

# 탄성체에 접합된 압전 스트립에서의 균열 전파 거동

권순만\*·최효승\*\*·이강용\*\*\*

## Crack Propagation Behavior in a Piezoelectric Strip Bonded to Elastic Materials

Soon Man Kwon\*, Hyo Seung Choi\*\* and Kang Yong Lee\*\*\*

**Key Words:** Moving Crack(전파균열), Piezoelectric Material(압전재료), Intensity Factor(세기계수), Dynamic Energy Release Rate(동적 에너지해방률), Integral Transform(적분변환)

### Abstract

In this paper, we consider the dynamic electromechanical behavior of an eccentric Yoffe permeable crack in a piezoelectric ceramic strip sandwiched between two elastic materials under the combined anti-plane mechanical shear and in-plane electrical loadings. Fourier transforms are used to reduce the problem to the solution of two pairs of dual integral equations, which are then expressed to a Fredholm integral equation of the second kind. The initial crack propagation orientation for PZT-5H piezoceramics is predicted by maximum energy release rate criterion.

### 기호설명

- $E_{ki}$  : 전기장 성분
- $D_{ki}$  : 전기변위 성분
- $G(v), G(v, \theta)$  : 동적 에너지해방률
- $K^D(v)$  : 동적 전기변위 세기계수
- $K^\sigma(v)$  : 동적 응력세기계수
- $M$  : Mach수
- $v$  : 균열전파속도
- $w_i$  : 변위 성분
- $\psi_i$  : Bleustein 함수
- $\theta_b$  : 분기각(branch angle)
- $\tau_{ij}$  : 응력 성분

### 1. 서론

지난 10여 년간 압전 재료(piezoelectric material)의 균열거동에 대한 관심의 증가로 인하여 수많은 연구가 수행되었다. 특히, 균열 선단에서의 균열전파속도 (crack propagation speed)에 대한 영향 연구는 기존 동적 파괴역학측면에서 많이 다루어지는 주제였다. 그러나, 압전 재료에서의 균열전파(crack propagation) 문제는 기계·전기적 연성 (electromechanical coupling) 문제로 인하여 그 연구가 거의 수행되어 있지 않은 상태이다.

압전 재료에 대한 Yoffe형 균열문제<sup>(1)</sup>를 고려하여 초기 균열 전파방향을 예측하고, 균열전파속도와 기계·전기적 상호작용과의 영향을 찾아내는 것이 본 연구의 목적이다.

Chen과 Yu<sup>(2)</sup>는 무한 압전 재료를 대상으로 Yoffe형 균열 연구를 최초로 수행하였다. 그들은 응력세기계수 (stress intensity factor : SIF) 및 전기변위 세기계수 (electric displacement intensity factor : EDIF)는 균열전파속도에 전혀 영향을 받

\* 회원, 연세대학교 기계공학과

\*\* 회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

\*\*\* 회원, 연세대학교 기계공학과

Email : fracture@yonsei.ac.kr

Tel & FAX : 02-2123-2813

지 않는다고 보고하였다. 이는 압전 재료의 전기적 물성을 무시한 탄성적 해의 경향과 부합하는 결과이다. 또한, Chen 등<sup>(3)</sup>은 이중 압전 재료의 경계면 Yoffe 균열문제를 연구하여 SIF 및 EDIF 모두가 균열전파속도에 의존한다는 결과를 보여주었다. 그러나, 위의 두 Yoffe형 균열 연구는 전기적 절연균열 경계조건 (electrical impermeable crack face condition)을 사용하였다는 결점을 가지고 있다. 즉, 그들이 사용한 경계조건이 부과되고 기계적 하중 없이 전기적 하중만이 작용할 경우, 에너지해방률(energy release rate : ERR)은 전기적 부호(하중의 방향)와는 상관없이 항상 음의 값을 가지게 된다. 이는 전기적 하중의 방향에 따라 균열성장이 진전 또는 정체(retarding)된다는 실험적 보고들<sup>(4-6)</sup>과 모순되는 결과이다.

즉, 압전 재료내의 균열은 어느 정도 미세한 전기적 전도성을 가지며, 특히, 면외전단(anti-plane shear)을 고려한 문제에서는 균열 개구 변위가 존재하지 않기 때문에 균열 상하 표면은 완벽한 접촉 상태가 된다. 따라서, 기존 대부분의 연구에서 적용되어 오던 전기적 절연균열 경계조건은 전기변위(electric displacement) 및 전기장(electric field)이 연속인 도전(permeable) 경계조건으로 교체되어야 한다<sup>(7)</sup>.

본 논문에서는 균열면 도전 경계조건을 사용하여 기계적 면외 전단하중과 전기적 면내(in-plane) 하중을 동시에 받으며 유한 두께의 스트립 및 반무한 탄성체 사이에 접합된 압전 세라믹 스트립에 존재하는 Yoffe형 편심균열(eccentric crack) 문제를 고려한다. 고려된 혼합경계치문제는 적분변환(integral transform)을 통하여 제 2종 Fredholm 적분방정식(Fredholm integral equation of the 2nd kind)의 해를 구하는 문제로 귀결된다. 이를 통해, 세기계수(intensity factor) 및 동적 에너지해방률(dynamic ERR : DERR)들이 결정되며, 균열전파속도 및 균열전파방향에 대한 기계·전기적 영향을 알아보기 위해 PZT-5H 압전 세라믹에 대해 수치적 해석을 수행한다.

## 2. 문제기술

Fig. 1과 같이 기계·전기적 복합하중을 받으며, 스트립과 반무한로 구성된 탄성체 사이에 접

합된 압전 스트립 내부에 존재하는 Yoffe형 등속전과 편심균열(길이  $2a$ , 균열 전파속도  $v$ )을 고려한다. 균열 중앙에 고정 직교 좌표계  $(X, Y, Z)$ 가 위치하며, 분극(poling)의 방향은  $Z$ -축이다. Fig.1과 같이 균일한 전단응력  $\tau_\infty$ 와 균일한 전기변위  $D_0$ 가 작용한다. 편의상 압전 스트립을 윗부분( $Y \geq 0$ , 두께  $h_1$ )과 아래 부분( $Y \leq 0$ , 두께  $h_2$ )의 두 영역으로 나누어 생각한다.

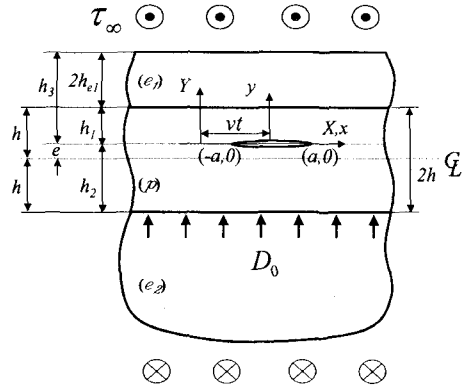


Fig. 1 A piezoelectric ceramic strip with an eccentric moving crack bonded to elastic materials : definition of geometry and loading

고려된 압전 재료의 경계치 문제는 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$u_{Xi}^{(p)} = u_{Yi}^{(p)} = 0, \quad u_{Zi}^{(p)} = w_i^{(p)}(X, Y, t), \quad (1)$$

$$E_{Xi} = E_{Xi}(X, Y, t), \\ E_{Yi} = E_{Yi}(X, Y, t), \quad (2)$$

$$E_{Zi} = 0, \\ u_X^{(e)} = u_Y^{(e)} = 0, \quad (3)$$

$$u_Z^{(e)} = w^{(e)}(X, Y, t), \quad (j=1,2),$$

여기서  $u_k$ 와  $E_k$  ( $k=X, Y, Z$ )는 변위와 전기장을, 상첨자  $p$ 와  $e_j$  ( $j=1,2$ )는 압전 스트립과 두 탄성 영역을, 하첨자  $i=1,2$ 는 압전 스트립

의 위와 아래 영역을 각각 의미한다.

X-축을 따라 등속으로 전파하는 균열문제를 풀기 위해 다음과 같이 Galilean 변환을 도입한다.

$$x = X - vt, \quad y = Y, \quad (4)$$

여기서  $(x, y, z)$ 는 전파 균열을 고려한 이동 좌표계이다.

변환된 좌표계에서 압전체와 탄성체의 지배방정식은 다음과 같다.

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_i^{(p)}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_i^{(p)}(x, y) = 0, \quad (5)$$

$$\beta_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w^{(e)}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w^{(e)}(x, y) = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \psi_i(x, y) = 0, \quad (7)$$

여기서

$$a \equiv \sqrt{1 - (v/C_T)^2}, \quad \beta_j \equiv \sqrt{1 - (v/C_{ej})^2},$$

$$\psi_i \equiv \phi_i - \frac{e_{15}}{d_{11}} w_i^{(p)}, \quad C_T = \sqrt{\mu/\rho}, \quad (8)$$

$$C_{ej} \equiv \sqrt{c_{44}^{(e)}/\rho^{(e)}}, \quad \mu = c_{44} + e_{15}^2/d_{11}.$$

$c_{44}$ ,  $d_{11}$ ,  $e_{15}$ ,  $\phi_i$ , 와  $c_{44}^{(e)}$ 는 균일한 전기장에서 측정된 압전 재료의 전단계수, 균일한 변형률에서 측정된 유전률 (dielectric permittivity), 압전상수 (piezoelectric constant), 전위 (electric potential), 탄성체의 전단계수이다. 또한  $\psi_i$ ,  $C_T$ ,  $C_{ej}$ ,  $\rho$  와  $\rho^{(e)}$ 는 Bleustein 함수<sup>(8)</sup>, 압전 재료의 횡파속도, 탄성체의 횡파속도, 압전 재료의 밀도 그리고 탄성체들의 밀도이다.

압전 재료 및 탄성체에서의  $w_i^{(p)}$ ,  $\psi_i$  와  $w^{(e)}$  구성관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{kzi}^{(p)} &= \mu w_{i,k}^{(p)} + e_{15} \psi_{i,k}, & D_{ki} &= -d_{11} \psi_{i,k}, \\ \tau_{kz}^{(e)} &= c_{44}^{(e)} w_{i,k}^{(e)}, & (k=x, y), & (i, j=1, 2), \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $\tau_{kzi}^{(p)}$ ,  $\tau_{kz}^{(e)}$  와  $D_{ki}$ 는 응력 및 전기변위 성분들이다.

전기적 연속 도전조건을 갖는 Yoffe형 균열 경

계 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_{yz1}^{(p)}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < a), \quad (10)$$

$$w_1^{(p)}(x, 0) = w_2^{(p)}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (11)$$

$$D_{y1}(x, 0^+) = D_{y2}(x, 0^-), \quad (0 \leq x < a), \quad (12)$$

$$E_{x1}(x, 0^+) = E_{x2}(x, 0^-), \quad (0 \leq x < a), \quad (13)$$

$$\phi_1(x, 0) = \phi_2(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (14)$$

$$\tau_{yz1}^{(p)}(x, 0) = \tau_{yz2}^{(p)}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (15)$$

$$D_{y1}(x, 0) = D_{y2}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (16)$$

$$\tau_{yz1}^{(p)}(x, h_1) = \tau_{yz1}^{(e_1)}(x, h_1), \quad (17)$$

$$\tau_{yz2}^{(p)}(x, -h_2) = \tau_{yz2}^{(e_2)}(x, -h_2), \quad (18)$$

$$w_1^{(p)}(x, h_1) = w_1^{(e_1)}(x, h_1), \quad (19)$$

$$w_2^{(p)}(x, -h_2) = w_2^{(e_2)}(x, -h_2), \quad (20)$$

$$\tau_{yz1}^{(e_1)}(x, h_3) = \tau_{yz2}^{(e_2)}(x, -\infty) = \tau_\infty, \quad (21)$$

$$D_{y1}(x, h_1) = D_{y2}(x, -h_2) = D_0. \quad (22)$$

### 3. 적분변환을 이용한 해법

#### 3.1 적분변환

주어진 문제의 대칭성을 고려하여, 식 (5)-(7)에 Fourier cosine 변환을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} w_i^{(p)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_{1i}(s) e^{sy} + A_{2i}(s) e^{-sy}] \cos(sx) ds \\ &+ a_0 y, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [B_{1i}(s) e^{sy} + B_{2i}(s) e^{-sy}] \cos(sx) ds - b_0 y, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} w^{(e)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_1(s) e^{sb_1 y} + C_2(s) e^{-sb_1 y}] \cos(sx) ds \\ &+ c_0 y + e_{01}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} w^{(e_2)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D_1(s) e^{sb_2 y} \cos(sx) ds + d_0 y + e_{02}. \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $A_{ji}(s)$ ,  $B_{ji}(s)$ ,  $C_i(s)$ 와  $D_i(s)$ 는 결정되어야 할 미지 함수이다. 또한,  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $d_0$ 와  $e_{0i}$ 는 주어진 하중조건에 의해 결정되는 상수들이다.

해석의 편의를 위하여 다음과 같이  $D(s)$ ,  $E(s)$ 를 정의한다.

$$A_{11}(s) - A_{12}(s) = A_{21}(s) - A_{22}(s) \equiv D(s), \quad (27)$$

$$B_{11}(s) - B_{12}(s) = B_{21}(s) - B_{22}(s) \equiv E(s). \quad (28)$$

식 (27), (28)과 혼합 경계조건 식(10)-(14)를 이용하여 다음과 같은 두 쌍의 혼합적분 방정식(dual integral equation)을 얻을 수 있다.

$$\int_0^\infty s f(s) D(s) \cos(sx) ds = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_\infty}{\gamma}, \quad (0 \leq x < a), \quad (29)$$

$$\int_0^\infty D(s) \cos(sx) ds = 0, \quad (a \leq x < \infty), \quad (30)$$

$$\int_0^\infty s \left[ \frac{e_{15}}{d_{11}} D(s) + E(s) \right] \sin(sx) ds = 0, \quad (0 \leq x < a), \quad (31)$$

$$\int_0^\infty \left[ \frac{e_{15}}{d_{11}} D(s) + E(s) \right] \cos(sx) ds = 0, \quad (a \leq x < \infty), \quad (32)$$

여기서

$$f(s) = \frac{1}{\gamma} \left[ \mu \alpha Q(s) - \frac{e_{15}^2}{d_{11}} R(s) \right], \quad (33)$$

$$Q(s) = \frac{(q_1^- - q_1^+ e^{-2sah_1})(q_2^+ - q_2^- e^{-2sah_2})}{q_1^- q_2^+ - q_1^+ q_2^- e^{-4sah}}, \quad (34a)$$

$$R(s) = \frac{(1 - e^{-2sh_1})(1 - e^{-2sh_2})}{1 - e^{-4sh}}, \quad (34b)$$

$$q_j^\mp = \mu \alpha \mp c_{44}^{(e)} \beta_j \lambda, \quad (j = 1, 2) \quad (35)$$

$$\gamma = \mu \alpha - e_{15}^2 / d_{11}, \quad (36a)$$

$$\lambda = \frac{e^{s\beta_1 h_1} - e^{s\beta_1(2h_3 - h_1)}}{e^{s\beta_1 h_1} + e^{s\beta_1(2h_3 - h_1)}}. \quad (36b)$$

식(31)과 (32)로부터  $D(s)$ 와  $E(s)$ 의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E(s) = -\frac{e_{15}}{d_{11}} D(s). \quad (37)$$

식 (29)와 (30)을 풀기 위해 다음과 같이  $D(s)$ 를 또 다른 보조함수인  $\Omega(\xi)$ 로 표현한다.

$$D(s) = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_\infty a^2}{\gamma} \int_0^1 \sqrt{\xi} \Omega(\xi) J_0(sa\xi) d\xi, \quad (38)$$

여기서  $J_0(sa\xi)$ 는 제 1종 0차 Bessel 함수이다.

식 (38)을 식 (29)와 (30)에 대입하면, 다음과 같은 제 2종 Fredholm 적분방정식에 의해  $\Omega(\xi)$ 를 결정할 수 있다.

$$\Omega(\xi) + \int_0^1 L(\xi, \eta) \Omega(\eta) d\eta = \sqrt{\xi}, \quad (39)$$

여기서

$$L(\xi, \eta) = \sqrt{\xi\eta} \int_0^\infty s [f(s/a) - 1] J_0(s\eta) J_0(s\xi) ds. \quad (40)$$

언어진 식 (39)는 Gauss 수치적분을 이용하여 수치 계산할 수 있으며, 몇 가지의 특별한 문제들을 고려함으로써 그 타당성을 검증할 수 있다. 우선,  $\nu = 0$ 인 경우 상응하는 모델에 대한 정적인 해를 얻을 수 있다.  $\nu = 0$ ,  $h_{el} \rightarrow \infty$  및 두 탄성체가 동일 재질인 경우, Shin과 Lee<sup>(9)</sup>의 결과와 동일하게 된다. 접합되어 있는 두 탄성체를 무시하고 압전 스트립내의 균열 편심을 배제하면 Kwon 등<sup>(10)</sup>의 결과와 일치한다. 또, Shin과 Lee<sup>(9)</sup>의 결과에서  $e = 0$ 이면 Narita 등<sup>(11)</sup>이 제시한 모델의 결과를 얻을 수 있고,  $e = 0$ 이며 두 무한 탄성체가 동일 재질이고  $e_{15} = 0$ 일 경우, Sih<sup>(12)</sup>의 결과와도 일치한다.

### 3.2 세기계수 및 에너지해방률

동적 응력세기계수 (dynamic SIF : DSIF)  $K^D(\nu)$  및 동적 전기변위 세기계수 (dynamic EDIF : DEDIF)  $K^D(\nu)$ 는 다음과 같이 정의되어지며 결정된다<sup>(13)</sup>.

$$K^\sigma(v) \equiv \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{yz}(x, 0) = \tau_{\infty} \sqrt{\pi a} \Omega(1),$$

$$K^D(v) \equiv \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} D_y(x, 0) = e_{15} K^\sigma / \gamma. \quad (41)$$

또, 응력, 변위 전기장 관계로부터 다음의 동적 에너지해방률(DERR)을 결정할 수 있다.

$$G(v) = \frac{\mu a [K^\sigma(v)]^2}{2\gamma^2} - \frac{[K^D(v)]^2}{2d_{11}} \quad (42)$$

$$= \frac{[K^\sigma(v)]^2}{2\gamma}.$$

즉, 압전재료에서 의미있는 파괴역학적 매개변수인 DERR은 DSIF의 향으로 표현되며, DERR, DSIF 및 DEDIF는 균열전파속도, 기하학적 형상 및 물성치에 의존함을 알 수 있다.

#### 4. 결과 고찰

먼저, 두 탄성체를 무시하고  $h \rightarrow \infty$ 일 때, 즉, 무한 압전체를 고려하여 보자. 이 경우, 식 (39)의  $\Omega(1) \rightarrow 1$ 이므로 DSIF 및 DEDIF는 다음과 같다.

$$K^\sigma(v) = \tau_{\infty} \sqrt{\pi a}, \quad K^D(v) = e_{15} K^\sigma / \gamma. \quad (43)$$

즉, 무한 압전체에서의 DSIF는 균열전파속도에 무관하나, DERR은 균열전파속도에 의존하며 균열전파속도가 증가하면 DERR도 증가함을 알 수 있다. 이는 탄성의 결과<sup>(14)</sup>와 동일한 경향이다. 또, DSIF의 결과는 Chen과 Yu<sup>(2)</sup>의 결과와도 일치하는 것이다. 그렇지만, DEDIF는 균열전파속도 및 물성치에 의존적이며 이는 Chen과 Yu<sup>(2)</sup>의 결과와 상반되는 결론이다. 이러한 차이는 서론에서도 언급한 바와 같이 전기적 균열면 경계조건의 차이에서 기인된다.

균열전파속도의 영향을 고찰하기 위해 Mach수,  $M = v/C_T$ 을 고려하여 식 (42)를 살펴보면,  $0 < M < M_d$ 일 때 DERR은 양의 값을 가지며, Mach수  $M > M_d$ 인 경우 기계·전기적 상호작용에 의하여 균열정체 또는 닫힘(closure) 현상이 발생할 수도 있음을 보여준다. 여기서

$M_d = \sqrt{c_{44}(\mu + e_{15}^2/d_{11})} / \mu$ . PZT-5H 압전 세라믹의 경우,  $M_d = 0.936$ 이다.

본 논문에서는 초기 균열진전방향을 예측하기 위하여 최대 에너지해방률 판정식(maximum ERR criterion)을 고려하였고,  $(r, \theta)$ 의 극좌표계에서 DERR을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(v, \theta) = G(v)F(\theta), \quad (44)$$

여기서

$$F(\theta) = \frac{1}{\gamma} \left[ \mu a \Theta^2(\theta) - \frac{e_{15}^2}{d_{11}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (45a)$$

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{\gamma} \left[ \mu a R(\theta) \cos \theta \cos \frac{\theta_1}{2} + \mu R(\theta) \sin \theta \sin \frac{\theta_1}{2} - \frac{e_{15}^2}{d_{11}} \cos \frac{\theta}{2} \right], \quad (45b)$$

$$R(\theta) = \sqrt[4]{\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + a^2 \tan^2 \theta}}, \quad (45c)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(a \tan \theta). \quad (45d)$$

식 (45a)의  $F(\theta)$ 는 균열길이에 무관함을 알 수 있고, 이를 Fig.2에  $\theta$ 에 따라 도시하였다.

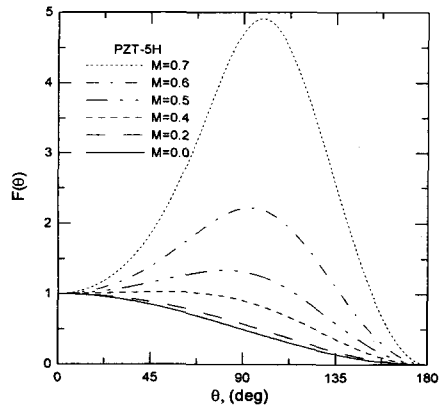


Fig. 2  $F(\theta)$  versus  $\theta$

$F(\theta)$ 의 극치값(extreme value)을 계산함으로써, 임계 Mach수,  $M_c$ 를 구할 수 있으며, PZT-5H 압전 세라믹의 경우  $M_c = 0.36$ 이다. 즉,  $M \leq M_c$ 일 경우,  $\theta = 0^\circ$ 에서 최대 DERR값을 가지므로 초기

균열전파방향은 원래 균열방향을 따라 진전될 것이라고 예측할 수 있다. 또,  $M > M_c$  일 경우에는 Fig.2에서 알 수 있듯이, 각 Mach수에 따라 DERR을 최대가 되게 하는 각각의 분기각(branch angle),  $\theta_b$ 가 존재하고 이 분기각 방향으로 균열이 진전될 것이라고 예측할 수 있다.

## 5. 결론

두 등방성 탄성체 사이에 접합된 가로 등방성 (transversely isotropic) 압전 세라믹 스트립내의 Griffith 편심 균열이 기계적 면의 전단하중과 면내 전기적 하중이 복합적으로 받을 때 등속으로 전파하는 Yoffe형 문제를 적분변환 방법을 통하여 해석하였다. 기계·전기적 상호영향의 효과를 설명하기 위해, 기존 선형탄성 파괴역학의 개념을 확장하였으며, 그 결과들을 동적 세기계수들에 의해 표현하였다. 동적 세기계수 및 동적 에너지해방률은 균열전파속도에 의존하며, 최대 에너지해방률 판정식에 의하여 분기각을 결정할 수 있었으며 초기균열 전파방향을 예측할 수 있었다. PZT-5H 압전 세라믹의 경우, 횡파 속도의 약 0.36 배의 임계속도가 존재하며, 이 임계속도 이상으로 균열이 전파될 경우, 균열 경로가 굽어지거나 분기되는 경향을 보이는 반면에 임계속도 이하에서의 초기 균열전파는 균열방향을 따라 전파될 것이라고 예상된다.

## 후기

본 논문은 한국학술진흥재단 두뇌한국 21 사업의 연구비 지원으로 이루어진 것으로써, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

## 참고문헌

(1) Yoffe, E.H., 1951, The Moving Griffith Crack. *Philosophical Magazine* 42, 739~750.  
 (2) Chen, Z.T., Yu, S.W., 1997, Antiplane Yoffe Crack Problem in Piezoelectric Materials. *Int.*

*J. Fract.* 84, L41~L45.  
 (3) Chen, Z.T., Karihaloo, B.L., Yu, S.W., 1998, A Griffith Crack Moving Along the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *Int. J. Fract.* 91, 197~203.  
 (4) Tobin, A.G., Pak, Y.E., 1993, Effect of Electric Field on Fracture Behavior of PZT Ceramics. *Proc. SPIE, Smart Structures and Materials* 1916, 78~86.  
 (5) Park, S.B., Sun, C.T., 1995, Effect of Electric Field on Fracture of Piezoelectric Ceramics. *Int. J. Fract.* 70, 203~216.  
 (6) Park, S.B., Sun, C.T., 1995, Fracture Criteria for Piezoelectric Ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.* 78, 1475-1480.  
 (7) Jackson, J.D., 1975, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York.  
 (8) Bleustein, J.L., 1968, A New Surface Wave in Piezoelectric Materials. *Appl. Phys. Lett.* 13, 412~413.  
 (9) Shin, J.W., Lee, K.Y., 2000, Eccentric Crack in a Piezoelectric Strip Bonded to Half Planes. *European Journal of Mechanics A/Solids* 19, 989~997.  
 (10) Kwon, J.H., Lee, K.Y., Kwon, S.M., 2000, Moving Crack in a Piezoelectric Ceramic Strip under Anti-plane Shear Loading. *Mech. Res. Commun.* 27, 327~332.  
 (11) Narita, F., Shindo, Y., Watanabe, K., 1999, Anti-plane Shear Crack in a Piezoelectric Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces. *JSME Int. J. Ser. A.* 42, 66~72.  
 (12) Sih, G., Chen, E.P., 1981, *Mechanics of Fracture 6, Cracks in Composite Materials*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.  
 (13) Kwon, S.M., Lee, K.Y., 2000, Analysis of Stress and Electric Fields in a Rectangular Piezoelectric Body with a Center Crack under Anti-plane Shear Loading. *Int. J. Solids Struct.* 37, 4859~4869.  
 (14) Freund, L.B., 1990, *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge Press, Cambridge.