 깊이까지의 액체 부분만이 이류운동의 효과를 평가할 때 고려했다.

Yang은 충격효과를 유체-탱크계의 고유 진동수와 같은 상용자유도 기계진동자에 대한 지반의사가속도를 사용하여 모델링하였다.

Wozniak과 Mitchell은 Housner의 연구결과를 바탕으로 엔지니어링 설계에 적용할 수 있도록 개선했으며, 이 결과는 API Standard 650, Appendix E⁸⁾에 채용되어 현재 엔지니어링업무에 활용되고 있다.

Haroun은 모우멘텀 평형법(momentum balance method)을 사용하여 사각탱크와 탬에 대한 액동압 계산법을 제시했다.

유연체 탱크 모델에 대한 연구는 Veletsos⁹⁾, Yang 1976, Veletsos 와 Yang¹⁰⁾, Haroun 과 Housner¹¹⁾, Balendra¹²⁾, Fischer¹³⁾은 액동하중과 탱크 구조물의 동적 반응사이의 연성 효과를 고려함으로써 압액체-탱크계의 지진거동에 대한 탱크 쉘 벽의 유연성의 영향을 연구했다.

탱크의 내진설계에 대한 국내의 연구는 김동현¹⁴⁾, 김충호¹⁵⁾에 의해 수행되었는데 액동압 거동에 대한 수학적인 엄밀해의 유도나 증명에 대해서는 부족하다.

탱크의 유연성은 탱크 벽체내의 응력에는 영향을 미치나 탱크 내부에 있는 액체의 수면변위 응답에는 영향이 거의 없다.¹⁶⁾ 실제로 탱크는 액체-탱크계의 고유진동수보다 낮은 공진요동진동수를 가지고 있으므로 요동진동수와 압력분포는 강체탱크의 조건하에서 구할 수 있다.¹⁷⁾¹⁸⁾

이러한 이유로, 본 연구에서는 액동압 응답해석에 강체계를 채용했다.

본 연구의 목적은 3가지이다. 첫째, 지반 여기에 의해 생기는 저장 액체의 액동압 거동해석을 위해 유체속도 퍼텐셜을 갖는 Laplace 미분방정식을 Bessel함수를 이용하여 충격형과 이류형에

대해 그 해를 정식화하는 것과 둘째, 이 해를 이용하여 엔지니어링 설계 모델을 만들고 기존의 설계 코드인 API Standard 650에서 채용한 설계 모델과 비교하므로써 충격형과 이류형의 운동효과 및 성질을 고찰하고자 한다. 셋째, 한국 산업규격 KS B 6225(강제 석유 저장탱크의 구조)에서는 탱크 몸통의 강도 설계 시, 지진시의 액면요동과 동압을 고려하여야 한다고 명시하고 있으나 구체적인 수식과 명확한 규정이 없는바 이를 보완하는 데 필요한 기초이론을 제공하고자 한다.

2. 원통형 탱크의 구조, 좌표계 및 문제의 가정

2.1 원통형 구조

고려된 탱크는 Fig. 1에 보여 주고 있다. 이 탱크는 강체기초(rigid base)에 고정되어 있고 원통형이며 얇은 벽으로 되어 있다. 이 탱크는 반경 a , 길이 L 이며 높이 H 만큼 액체가 부분적으로 채워져 있는 탱크이다. 원통 좌표계가 사용되었으며 원점은 바닥의 중앙점을 사용했다.

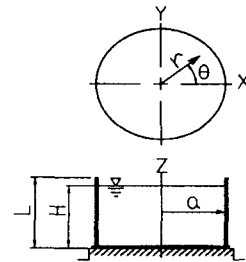


Fig. 1 Cylindrical Tank and Coordinate System

2.2 문제의 가정

고려한 탱크는 강체이며 탱크내에서 요동하는 액체에 대한 거동을 고려할 때 이 액체는 (i) 비점성 유체, (ii) 비압축성 유체, (iii) 적은 변위 속도 및 자유액면의 기울기, (iv) 비회전 유동장, (v) 동질 유체라고 가정한다.

그리고 액체-탱크계(fluid-tank system)는 x-축에 따라 수평가속도 $\ddot{x}(t)$ 를 받는다고 가정한다. 수직가속도는 고려하지 않았다.

3. 기본방정식

정의된 계에서 어떤 유체속도퍼텐셜, $\Phi(r, z, t)$ 가 존재하며 이것은 Laplace 방정식을 만족해야 한다.

원통좌표계에서 유체에 대한 운동 방정식을 Laplace 방정식으로 쓰면

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

Bernoulli-Euler 방정식에서 액체운동에 의한 액동압, p 는 유체속도퍼텐셜 Φ 와 시간 t 와 관계가 있는데

$$p = \rho_i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.2)$$

이다. $d(t)$ 를 액면에서 액체의 수직변위의 순간값(instantaneous value)이라고 정의하면,

$$d(t) = \int v_z dt = - \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dt \quad (3.3)$$

로 표현되며 $z=H$ 에서 압력은 $d(t)$ 와 관련된 관성력(inertia force)의 기여를 무시하면 개략적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p = -\rho_i \cdot g \cdot d(t) \quad (3.4)$$

식(3.2)과 식(3.4)을 등식으로 놓고 식(3.3)을 대입하여 정리한 후 시간 t 로 미분하면

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

을 얻을 수 있다.

따라서 식(3.1)에 대한 해는 두 부분으로 표시할 수 있다.

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_c \quad (3.6)$$

여기서 Φ_i 는 충격효과에 대한 해이고 Φ_c 는 이류효과에 대한 해이다.

4. 충격력 유체속도퍼텐셜의 엄밀해

4.1 충격력 함수해 Φ_i 의 경계조건

Laplace 방정식의 해는 조화함수이며, 유동문제에서 속도 퍼텐셜에 대한 경계조건은 고체경계면 상에서 고체경계면에 대한 상대속도의 수직성분은 0이 되어야 한다는 물리적 현상에서 얻는다.¹⁹⁾

액체-탱크계에 대한 충격효과 액체운동의 경계조건은 조화함수가 되기 위해서는 다음과 같은 경계조건을 만족한다.

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}(r, 0, t) = v_z = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}(a, z, t) = v_r \\ &= -\frac{\partial w}{\partial t}(z, t) = \dot{x}(t) \cos \theta \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \Big|_{z=H} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}(r, H, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(H, t) = 0 \quad (4.3)$$

4.2 충격력 함수해 Φ_i 의 수학적 엄밀해

Φ_i 의 일반적인 형식은

$$\Phi_i = R(r) \Theta(\theta) Z(z) T(t) \quad (4.4)$$

로 쓸 수 있다. 식(4.4)을 식(3.1)에 대입하고 $R\Theta ZT$ 로 나누면

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (4.5)$$

식(4.1), 식(4.2), 식(4.3)에 의해 정의된 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-R\Theta Z' \Big|_{z=0} T = 0 \quad \text{혹은} \quad -Z' \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.6)$$

$$-R' \Big|_{r=R} \Theta Z T = \dot{x}(t) \cos \theta \quad (4.7)$$

$$R\Theta Z \Big|_{z=H} \dot{T} = 0 \quad \text{혹은} \quad Z \Big|_{z=H} = 0 \quad (4.8)$$

여기서, 위첨자 (')는 3개의 위치 좌표, r, θ, z 중 어느 것에 대한 미분을 뜻하고 위첨자 (·)는 시간에 대한 미분을 뜻한다.

속도 퍼텐셜의 함수 Θ 와 T 는

$$\Theta = \cos \theta \quad (4.9)$$

$$T = \dot{x}(t) \quad (4.10)$$

로 가정할 수 있다.

식(4.5)에서 $\frac{Z''}{Z}$ 는 상수이어야 한다.

$$\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \quad (4.11)$$

로 놓으면, 식(4.11)의 해는

$$Z = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z) \quad (4.12)$$

의 형식으로 표시된다. 여기서, A와 B는 상수이다.

식(4.12)에 경계조건식 식(4.6)를 적용하면 $B=0$ 가 되므로 식(4.12)는

$$Z = A_n \cos(\lambda_n z) \quad (4.13)$$

로 단순화되고 이 식에 경계조건식 식(4.8)를 적용하면 $A \neq 0$ 이고 $\lambda z = \frac{\pi}{2}(2n-1)$ 이므로

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H} \quad (4.14)$$

로 된다. 여기서 n 은 $n \neq 0$ 이고 양의 정수이다. 따라서 식(4.5)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r^2 R'' + r R' - (1 + \lambda_n^2 r^2) R = 0 \quad (4.15)$$

이 식은 개선된 Bessel 미분방정식이다. 이 방

정식의 일반해는

$$R_n = C_n I_1(\lambda_n r) + D_n K_1(\lambda_n r) \quad (4.16)$$

로 표시된다. 여기서 I_1 는 위수 1인 제1종 변형 Bessel 함수이고, K_1 는 위수 1인 제2종 변형 Bessel 함수이다. $K_1(\lambda_n r)$ 는 $r=0$ 에서 특이해를 가진다. R 을 r 에 대해 미분하면

$$R' = C_n [\lambda_n I_1'(\lambda_n r)] \quad (4.17)$$

식(4.9)와 식(4.10)를 식(4.7)에 대입하고, 식(4.17)과 식(4.13)을 조합하여 정리하면

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (A_n C_n) \lambda_n I_1'(\lambda_n a) \cos(\lambda_n z) = 1 \quad (4.18)$$

로 된다. 따라서 $(A_n C_n)$ 의 값은

$$(A_n C_n) = -\frac{2}{\lambda_n H I_1'(\lambda_n a)} \int_0^H \cos(\lambda_n z) dz \quad (4.19)$$

로 된다.

식(4.18), 식(4.9), 식(4.10), 식(4.13) 및 식(4.14)을 식(4.23)에 대입하면

$$\begin{aligned} \Phi_i = & -\dot{x}(t) H \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{[(2n-1)\pi]^2} \\ & \times \frac{I_1 \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{r}{H} \right]}{I_1' \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \\ & \times \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

이 된다.

충격 효과에 의해 생기는 충격 압력, p_i 는 식(4.20)를 식(3.2)에 대입해서 얻는다.

$$\begin{aligned} p_i = & -\dot{x}(t) \rho_l H \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{[(2n-1)\pi]^2} \\ & \times \frac{I_1 \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{r}{H} \right]}{I_1' \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \\ & \times \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

이 액동압에 의해 탱크에 작용하는 수평방향의 합력인 전체 충격 액동압(20)은

$$\begin{aligned} Q_{i,0,t} = & \int_0^H \int_0^{2\pi} p \Big|_{r=a} a \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.22) \\ = & -\dot{x}(t) m_l \frac{H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{[(2n-1)\pi]^3} \\ & \times \frac{I_1 \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]}{I_1' \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \end{aligned} \quad (4.23)$$

로 된다.

충격 액동압에 의한 탱크의 벽 하단에 발생하는 충격 전도 모멘트는

$$M_{i,0,t} = \int_0^H \int_0^{2\pi} z \cdot p \Big|_{r=a} a \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.24)$$

정리하면

$$\begin{aligned} M_{i,0,t} = & -\dot{x}(t) m_l H \frac{H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{[(2n-1)\pi]^3} \\ & \times \frac{I_1 \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]}{I_1' \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \left[1 - \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

액면, $z=H$ 에서 어떤 점에 대한 수직 속도항, v_z 은 $v_{i,z} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}$ 로 표시되며, $r=a$ 와 $z=H$ 에서의 특이해를 갖는다. 그러나 어떤 다른 점에서의 속도는 미소하다. 따라서 충격력은 액체운동을 포함하지 않는다.

5. 이류력 유체속도퍼텐셜의 엄밀해

5.1 이류력 함수해 Φ_c 의 경계조건

액체-탱크계에 대한 이류효과 액체운동의 경계조건은 조화함수가 되기 위해서는 다음과 같은 경계조건을 만족한다.

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_c}{\partial z}(r, 0, t) = v_z = 0 \quad (5.1)$$

$$-\frac{\partial \Phi_c}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_c}{\partial r}(a, z, t) = v_r = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial t^2} \Big|_{z=H} + g \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \Big|_{z=H} = -g \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \Big|_{z=H} \quad (5.3)$$

5.2 이류력 함수해 Φ_c 의 수학적 엄밀해

임의의 지반운동에 대한 해를 구하기보다는, 식(4.26)과 같이 조화 지반 가속도, $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t}$ 에 대한 해를 구하고자.

$$\Theta = \cos \theta \quad (5.4)$$

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

로 하면 Φ_c 의 일반적인 형식은

$$\Phi_c = R(r) \Theta(\theta) Z(z) e^{i\omega t} \quad (5.6)$$

로 쓸 수 있다. 식(5.6)을 식(3.1)에 대입하고 $R\Theta Z e^{i\omega t}$ 로 나누면

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (5.7)$$

식(5.1), 식(5.2), 식(5.3)에 의해 정의된 경계조건은

$$R\Theta Z \Big|_{z=0} T = 0 \quad \text{혹은} \quad Z \Big|_{z=0} = 0 \quad (5.8)$$

$$R' \Big|_{r=0} \Theta Z T = 0 \quad \text{혹은} \quad R' \Big|_{r=0} = 0 \quad (5.9)$$

$$-\omega^2 R\Theta Z \Big|_{z=H} + g R\Theta Z' \Big|_{z=H}$$

$$= -\frac{g}{i\omega} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \frac{I_1\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{r}{H}\right]}{I_1'\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]} \quad (5.10)$$

로 쓸 수 있다.

식(5.7)에서 $\frac{Z''}{Z}$ 는 상수이어야 한다.

$$\frac{Z''}{Z} = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \quad (5.11)$$

로 놓으면

$$Z = A \cosh \frac{\lambda z}{a} + B \sinh \frac{\lambda z}{a} \quad (5.12)$$

여기서, A와 B는 상수이다.

경계조건식 식(5.8)을 적용하면 $B=0$ 가 되어

$$Z = A \cosh \frac{\lambda z}{a} \quad (5.13)$$

이 된다. 식(5.7)에 식(5.4)와 식(5.11)을 대입하면

$$r^2 R'' + rR' + \left(\frac{\lambda^2}{a^2} r^2 - 1\right)R = 0 \quad (5.14)$$

이 방정식의 해를 위수 1인 Bessel 함수로 표현하면

$$R = C J_1(\lambda \frac{r}{a}) + D Y_1(\lambda \frac{r}{a}) \quad (5.15)$$

$Y_1(\lambda \frac{r}{a})$ 는 $r=0$ 에서 특이해를 가지므로

$$R = C J_1(\lambda \frac{r}{a}) \quad (5.16)$$

식(5.16)을 미분하고 식(5.9)의 경계조건을 적용하면

$$J_1'(\lambda) = 0 \quad (5.17)$$

이 되어야 한다. 따라서 $J_1'(\lambda) = 0$ 의 근은 $\lambda_n =$

1.8412, 5.3314, 8.5363, 11.706, 14.8636, ...

이 된다.

식(5.13)과 식(5.16)를 식(5.10)에 대입하여 정리하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n C_n) \left\{ \lambda_n \frac{g}{a} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) - \omega^2 \right\} J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \\ = -\frac{g}{i\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \frac{I_1\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\frac{r}{H}\right]}{I_1'\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]} \quad (5.18)$$

만약 경계조건식 식(5.3)의 오른쪽 숫자가 0과 같으면(즉, 자유진동 조건에 상응한다면) 식(5.18)

에서 요동액체의 고유진동수 ω_n^2 의 값들은

$$\omega_n^2 = \lambda_n \frac{g}{a} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (5.19)$$

로 주어진다.

$(A_n C_n)$ 의 값을 구하기 위해 식(5.18)에 식(5.19)을 대입하여 요동액체고유진동수와 조화진동수를 포함하는 식으로 정리하고, 이 방정식의

양쪽에 $J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \frac{r}{a} d\left(\frac{r}{a}\right) d\theta$ 를 곱하고 그 결과를 액면 전체 즉, $\frac{r}{a}$ 은 0 에서 1, θ 는 0 에서 2π 에 대해 적분하고 정리하면

$$(A_n C_n) = -\frac{g}{i\omega} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2 - 1} \frac{1}{J_1(\lambda_n)} \frac{\tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)}{\cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)} \quad (5.20)$$

로 된다. 따라서 이류력 효과의 해 ϕ_c 는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_c = -\frac{1}{i\omega} \ddot{x}_0 e^{i\omega t} H \frac{a}{H} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} \\ \times \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{J_1(\lambda_n)} \frac{\cosh\left(\lambda_n \frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)} \quad (5.21)$$

탱크에 대한 조화이류압력, p_c 은 식(5.21)을 식(3.2)에 적용하므로써 얻어진다.

$$p_c = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \rho_l H \frac{a}{H} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} \\ \times \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{J_1(\lambda_n)} \frac{\cosh\left(\lambda_n \frac{z}{a}\right)}{\cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)} \quad (5.22)$$

탱크의 벽에 생기는 상용 전체 이류 액동압은 식(4.22)과 같이 적용하면 다음과 같이 얻어진다.

$$Q_{c,0,l} = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} m_l \frac{a}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n(\lambda_n^2 - 1)} \\ \times \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (5.23)$$

탱크의 벽 하단 위에 발생하는 이류 전도 모멘트는 식(4.24)과 같이 적용하면 다음과 같이 얻어진다.

$$M_{c,0,l} = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} m_l H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n(\lambda_n^2 - 1)} \\ \times \frac{a}{H} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \cdot \left[1 - \frac{a}{\lambda_n H} \tanh\left(\frac{\lambda_n H}{2a}\right)\right] \quad (5.24)$$

액면, $z=H$ 에서 어떤 점에 대한 수직 속도항, $v_{c,z}$ 은

$$v_{c,z} = -\frac{\partial \phi_c}{\partial z} \\ = \frac{\ddot{x}_0}{i\omega} e^{i\omega t} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2\lambda_n}{(\lambda_n^2 - 1)} \frac{J_1(\lambda_n \frac{r}{a})}{J_1(\lambda_n)} \\ \times \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (5.25)$$

이 되며 상용변위, d 는 식(5.25)을 적분하므로써

다음과 같이 얻어진다.

$$d = -\frac{\ddot{x}_0}{\omega^2} e^{i\omega t} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2\lambda_n}{(\lambda_n^2 - 1)} \times \frac{J_1(\lambda_n \frac{r}{a})}{J_1(\lambda_n)} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (5.26)$$

d_{\max} 는 $r=a$ 에서 얻는다. 따라서 이류력은 액체운동을 포함한다.

6. 엔지니어링 설계 모델

6.1 설계하중 모델

탱크-액체계는 Fig. 2과 같이 모델링을 할 수 있다. 탱크에 단단히 지지되어 있는 충격효과질량 m_0 는 탱크의 바닥에서 거리 h_0 에서 탱크의 벽에 붙어있는 강체이다. 탱크에 유연하게 지지되어 있는 이류효과질량 m_n 는 각각은 바닥에서 높이 h_n 에서 2개의 스프링으로 붙어 있다. 각각의 스프링 강성계수는 $k_n/2$ 이다.

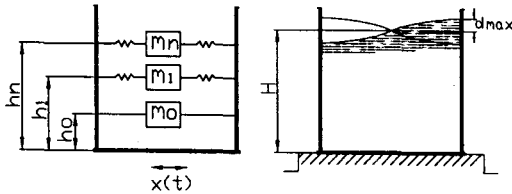


Fig. 2 Equivalent Model and Fluid Motion

만약 A_n 이 어떤 1자유도계의 의사가속도라면 탱크의 바닥 위 측판에서 전단력과 전도 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_0(t) = m_0 \ddot{x}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n A_n(t) \quad (6.1)$$

$$M_0(t) = m_0 h_0 \ddot{x}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n A_n(t) \quad (6.2)$$

여기서

$$A_n(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

충격효과질량 m_0 가 가속도 $\ddot{x}(t)$ 를 받을 때 생기는 힘, 즉 전단력 Q_0 와 모멘트 M_0 는

$$Q_0 = -m_0 \ddot{x}(t) \quad (6.3)$$

$$M_0 = -m_0 \ddot{x}(t) h_0 \quad (6.4)$$

이류효과질량 m_n 가 의사가속도 $A_n(t)$ 를 받을

때 생기는 힘, 즉 전단력 Q_n 와 모멘트 M_n 는

$$Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) m_n \quad (6.5)$$

$$M_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) m_n h_n \quad (6.6)$$

이다.

6.2 등가질량비

충격효과에서 충격질량 m_0 과 탱크 안의 액체 전체 질량 m_l 과의 등가질량비 $\frac{m_0}{m_l}$ 는 식(4.23)과 식(6.3)을 등식으로 놓으면

$$\frac{m_0}{m_l} = \frac{H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{[(2n-1)\pi]^3} \times \frac{I_1\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]}{I_1\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]} \quad (6.7)$$

이류효과 질량 m_n 과 액체전체 질량 m_l 과의 등가질량비 $\frac{m_n}{m_l}$ 는 식(5.23)과 식(6.5)을 등식으로 놓으면

$$\frac{m_n}{m_l} = \frac{a}{H} \frac{2}{\lambda_n(\lambda_n^2 - 1)} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (6.8)$$

의 관계식을 얻을 수 있다.

6.3 등가작용높이비

탱크 벽 하단의 충격효과에서 충격질량 작용높이 h_0 과 액체 높이 H 와의 등가작용높이비 $\frac{h_0}{H}$ 는 식(4.25)에 식(6.7)을 대입하고 식(6.4)과 등식으로 놓으면

$$\frac{h_0}{H} = 1 + \frac{m_l}{m_0} \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^{n+1}}{[(2n-1)\pi]^4} \frac{H}{a} \times \frac{I_1\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]}{I_1\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]} \right] \quad (6.9)$$

이류효과에서 이류질량 작용높이 h_n 과 액체 높이 H 와의 등가작용높이비 $\frac{h_n}{H}$ 는 식(5.24)과 식(6.6)에 식(6.8)을 대입하여 등식으로 놓으면

$$\frac{h_n}{H} = 1 - \frac{1}{\lambda_n} \frac{a}{H} \tanh\left(\frac{\lambda_n}{2} \frac{H}{a}\right) \quad (6.10)$$

6.4 API Standard 650의 설계모델과의 평가방법

API Standard 650, Appendix E에서는 등가작

용높이비 및 등가 질량비를 계산할 때 1차 모드만 고려하였는데 본 해석에서는 4차 모드까지 확대하여 고려했다. 두 모델 간의 평가방법은 Epstein이 사용한 방법과 같이 등가작용높이비와 등가질량비의 곱에 대한 각각의 비율로 평가했다. 상기 두 평가비율의 결과는 Fig. 3이다. 그리고 KS B 6225(강제석유저장탱크의 구조)의 내진 설계기준에 적용할 수 있도록 본 해석의 4차 모드까지의 합을 1차 모드에 상용하는 값으로 변환하여 개선시킨 등가질량비와 등가작용높이비는 Fig. 4 및 Fig. 5이다.

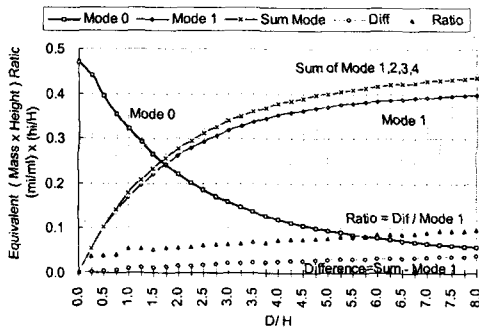


Fig. 3 Equivalent (Masses x Heights)

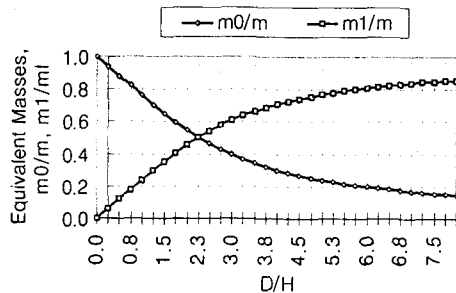


Fig. 4 Equivalent Masses

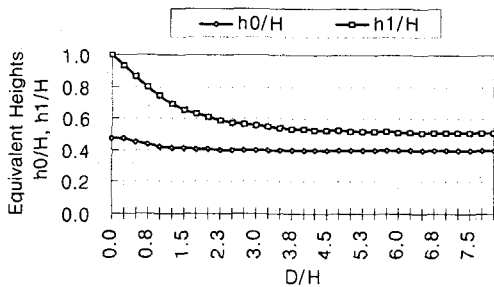


Fig. 5 Equivalent Heights

7. 결과 및 고찰

첫째, 1차 모드만 고려했을 경우 API Std. 650과 본 연구와의 차이점은 다음과 같다.

1. 본 연구의 충격형에서 등가질량비는 API Std. 650의 값과 본 연구의 값은 거의 일치한다. 반면에 등가작용높이비 $\frac{h_0}{H}$ 는 API Std. 650보다 약 6.7% 높게 나온다. 특이한 것은 API Std. 650에서는 탱크의 직경 대 높이의 비, $D/H \leq 1.5$ 에서는 등가작용높이비의 변화가 있고, 그 이상에서는 값이 0.375로 일정하다. 반면, 본 연구에서는 $D/H \leq 2.75$ 에서 충격효과의 변화가 있고 그 이상에서는 값이 0.4로 일정하다.

2. 이류효과에서는 등가질량비 $\frac{m_1}{m_i}$ 는 API Std. 650의 값과 본 해석에서의 값들과는 거의 일치한다.

둘째, 본 연구에서 4차 모드까지 고려했을 경우 전체 전단력은 API Std. 650보다 3%에서 약 9%정도 높게 나온다. 이는 Chen과 Barber²¹⁾에 의하면 충격력은 15%까지 큰 값을 가진다는 것과 비슷한 현상을 보여주고 있다.

8. 결론

수평 지진 가속도를 받고 있는 원통 수직 액체 저장 탱크의 액동압 거동에 대한 운동방정식을 해석한 결과 다음과 같은 특성을 알 수 있다.

1. 충격력은 지반운동의 가속도에 비례하며, 반면 이류력은 액체요동진동수에 의존한다.

2. 이류력은 액체의 요동에 의해 생기므로 충격력의 결과에 의해서 생긴 힘이다.

3. 유체의 수직방향의 변위 및 속도는 충격효과에서는 무시하리만큼 미소하여 액면요동의 효과는 무시되지만 이류효과에서는 자유액면의 요동진동수와 관계가 있고 탱크 벽면에서 최대값을 갖는다.

4. 본 해석에서 얻은 등가질량비와 등가작용높이비는 실제현상에 더 접근하므로 설계코드에 채용하는 것이 타당할 것으로 사료된다.

본 연구 결과는 다음 연구과제인 “강제 석유 저장 탱크(KS B 6225)의 내진 설계 기준 개선안”에 대한 연구에 적용될 것이다.

후기

본 연구는 현대엔지니어링(주) 기술연구소의 지원으로 수행된 것입니다. 관계자 여러분들에게 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Lydik S. Jacobsen, 1949, "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 39, pp. 189~204.
- 2) G. W. Housner, 1955, "Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers", Bulletin of The Seismological Society of America, pp. 15~35.
- 3) G. W. Housner, Aug.1963, Nuclear reactors and Earthquakes, TID-7024, U.S. Atomic Energy Commission, pp. 183~209, 367~390
- 4) H. I. Epstein, 1976, Seismic design of liquid storage tanks, J. Struct. Div., ASCE, 102, No. 9, pp. 1659~1673.
- 5) J. Y. Yang, 1976, "Dynamic Behavior of Fluid-Tank System", PhD thesis, Rice University, Houston, TX, USA.
- 6) R. S. Wozniak and W. W. Mitchell, 1978, "Basis of Seismic Design Provision for Welded Steel Oil Storage Tanks", Proceedings-Refining Department. Vol. 57, American Petroleum Institute, Washington, D.C., pp. 485~501.
- 7) Haroun, Nov. 1986, "Hydrodynamic Pressure on Tanks by Momentum Balance", Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 108, pp. 413~417.
- 8) API Standard 650, "Welded Steel Tanks for Oil Storage", 9th ed., Nov. 1998.
- 9) A. S. Veletsos, 1974, Seismic effects in flexible liquid storage tanks, Proc. of International Association for Earthquake Engineering, pp. 630~639.
- 10) A. S. Veletsos and J. Y. Young, 1977, Earthquake response of liquid storage, ASCE Technical Council on lifeline earthquake Engineering, pp. 255~365.
- 11) M. A. Haroun and G. W. Housner, 1981, Seismic design of liquid storage tanks, J. of the Mechanical Councils of ASCE, 107, pp. 191~207.
- 12) T. Balendra, K.K. Ang, P. Paramasivam and S. L. Lee, 1982, "Seismic Design of Flexible Cylindrical Liquid Storage Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, V. 10, pp. 477~496.
- 13) D. Fischer, 1979, Dynamic fluid effects in liquid-filled flexible cylindrical tanks, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 7, pp. 587~601.
- 14) 김동현, 1987, 원통형 저장탱크의 내진설계 연구, 한양대학교, 박사학위논문.
- 15) 김충호, 원통형 액체저장탱크의 동적해석에 관한 연구, 부산대학교, 박사학위논문.
- 16) Mohmmad. Aslam, William. G. Godden, and D. Theodore Scalise, 1979, "Earthquake Sloshing in Annular and Cylindrical Tanks, ASCE, J. of Engineering Mech. V. 103, No. EM3, pp. 371-389.
- 17) D. Fischer, 1979, "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Field Flexible Cylindrical Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 7, pp. 587~601.
- 18) D. F. Fisher, F. G. Rammerstofer, 1982, "The Stability of Liquid Filled Cylindrical Shells under Dynamic Loading, J. of Earthquake Engineering
- 19) 손병진, 1978, 유체역학, p. 517.
- 20) 鶴戶口, 1987, JIS石油貯槽, 日本規格協會, pp. 318~320.
- 21) P. C. Chen and R. B. Barber, 1976, "Seismic Design of Liquid Storage Tanks to Earthquakes", Int. Symp. Earthquake Structural Design, St. Louis, Missouri, pp. 1231-1247.