

# 내압이 작용하는 원통형용기에 대한 축방향 표면결합의 응력확대계수 계산방법 비교

문호림\* · 장창희\*

## Compariosn of Stress Intensity Factors for Longitudinal Semi-elliptical Surface Cracks in Cylindrical Pressure Vessels

H. R. Moonn and C. H. Jang

**Key Words:** Stress intensity factor(응력확대계수), Semi-elliptical surface crack(반타원 표면결합), longitudinal crack(축방향결합), Raju-Newman, Finite element method(유한요소법)

### Abstract

The object of this paper is to compare stress intensity factor that be calculated by Raju-Newman's equation, finite element method, and Vessel INTEgrity analysis INner flaws(VINTIN) program for longitudinal semi-elliptical cracks in cylindrical vessel under inner pressure. For this, three-dimensional finite-element analyses were performed to obtain the stress intensity factors for various surface cracks with  $t/R = 0.1$ . The finite element meshes were designed for various crack shapes with  $t/R$  of 0.1. The crack depth to thickness ratio,  $a/t$ , was set to 0.2 and 0.5 matching Raju-Newman's equation. The crack depth to length ratio,  $a/c$ , was set to 0.2 and 0.4 in the same way and 0.33 was added to extend the range of crack configuration. Finite Element Analyses(FEA) were performed using the commercial FEA program ABAQUS. The results showed that the Raju-Newman solutions were about 4-10% lower than FEA's using symmetric model of one-eighth of a vessel and close to those of FEA using symmetric model of one-fourth of a vessel. And VINTIN solutions were nearly equal to those of Raju-Newman.

### 1. 서 론

원통형용기에 존재하는 결함에 대한 건전성을 평가하기 위한 응력확대계수(stress intensity factor)의 계산법은 다양하다. 응력확대계수를 계산하는 방법은 크게 직접 계산법과 간접 계산법으로 나눌 수 있다. 직접 계산법은 결함의 존재를 포함

한 실린더의 모든 기하학적 형상을 모사해 3차원 유한요소모델을 만들고 내압 등 여러 하중 상태에 대한 응력확대계수를 계산한다. 간접 계산법은 ASME Sec. XI 및 Raju와 Newman이 제시한 식에 의한 계산 방법으로 결함의 존재를 무시하고 3차원 유한요소해석을 하여 구해진 응력분포를 이용하여 응력확대계수를 계산한다. Atluri와 Kathiresan[1], McGrowan과 Raymund[2], 그리고 Raju와 Newman[3] 등은 3차원 유한요소해석을 통하여 원통형용기의 다양한 결함형상에 대해 응력확대계수를 계산하였다. McGrowan과 Raymund는  $a/c$ 가 1/3,  $t/R$ 이 0.1인 형상의 내부표면결함에

\* 한국전력공사 전력연구원 원자력연구실

대해 유한요소해석을 통한 응력확대계수를 계산하였다. Raju와 Newman은  $t/R$ 이 각각 0.1과 0.25 일 때, 결합형상을 다양하게 변화시키면서 해석을 수행하였으며, 원통형용기의 내부에 존재하는 결합 외에 외부에 존재하는 결합에 대해서도 응력확대계수를 계산하였다. Raju와 Newman이 제시한 응력확대계수 계산 방법은 파괴역학분석에 일반적으로 가장 많이 사용되고 있다. Raju와 Newman은 1/8 모델(one-eighth of a vessel)을 사용하여 축방향 표면결함에 대한 유한요소해석을 수행하였고, 이 결과를 이용하여 보정계수를 산출하였다. 이때 유한요소해석에 사용된 자유도(degree of freedom)는 6,500개 정도였다. 내부표면결함의 경우, Raju와 Newman은 1/8 모델이 1/4 모델보다  $a/c=0$ 이고,  $t/R$ 이 0.1 일 때는 2%,  $t/R=0.25$  일 때는 4% 정도 응력확대계수가 높게 나옴을 밝힌 바 있다[3]. Wang과 Lambert는 1980 초에 계산된 Raju와 Newman의 유한요소해석과 응력확대계수 계산값을 현재의 유한요소해석 결과와 비교하였다[4]. Wang과 Lambert는 축방향 표면결함을 가지는 원통형용기에 대한 1/8모델로 유한요소해석을 수행하였다. 그 결과, Raju와 Newman이 제시한 보정계수를 이용한 응력확대계수 계산값보다 현재의 유한요소해석 결과값이 약 6-8%정도 높게 나왔다. Wang과 Lambert는 Raju와 Newman이 해석에 사용한 자유도보다 약 세배 많은 약 20,000개의 자유도를 사용하여 해석한데 그 이유가 있음을 밝혔다[4].

Raju와 Newman의 응력확대계수 계산값은 유한요소해석 결과 및 다른 응력확대계수 계산식과 비교할 때 일반적으로 널리 사용되고 있으나, 각각의 해석조건을 무시한 채 비교되고 있다. 즉, Raju와 Newman이 응력확대계수 계산을 위해 제시한 보정계수는 1/8 대칭모델로서 두 개의 결함을 가진 원통형용기의 해석으로 얻어진 값이므로 이 식과 유한요소해석 등을 통해 얻어진 응력확대계수와 비교할 때는 같은 조건으로 해석한 값과 비교함이 타당하다.

따라서, 본 논문에서는 Raju와 Newman의 가정과 동일하게 축방향 표면결함이 존재할 때, 원통형용기에 대해 1/8로 모델링하여 유한요소해석을 수행하여 응력확대계수를 계산하였고 이를 Raju와 Newman 계산값과 비교하였다. 또한, 원통형용기에 대해 1/4 모델에 대한 해석결과와 확률론적

파괴역학해석을 위해 개발된 VINTIN(Vessel INTEGRity analysis INner flaws)의 계산값[5]과도 서로 비교하였다.

## 2. 관련이론

### 2.1 Raju-Newman 식

Raju와 Newman은 원통용기 내벽과 외벽에 존재하는 여러 가지 표면결함에 대한 응력확대계수를 제시하였다. 벽두께와 용기의 반지름의 비인  $t/R$ 은 0.1과 0.25,  $a/t$ 는 0.2, 0.5, 0.8  $a/c$ 는 0.2, 0.4, 1.0의 다양한 결합형상에 대해 유한요소해석을 수행하였다.

응력확대계수는 결합선단까지의 응력분포를 사용하여 계산하였다. 벽두께 방향의 응력분포는 3차 다항식으로 곡선 적합하여 다음과 같이 구하였다.

$$\sigma = \sum_{j=0}^3 A_j x^j \quad (1)$$

여기서  $x$ 는 표면에서 결함깊이까지의 거리이다. 식 (1)에서 구한 응력분포를 이용하여 응력확대계수는 다음과 같이 계산하였다.

$$K_I = \sqrt{\pi a/Q} \sum_{j=0}^3 G_j A_j a^j \quad (2)$$

여기서

$G_j =$  influence coefficient ( $t/R, a/c, 2\phi/\pi$ )

$A_j =$  curve fit constant

$Q = 1 + 1.464(a/c)^{1.65}$

이다.

Raju와 Newman은 여러 가지 결합형상에 대해  $G_j$ 를 계산하였다.

### 2.2 $J$ -적분을 이용한 응력확대계수 계산

결함이 있는 원통형용기의 응력확대계수를 계산하기 위해서  $J$ -적분 값을 사용한다.  $J$ -적분 값은 Rice[10]에 의해 제안되었으며 다음과 같이 정의된다

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (3)$$

여기서,  $\Gamma$ 는 2차원 변위장내의 임의의 적분경로로서 반시계방향으로 설정되며,  $T_i$ 는  $\Gamma$ 상에서의 외향법선응력벡터,  $U_i$ 는 변위벡터,  $ds$ 는 적분경로상의 미소길이,  $W$ 는 아래의 식과 같이 정의되는 변형에너지밀도(strain energy density)이다.

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (4)$$

$J$ -적분은 수학적으로 적분경로에 독립적인 성질을 가지며, 또한 탄성영역에서는 에너지해방률  $G$ 와 같다. 한편,  $J$ -적분은 결함진전에 따른 포텐셜에너지의 변화로 다음과 같이 표시된다.

$$J = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right) \quad (5)$$

여기서,  $\Pi$ 는 포텐셜에너지를 나타낸다. 이러한  $J$ -적분 값을 유한요소해석을 이용해서 계산하는 방법에는 크게 선 적분법(line integral method), 가상결함진전법(virtual crack extension method), 영역적분법(domain integral method), 그리고 상당영역적분법(equivalent domain integral) 등이 있다.

본 논문에서는 응력확대계수 계산을 위해 현재까지 제시된 것 중에서 가장 정확하다고 알려진 Shih 등의 영역적분법에 의하여  $J$ -적분을 구한 후 응력확대계수를 계산하였다. 영역적분법에 의한  $J$ -적분 및 계산은 범용 유한요소 프로그램인 ABAQUS[7]를 사용하였다. ABAQUS해석에 의해 구해진  $J$ -적분 값과 응력확대계수와의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$K = \sqrt{EJ} \quad (\text{for plane stress}) \quad (6a)$$

$$K = \sqrt{\frac{EJ}{(1-\nu^2)}} \quad (\text{for plane strain}) \quad (6b)$$

### 3. 유한요소해석

#### 3.1 유한요소해석모델

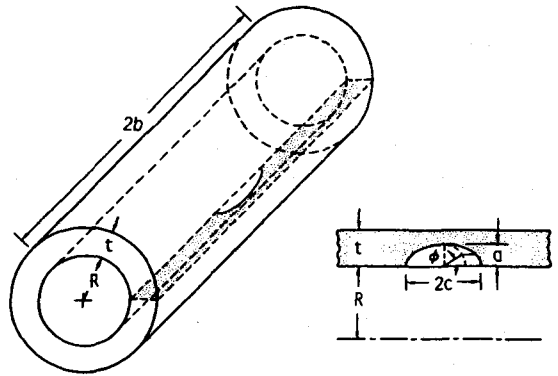


Fig. 1 Internal semi-elliptical surface crack in a cylinder.

해석에 사용된 모델은 내경 86 inch, 모재의 두께 8.5 inch인 원통형용기이다.

Fig. 1에 해석에 사용한 형상을 도시하였다. 원통형용기의 내벽에 길이  $2c$ , 깊이  $a$ 의 반타원 표면결함을 가진다. 벽두께 대 용기의 내경,  $t/R$ 은 0.1로 정하였다. 해석에 사용된 요소의 종류는 20-node quadratic iso-parametric quadratic brick elements with reduced integration 이다. Fig. 2와 3은 해석에 사용된 원통형용기에 대한 1/4 모델(symmetric model for one-fourth of a vessel, single crack)과 1/8 모델(symmetric model for one-eighth of a vessel, double crack)이다. 유한요소모델의 자유도는 두 모델 모두 28,935개 이다.

형상에서 주어진 대칭면을 따라 각각의 면은 고정경계조건으로 설정하였다. Fig. 2에서는 수평이동을 막기 위해 결함 반대편의 한 점을 구속하였다. 하중조건은 결함면을 제외한 내벽에 2250psi 작용시켰다. 해석에 사용한 모재의 재료물성치는 Table 1에 도시하였다. 내부표면결함형상은 Table 2와 같이 변화시켰다. Raju와 Newman과 동일하게 결함형상비( $a/c$ )는 0.2, 0.4, 결함깊이비( $a/t$ )는 0.2, 0.5로 설정하였다. 또한 결함형상비 1/3, 결함깊이비 0.06과 0.12에 대한 해석도 추가

Table 1 Material properties used for finite element analyses.

Material properties	
Youngs modulus E, ksi	Poissons ratio $\nu$
28,000	0.3

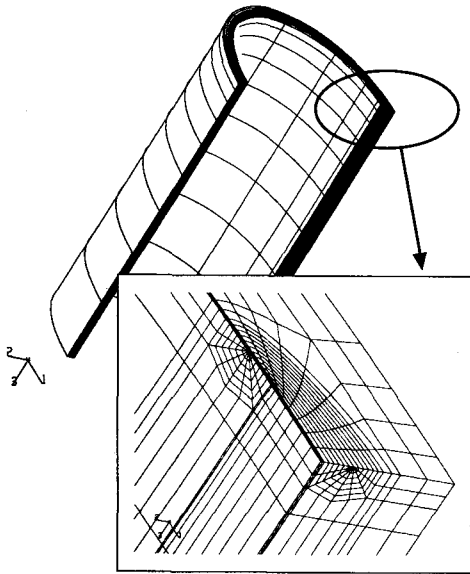


Fig. 2 Details of a typical finite element mesh for symmetric one-eighth of a vessel.

하였다. 결함형상비와 결함깊이비에 따른 총 6가지의 경우에 대해 각각 1/4과 1/8에 대한 유한요소모델을 작성하였다. 따라서 본 연구에서는 총 12가지 경우에 대한 3차원 유한요소모델을 구성하였다.

### 3.2 유한요소해석 결과

유한요소모델에 대해 영역적분법으로부터 얻어진  $J$ -적분 값으로부터 응력확대계수를 구하였

Table 2 The matrix for finite element analyses.

Ratio of crack depth to crack length( $a/c$ )	Case	Crack depth( $a$ ), inch	Crack length( $c$ ), inch
1/3	1	0.5	1.5
	2	1	3
1/5	3	1.7	8.5
	4	4.25	21.25
2/5	5	1.7	4.25
	6	4.25	10.625

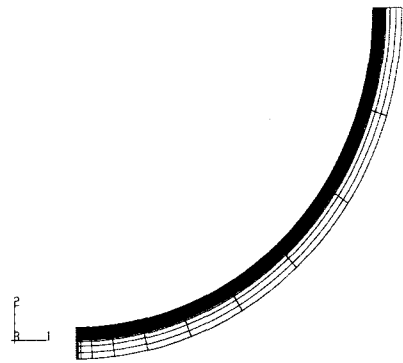


Fig. 3 Details of a typical finite element mesh for symmetric one-fourth of a vessel.

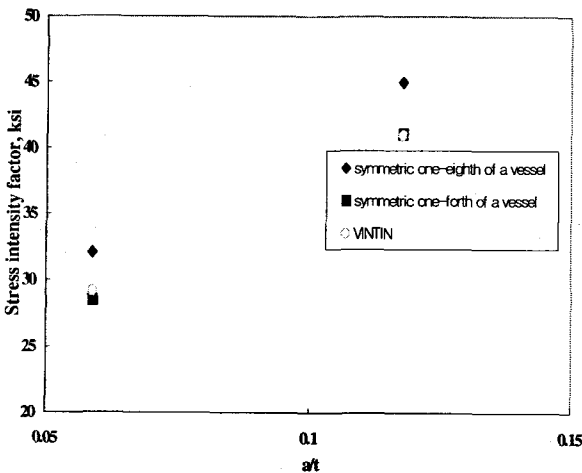
다. 내부표면결함에 대해 결함 최심점에서의  $J$ -적분 값으로부터 얻는 응력확대계수 값을 비교하였다. 주어진 해석모델에 대해  $J$ -적분은 결함선단 부근의 6개의 경로중 결함선단과 가장 가까운 1개의 값을 제외한 5개의 값을 평균하여 계산하였다. 5개의 경로에 의한  $J$ -적분 값은 1% 미만의 차이를 보였고, 이 값을 변환하여 응력확대계수를 구하였다. 최심점에서의 응력확대계수는 평면 변형률 조건으로 가정하여 구하였다. Table 3에 유한요소해석 결과를 나타내었다. 평면 변형률 조건에서의  $J$ 와  $K$ 의 관계는 식 (6b)와 같다. Raju-Newman의 유한요소모델은 원통에 대한 1/8모델이지만 자유도가 증가된 현재의 1/8 유한요소모델의 해석결과와 비교하면 현재의 3차원 유한요소해석 결과값이 약 4-10% 높다. 원통용기에 대한 1/4 유한요소모델과 1/8 유한요소모델을 이용한 해석결과는 한 개의 결함을 가진 1/4 유한요소모델이 대칭형으로 두 개의 결함을 가진 1/8 유한요소모델의 해석결과값보다 약 5-11% 낮다. 이런 이유로 Raju-Newman의 응력확대계수 계산값은 현재의 자유도가 증가된 원통용기에 대한 1/4 유한요소모델 해석결과값과 비슷하다. Fig. 4에서 6에 각각의 응력확대계수 계산방법에 대한 결과값을 나타내었다. 축방향 표면결함에 대해 Raju와 Newman의 보정계수를 이용하여 응력확대계수를 계산하는 VINTIN의 계산값은 Raju-Newman의 계산값보다는 약 1% 높고 원통형용기의 1/8 모델의 해석결과값보다는 2-10% 낮다.

**Table 3** Comparison of stress intensity factor  $K_{1/8}$ ,  $K_{1/4}$  from present finite element calculation, Raju-Newman's calculation R and VINTIN calculation V, for internal crack; percentage of difference between  $K_{1/4}$ , R, V and  $K_{1/8}$ .

Method Case	Numerical method, %		Present 3D-finite element method, %
	$(V-K_{1/8})/K_{1/8}$	$(R-K_{1/8})/K_{1/8}$	
1	-9.84	-	-11.02
2	-9.47	-	-8.67
3	-8.70	-9.85	-8.05
4	-6.60	-7.63	-6.29
5	-7.10	-8.19	-7.59
6	-2.42	-3.41	-4.51

#### 4. 결론

본 논문에서는 Raju-Newman의 가정과 동일하게 원통형용기에 대해 1/8로 모델링하여 유한요소해석을 수행하였다. 이 결과값을 원통형용기에 대한 1/4 모델의 유한요소해석 결과값과 Raju와 Newman의 계산식, 그리고 VINTIN의 계산값과 비교하였다.



**Fig. 4** Comparison of stress intensity factors, for  $a/c=1/3$ , internal crack.

1. Raju와 Newman의 응력확대계수 계산값은 내압이 작용하는 원통형용기에 대한 1/8모델을 사용하여 3차원 유한요소해석을 통해 얻어진 값이나 현재의 1/8 유한요소모델의 해석결과와는 4-10% 차이가 있다.
2. 원통형용기에 대한 1/4과 1/8 유한요소모델의 해석결과와는 약 5에서 11% 차이가 있다.
3. 두 개의 결함을 가진 원통형용기에 대한 1/8 유한요소모델을 이용한 Raju와 Newman의 응력확대계수 계산값은 현재의 1/4 유한요소모델의 해석결과와 유사하다.
4. VINTIN의 응력확대계수 계산값은 Raju와 Newman의 계산값보다 높으나 그 차이는 1% 이내이다.

#### 참고문헌

- (1) Atluri, S. N., and Kathiresan, K., 1977, "Outer and Inner Surface Flaws in Thick-Walled Pressure Vessels," *Transactions of the Fourth International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, San Francisco, Calif.
- (2) McGowan, J. J., and Raymund, M., 1979, "Stress Intensity Factor Solutions for Internal Longitudinal Semi-Elliptical Surface Flaws in a Cylinder under Arbitrary Loadings," *Fracture Mechanics*, ASTM STP 677, American Society for Testing and Materials, pp. 365~380.
- (3) Newman, J. C., and Raju, I. S., 1982, "Stress-Intensity for Internal Surface Cracks in Cylindrical Vessels," *ASME Journal of Pressure Vessel Technogy*, Vol. 104, pp. 293~298.
- (4) Wang, X., and Lambert, S. B., 1996, "Stress Intensity Factors and weight functions for longitudinal Semi-Elliptical Surface Cracks in This Pipes," *International Journal of Vessel & Piping*, pp. 75~87.
- (5) 장창희, 문호림, 정일석, 2001, "개선된 확률론적 파괴역학해석 전산코드 개발: VINTIN," 한국원자력학회 춘계학술발표회 논문집.

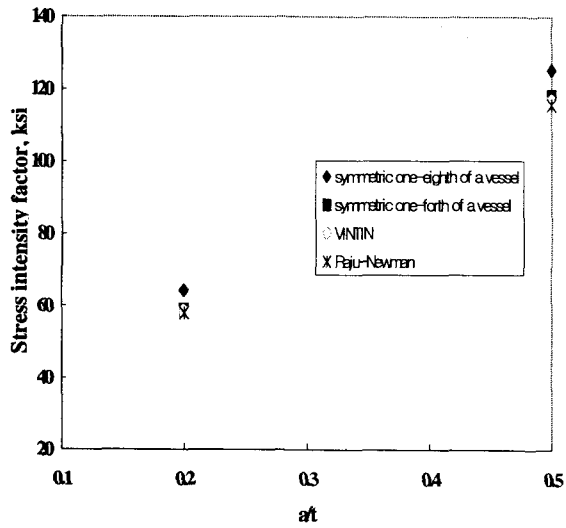


Fig. 5 Comparison of stress intensity factors, for  $a/c=1/5$ , internal crack.

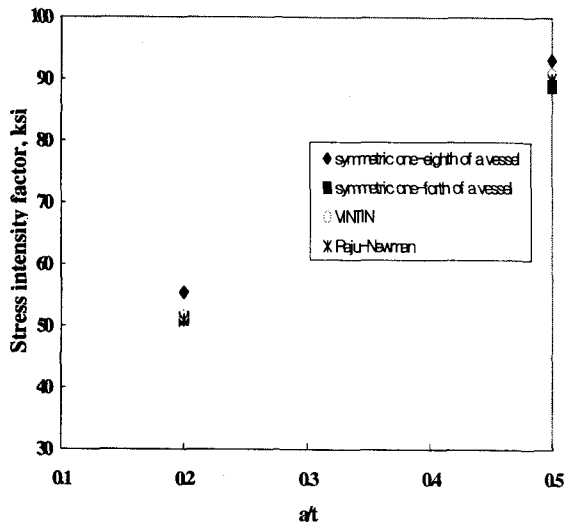


Fig. 6 Comparison of stress intensity factors, for  $a/c=2/5$ , internal crack.

- (6) Rice, J. R., 1968, "A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks," Journal of Applied Mechanics, pp. 379-386.
- (7) ABAQUS User's manual, 1999, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc..