A Study on Simultaneous Optimization for Robust Design

Yong Man Kwon[1)]

Abstract

In the Taguchi parameter design, the product-array approach using orthogonal arrays is mainly used. However, it often requires an excessive number of experiments. An alternative approach, which is called the combined-array approach, was suggested by Welch et. al. (1990) and studied by others. In these studies, only single response variable was considered. We propose how to simultaneously optimize multiple responses when there are correlations among responses, and when we use the combined-array approach to assign control and noise factors.

1. 서론

다구찌 품질공학(Taguchi [1986, 1987])은 제품의 설계단계에서부터 품질관리의 전 분야에 걸쳐서 품질을 개선하는데 큰 기여를 하였다. 이전의 실험계획법에서는 단지 품질특성치의 평균를 개선하는데 초점을 두고 최적조건을 찾는 경향이 있었으나 다구찌 품질공학에서는 품질특성의 평균뿐만 아니라 변동(분산 혹은 표준편차)을 가능한 줄이는 것을 목적으로 한다는 점에서 차이가 있다. 다구찌 파라미터 설계에서 직교배열표를 이용한 교차배열(product array)은 제어인자와 잡음인자의 모든 교호작용을 고려한 실험배치를 하여 자료분석을 하였다. 교차배열에서 잡음인자는 품질특성치의 품질변동을 유발시키는 역할을 함으로써 변동에 둔감하면서 동시에 품질특성치의 평균을 목표치에 접근하는 제어인자의 최적조건을 찾을 수 있는 로버스트 설계를 가능하게 한다.

파라미터 설계에서 교차배열은 제어인자와 잡음인자의 모든 교호작용을 고려함으로써 실험수가 지나치게 많을 뿐 아니라 축차실험을 고려하지 않는 등 많은 단점을 가지고 있다. 따라서 실험수를 줄일 수 있을 뿐 아니라 기존의 잘 정립된 실험계획법 이론을 이용한 대체방안이 연구되고 있다. 그 중에서 통합배열접근법(combined array approach)이 Welch, Yu, Kang, 와 Sacks(1990)에 의해 처음으로 제안되었다. 그 이후로 Vining와 Myers (1990), Box와 Jones(1992)등에 의하여 연구되었다. 통합배열이란 잡음인자를 제어인자와 같이 하나의 실험배열에 배치하는 실험방법을 말한다.

대부분의 실험계획에서는 반응변수(품질특성 혹은 종속변수)가 한 개인 경우 설계인자(설계변수

1) Associate Professor, Department of Computer Science and Statistics, Chosun University, Kwangju, 501-759, KOREA.
E-mail : ymkwon@mail.chosun.ac.kr

혹은 독립변수)들의 최적조건을 찾고 있으나 실제 실무에서는 어떤 경우의 실험계획에 관한 문제이든 동시에 고려하여야 할 반응변수가 여러 개인 경우 즉, 다중 반응(multiple responses)인 경우가 대부분이다. 다중 반응에서 설계인자의 최적조건을 찾는 방안은 Derringer와 Suich(1980), Khuri와 Conlon(1981)등에 의하여 이루어졌다. Derringer와 Suich(1980)는 기대함수를 이용한 다특성 동시 최적화 방안을 그리고 Khuri와 Conlon(1981)은 거리함수(distance function)을 이용한 다중 반응 동시 최적화 방안을 제시하였다. 그러나 앞서 제시된 방안들은 품질변동을 고려하지 않은 동시 최적화 방안이다.

본 논문의 목적은 Derringer와 Suich(1980)가 제시한 기대함수를 이용하여 통합배열에 의한 실험배치에서 로버스트 설계를 위한 다중 반응 동시 최적화 방안을 제안하고 다구찌 방법론과 비교하여 새로이 제안한 방법이 보다 효율적임을 보이는데 있다.

2. 로버스트 설계를 위한 다중 반응 동시 최적화

2.1 다변량선형모형에서 추정된 평균모형과 분산모형

반응변수 y는 제어인자들($\underline{x}$)과 잡음인자들($\underline{z}$)에 의해 값이 정해진다고 가정하자. 제어인자들과 잡음인자들을 각 각 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_l)'$와 $\underline{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_m)'$로 나타내기로 하자. 실험수는 N이고 반응변수들의 개수를 r 이라고 하면 i 번째 반응변수의 이차회귀모형은 다음과 같다.

$$y_i(\underline{x},\underline{z})=\beta_{i0}+\underline{x}'\ \underline{\beta}_i+\underline{x}'B_i\underline{x}+\underline{z}'R_i\underline{z}+\underline{z}'\ \underline{\gamma}_i+\underline{z}'D_i\underline{x}+\varepsilon_i,\qquad i=1,2,\cdots,r, \tag{2.1}$$

여기서 $\underline{\beta}_i$는 $l\times 1$, $\underline{\gamma}_i$는 $m\times 1$, $B_i' = B_i$는 $l\times l$, $R_i' = R_i$는 $m\times m$, D_i는 $m\times l$인 모집단의 회귀계수들의 벡터 혹은 행렬이고 ε_i는 i번째 반응변수에서의 실험오차이다. 식(2.1)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\underline{y}_i=X\ \underline{\theta}_i+\ \underline{\varepsilon}_i,\qquad i=1,2,\cdots,r, \tag{2.2}$$

여기서 $\underline{y}_i$는 i 번째 반응변수에서의 측정치의 $N\times 1$ 벡터이고, X는 $N\times p$ 행렬인 계획행렬(design matrix)이고 계수는 p, i번째 반응변수에서의 $\underline{\theta}_i$ 는 $p\times 1$인 모집단의 회귀계수들의 벡터이고 $\underline{\varepsilon}_i$는 실험오차의 벡터이다. 식 (2.2)와 관련된 가정으로

$$E(\ \underline{\varepsilon}_i)=\underline{0},\ Var(\ \underline{\varepsilon}_i)=\sigma_{ii}I_N,\ Cov(\ \underline{\varepsilon}_i,\ \underline{\varepsilon}_j)=\sigma_{ij}I_N\qquad i,j=1,2,\cdots,r,\quad i\neq j$$

이 성립된다고 하자. Σ는 $r\times r$행렬이고 (i,j)번째 원소는 σ_{ij}이다. Σ 의 불편추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\Sigma}=Y'\,[I_N-X(X'X)^{-1}X']Y\,/\,(N-p)\quad ,$$

여기서 $Y=(\underline{y}_1,\underline{y}_2,\cdots,\ \underline{y}_r)$이고 I_N은 모든 원소가 1인 $N\times N$ 행렬이다. 식 (2.2)에서 주어진 r개의 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{y}=\begin{pmatrix}\underline{y}_1\\ \underline{y}_2\\ \vdots\\ \underline{y}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\theta}_1\\ \underline{\theta}_2\\ \vdots\\ \underline{\theta}_r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underline{\varepsilon}_1\\ \underline{\varepsilon}_2\\ \vdots\\ \underline{\varepsilon}_r\end{pmatrix}=Z\underline{\theta}+\underline{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

여기서 $\underline{y}$은 $rN\times 1$, Z는 $rN\times rp$, $\underline{\theta}$는 $rp\times 1$ 그리고 $\underline{\varepsilon}$는 $rN\times 1$이다. 한편 $\underline{\varepsilon}$의 분산-공분산행렬은 다음과 같다.

$$Var(\underline{\varepsilon})=\Sigma\bigotimes I=\Omega.$$

식(2.3)에서 $\underline{\theta}$의 최량선형 불편추정량(best linear unbiased estimator(BLUE))은

$$\widehat{\underline{\theta}}=(Z'\Omega^{-1}Z)^{-1}(Z'\Omega^{-1}\underline{y})=(Z'Z)^{-1}Z'\underline{y}$$

이다. 따라서, $\underline{\theta}$의 BLUE는 $\widehat{\underline{\theta}}=(\widehat{\underline{\theta}_1}', \widehat{\underline{\theta}_2}', \cdots, \widehat{\underline{\theta}_r}')'$이다. 여기서 $\widehat{\underline{\theta}}_i=(X'X)^{-1}X'\underline{y}_i$는 i번째 반응함수의 회귀계수에 대한 최소제곱추정량이다(Huang (1970, p.188)을 보시오). $\widehat{\underline{\theta}}_i$의 분산-공분산행렬은 다음과 같다.

$$Var(\widehat{\underline{\theta}})=(Z'\Omega^{-1}Z)^{-1}=(X'X)^{-1}\Sigma$$

i번째 품질특성의 추정식은 다음과 같다.

$$\widehat{y}_i(\underline{x},\underline{z})=\underline{g}'(\underline{x},\underline{z})\widehat{\underline{\theta}}_i, \qquad i=1,2,\cdots,r, \tag{2.4}$$

여기서 $\underline{g}'(\underline{x},\underline{z})$는 $(\underline{x},\underline{z})$점에서 계산되어진 X행렬의 행과 같은 형태의 벡터이다. 식(2.4)로부터 다음이 성립된다.

$$Var[\widehat{y}_i(\underline{x},\underline{z})]=\underline{g}'(\underline{x},\underline{z})(X'X)^{-1}\underline{g}(\underline{x},\underline{z})\sigma_{ii}, \quad i=1,2,\cdots,r,$$

$$Cov[\widehat{y}_i(\underline{x},\underline{z}),\widehat{y}_j(\underline{x},\underline{z})]=\underline{g}'(\underline{x},\underline{z})(X'X)^{-1}\underline{g}(\underline{x},\underline{z})\sigma_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,r;i\neq j.$$

따라서,

$$Var[\widehat{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})]=\underline{g}'(\underline{x},\underline{z})(X'X)^{-1}\underline{g}(\underline{x},\underline{z})\Sigma, \quad i=1,2,\cdots,r,$$

여기서 $\widehat{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})=(\hat{y}_1(\underline{x},\underline{z}), \hat{y}_2(\underline{x},\underline{z}),\cdots, \hat{y}_r(\underline{x},\underline{z}))'$은 $(\underline{x},\underline{z})$점에서 추정된 품질특성의 벡터이다. $Var[\widehat{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})]$의 불편추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{Var}[\widehat{\underline{y}}(\underline{x},\underline{z})]=g'(\underline{x},\underline{z})(X'X)^{-1}g(\underline{x},\underline{z})\hat{\Sigma}.$$

식(2.4)는 다시 다음과 같은 적합된 2차회귀모형으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{y}_i(\underline{x},\underline{z})=b_{i0}+\underline{x}'\underline{b}_i+\underline{x}'\hat{B}_i\underline{x}+\underline{z}'\hat{R}_i\underline{z}+\underline{z}'\underline{r}_i+\underline{z}'\hat{D}_i\underline{x}, \quad i=1,2,\cdots,r. \tag{2.5}$$

식(2.5)에 대하여 Box와 Jones(1992)는 통합배열접근법에서 제어인자와 잡음인자의 함수로 되어있는 하나의 반응함수에서 평균모형과 분산모형을 분리하였다. 그러나 본 논문에서는 반응변수가 여러 개인 경우에 추정된 평균모형과 분산모형을 정의하기로 한다. 잡음인자들 $\underline{z}$는 실험할 때는 제어할 수 있으나 실제로는 제어할 수 없는 확률변수들이다. $\underline{z}$에 관한 다른 지식이 없는 경우 흥미영역 R_z에서 균일분포(uniform distribution)를 가정하자. 우리는 잡음인자 $\underline{z}$의 범위에서의 어떤 $\underline{x}$에서 평균을 $\widehat{m_i}(\underline{x})$로 나타내기로 하고 이를 "$i$번째 추정된 평균모형"이라 하면 다음과 같다.

$$\widehat{m}_i(\underline{x})=\int_{R_z}\hat{y}_i(\underline{x},\underline{z})p(\underline{z})d\underline{z}, \quad i=1,2,\cdots,r,$$

여기서 $p(\underline{z})$는 $\underline{z}$의 확률밀도함수이며 $\underline{z}$는 $R_z(\,-1 \le z \le 1\,)$에서 균일분포를 한다. Box와 Jones(1992)는 평균모형식은 다음과 같다고 하였다.

$$\widehat{m}_i(\underline{x}) = b_{i0} + \underline{x}'\ \underline{b}_i + \underline{x}'\ \widehat{B}_i \underline{x} + (tr\ \widehat{R}_i)/3, \quad i = 1,2,\cdots,r, \tag{2.6}$$

여기서 $tr(\widehat{R}_i)$는 행렬 $\widehat{R}_i$의 대각선 원소들의 합이다. 한편, 우리는 i번째 반응변수의 추정된 평균모형에 대한 평균제곱변동(mean square variation)을 $\hat{v}_i(\underline{x})$라 하면 다음과 같다.

$$\hat{v}_i(\underline{x}) = \int_{R_z} (\ \hat{y}_i(\underline{x}, \underline{z}) - \widehat{m}_i(\underline{x}))^2 p(\underline{z}) d\underline{z}, \quad i = 1,2,\cdots,r.$$

Box와 Jones(1992)는 평균제곱변동은 다음과 같다고 하였다.

$$\hat{v}_i(\underline{x}) = (\ \underline{r}_i + \widehat{D}_i \underline{x})'(\ \underline{r}_i + \widehat{D}_i \underline{x})/3\ +\ \widehat{A}_i, \quad i = 1,2,\cdots,r, \tag{2.7}$$

여기서 $\widehat{A}_i = [4\Sigma_{j=1}^{m}(\ r^i{}_{jj})^2 + 5\Sigma_{j=1}^{m-1}\Sigma_{k=j+1}^{m}(\ r^i{}_{jk})^2\,]/\,45$이고 $\gamma_{jk}{}^i$는 $\widehat{R}_i$의 j번째 행과 k번째 열의 원소이다. 우리는 $\hat{v}_i(\underline{x})$를 " i번째 추정된 분산모형"이라고 하자.

i번째 추정된 평균모형 식(2.6)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\widehat{m}_i(\underline{x}) = \underline{h}'(\underline{x})\ \widehat{\underline{\theta}}_{0i} \quad i = 1,2,\cdots,r, \tag{2.8}$$

여기서 $\underline{h}'(\underline{x}) = (1, x_1, \cdots, x_l,\ x_1^2, \cdots, x_l^2,\ x_1x_2, \cdots, x_{l-1}x_l,\ 1/3, \cdots, 1/3)$ 그리고 $\widehat{\underline{\theta}}_{0i} = (\ b^i{}_0,\ b^i{}_1, \cdots,\ b^i{}_l,\ b^i{}_{11}, \cdots,\ b^i{}_{ll},\ b^i{}_{12}, \cdots,\ b^i{}_{l-1},\ r^i{}_{11}, \cdots,\ r^i{}_{mm})'$는 $\widehat{\underline{\theta}}_i$의 일부분이다. $\widehat{\underline{\theta}}_{0i}$는 $\widehat{\underline{\theta}}_i$의 일부분이라는 사실로부터 $\widehat{\underline{\theta}}_0$의 분산-공분산 행렬은 다음과 같다.

$$Var(\ \widehat{\underline{\theta}}_0) = (X'X)_0^{-1}\Sigma,$$

여기서 $\widehat{\underline{\theta}}_0 = (\ \widehat{\underline{\theta}}_{01}',\ \widehat{\underline{\theta}}_{02}', \cdots,\ \widehat{\underline{\theta}}_{0r}')'$, $(X'X)^{-1}$는 $p \times p$ 그리고 $(X'X)_0^{-1}$는 $q \times q$, 여기서 $p = (l+m+n)(l+m+2)/2$ 그리고 $q = (l+1)(l+2)/2 + m$이다. $(X'X)_0^{-1}$는 $(X'X)^{-1}$의 $q \times q$ 부분행렬이다. 식(2.8)로부터 다음이 성립된다.

$$Var[\ \widehat{\underline{m}}(\underline{x})] = \underline{h}'(\underline{x})(X'X)_0^{-1}\underline{h}(\underline{x})\Sigma,$$

여기서 $\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) = (\ \widehat{m}_1(\underline{x}),\ \widehat{m}_2(\underline{x}), \cdots,\ \widehat{m}_r(\underline{x}))'$는 $\underline{x}$에서 추정된 평균모형식의 백터이다. 따라서 $Var[\ \widehat{\underline{m}}(\underline{x})]$의 불편추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{Var}[\ \widehat{\underline{m}}(\underline{x})] = \underline{h}'(\underline{x})(X'X)_0^{-1}\underline{h}(\underline{x})\widehat{\Sigma}. \tag{2.9}$$

2.3 품질평균에 대한 동시최적화

만약 모든 추정된 평균모형식 $\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) = (\ \widehat{m}_1(\underline{x}),\ \widehat{m}_2(\underline{x}), \cdots,\ \widehat{m}_r(\underline{x}))'$이 똑같은 제어인자의 조건 $\underline{x}$에서 그들 각 각의 목표치(혹은 최적조건) $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_r)'$에 도달할 수만 있다면 동

시최적화 문제는 명확하게 해결될 것이다. 그러나 그런 경우는 거의 불가능하며 일반적으로, 모든 평균모형식에서 다소 유리한 제어인자들의 타협점을 찾아야 할 것이다. 품질평균의 목표치와 타협조건의 차이는 $\widehat{\underline{m}}(\underline{x})$와 $\underline{\tau}$의 거리를 측도화한 거리함수(distance function)에 의하여 평가할 수 있다.

모든 품질특성은 크게 망목특성, 망소특성 그리고 망대특성으로 분류할 수 있으며 품질특성별로 추정된 평균모형식의 목표치 τ_i는 다음과 같다.

1. 망목특성(nominal-is-best characteristics): $\tau_i = \widehat{m}_i(\underline{x})$의 특정한 값.
2. 망대특성(larger-the-better characteristics): $\tau_i = Max_{\ x \in R_x}\ \widehat{m}_i(\underline{x})$, 여기서 R_x는 제어인자들 $\underline{x}$의 흥미영역을 나타낸다.
3. 망소특성(smaller-the-better characteristics): $\tau_i = Min_{\ x \in R_x}\ \widehat{m}_i(\underline{x})$.

목표치 $\underline{\tau}$에 대한 $\widehat{\underline{m}}(\underline{x})$의 거리함수는 다음과 같다.

$$D[\widehat{\underline{m}}(\underline{x}), \underline{\tau}] = [(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})' \{Var[\widehat{\underline{m}}(\underline{x})]\}^{-1}(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})]^{1/2}.$$

모든 추정된 평균모형식 $\widehat{\underline{m}}(\underline{x})$의 분산-공분산 행렬인 식(2.8)을 이용하여, 우리는 다음과 같은 거리함수를 얻는다.

$$\left[\frac{(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})' \hat{\Sigma}^{-1} (\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})}{\underline{h}'(\underline{x})(X'X)_0^{-1}\underline{h}(\underline{x})}\right]^{1/2}.$$

각각의 추정된 평균모형식 $\widehat{\underline{m}}(\underline{x})$의 중요도가 다르다면 각각의 가중치를 $w_1, w_2, \cdots, w_r$로 둔다. 여기서 $0 < w_i < 1$ 이며 $\Sigma_{i=1}^{r} w_i = 1$ 이다. 그러면 평균모형의 비중을 고려한 거리함수는 다음과 같다.

$$\left[\frac{\{W(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})\}' \hat{\Sigma}^{-1} \{W(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})\}}{\underline{h}'(\underline{x})(X'X)_0^{-1}\underline{h}(\underline{x})}\right]^{1/2}, \tag{2.10}$$

여기서 $W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & w_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ sym & & & w_r \end{pmatrix}$ 이다. 식(2.10)로부터 흥미영역 R_x에서 평균모형에 대한 동시최적화 방안을 다음과 같이 제안한다.

$$\underset{\underline{x} \in R_x}{Min}\ D_m(\underline{x}) = \underset{\underline{x} \in R_x}{Min}\ \frac{\{W(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})\}' \hat{\Sigma}^{-1} \{W(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})\}}{\underline{h}'(\underline{x})(X'X)_0^{-1}\underline{h}(\underline{x})}. \tag{2.11}$$

평균모형에 대한 동시최적화 측도 D_m은 추정된 평균모형식에 대한 사전지식이 없을 때 사용될 수 있으며 무엇보다 중요한 사실은 추정된 평균모형식들 간에 분산과 상관관계를 고려하였다는 것이다. 만약 동시최적화 결과와 대응하는 각각의 최적화 결과와 차이가 큰 평균모형이 있다면 그 평균모형에 대해서는 상한이나 하한을 정해두고 다시 최적화를 하면 된다.

2.4 품질변동에 대한 동시최적화

모든 반응변수의 품질변동은 작으면 작을 수록 좋기 때문에 망소특성의 성질을 가지고 있다고 할 수 있다. 따라서 반응함수의 i번째 추정된 분산모형의 값도 또한 작을수록 좋은 망소특성이 된다. 품질변동에 대한 동시최적화도 품질평균에 대한 동시최적화와 같은 방법을 생각할 수 있으나 분산모형들간의 분산-공분산을 고려한 거리함수를 구하는데 어려움이 있다. 거리함수에서는 분산모형의 분산-공분산행렬을 사용하여 표준화 하였으나 기대함수에서는 분산모형의 최대값과 최소값과의 나누어 표준화하였다. 우리는 Derringer와 Suich(1980)가 제시한 기대함수를 이용하여 품질의 분산을 망소특성으로 변환하여 새로운 최적화방안을 제안하고자 한다. 분산모형은 망소특성이므로 분산모형이 최소값일 때 거리가 가장 멀게되어 i번째 기대함수 $d_i(\underline{x})$값은 1이 되고 최대값일 때 거리가 가장 가까워져서 0이 되어 $d_i(\underline{x})$값이 0이 되도록 다음과 같이 단측변환 한다.

$$d_i(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & v_i^* \le \widehat{v_i}(\underline{x}) \\ \left[\dfrac{v_i^* - \widehat{v_i}(\underline{x})}{v_i^* - v_{i*}} \right]^q & v_{i*} \le \widehat{v_i}(\underline{x}) \le v_i^* \\ 1 & \widehat{v_i}(\underline{x}) \le v_{i*} \end{cases} \tag{2.12}$$

여기서 v_{i*}는 $\min_{\underline{x} \in R_x} \widehat{v_i}(\underline{x})$, v_i^*는 $\max_{\underline{x} \in R_x} \widehat{v_i}(\underline{x})$ 그리고 w는 임의의 실수값을 나타낸다. q값이 클수록 분산모형이 목표치 근처에서만 기대함수 값이 1에 가까워지고 분산모형이 목표치에 조금만 멀어져도 기대함수 값이 0에 가까워지는 경향이 있다.

먼저 i번째 추정된 분산모형 $\widehat{v_i}(\underline{x})$를 i번째 기대함수 $d_i(\underline{x})$ $(0 \le d_i(\underline{x}) \le 1)$로 단측변환을 한 다음 r개의 분산모형에 대한 총 기대함수를 기하평균을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$D_v(\underline{x}) = (d_1(\underline{x}) \times d_2(\underline{x}) \times \cdots \times d_r(\underline{x}))^{1/r}. \tag{2.13}$$

따라서 식(2.13)에서 r개의 분산모형에 대한 최적화방안을 다음과 같이 제안한다.

$$\max_{\underline{x} \in R_x} D_v(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in R_x} (d_1(\underline{x}) \times d_2(\underline{x}) \times \cdots \times d_r(\underline{x}))^{1/r}. \tag{2.14}$$

식(2.14)로부터 품질변동만을 고려할 때 제어인자에 대한 최적점을 구할 수 있게 된다.

2.5 동시최적화 방안

반응변수가 여러 개인 경우 로버스트 설계를 하기 위한 동시최적화 방안으로 앞서 우리가 제안한 품질평균에 대한 거리함수 $D_m(\underline{x})$와 품질변동에 대한 총 기대함수 $D_v(\underline{x})$를 동시에 고려한 동시최적화 방안을 생각해 볼 수 있을 것이다. 로버스트 설계에서는 품질평균 보다 품질변동을 줄이는 것이 우선이라는 측면에서 다중 반응 동시최적화 방안을 다음과 같이 제안하고자 한다.

$$\underset{\underline{x} \in R_x}{Min}\, D_m(\underline{x}) = \underset{\underline{x} \in R_x}{Min} \frac{\{W(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})\}' \,\widehat{\Sigma}^{-1} \{W(\widehat{\underline{m}}(\underline{x}) - \underline{\tau})\}}{\underline{h}'(\underline{x})(X'X)_0^{-1}\underline{h}(\underline{x})} \tag{2.15}$$

$$\text{제한조건} \quad D_v(\underline{x}) \ge l$$

여기서 $\min_{x \in R_x} D_v(x) \le l \le \max_{x \in R_x} D_v(x)$ 이다. l 은 임의의 상수이며 l 이 클수록 품질변동에 대한 중요성이 커지는 것이다. 식(2.15)는 우선적으로 다중 반응에서 품질변동을 제한하면서 가능한 품질평균을 목표치 근처에 가져가는데 있으므로 다양한 l에서 제어인자들의 거동을 살펴보는 것이 제어인자들의 동시최적점을 구하는 방법이 될 것이다.

3. 비교 연구

로버스트 설계를 위한 다중 반응 동시 최적화 방안에서 다구찌가 제안한 교차배열접근법에 의한 최적화 방안과 우리가 제안한 통합배열접근법에 의한 최적화 방안을 예제를 통하여 비교 연구하고자 한다.

3.1 교차배열접근법

교차배열에서 내측배열(inner array)에는 2수준의 제어인자 A, B, C, D 그리고 F를 직교배열 $L_{16}(2^{15})$에 배치하고 외측배열(outer array)에 2수준(N_0: 정상 조건, N_1: 나쁜 조건)의 잡음인자 N을 배치하였다. <표 1>에서는 제어인자에 관하여 나타나 있으며 <표 2>는 교차배열에 의한 실험배치이며 강도 자료 y_1와 마모 자료 y_2에 대한 가상적인 자료가 있다.

<표 1> 요인과 수준

제어인자	0 수준	1 수준
A : 성형시간(min)	120	130
B : 성형온도(℃)	70	80
C : 냉각온도(℃)	-20	-15
D : 첨가량(%)	5	10
F : 혼합속도(rpm)	800	900

강도 자료 y_1은 망대특성 그리고 마모 자료 y_2는 망소특성이다. 우리는 <표 2>의 실험자료로부터 다음과 같이 SN비(signal-to-noise ratio)를 계산할 수 있다.

(1) 망대특성: $SN_i = -10\log_{10}[1/3\sum_{i=1}^{3} y_{ij}^{-2}] - 30$, (2) 망소특성: $SN_i = -10\log_{10}[1/3\sum_{i=1}^{3} y_{ij}^{2}] + 35$.

분산분석결과 <표 3> 그리고 <표 4>로부터 y_1에서는 A, B 그리고 C인자가 아주 유의하고 y_2에서는 D와 F인자가 유의하다. 따라서 <표 5>로부터 동시 최적화 조건은 $A_0B_1C_0D_0F_0$ (120 min, 80℃, -20℃, 5%, 800 rpm)이 됨을 알 수 있다.

<표 2> 교차배열에 의한 실험자료

요인배치	A	B	e	e	e	e	e	C	e	e	D	e	e	F	e	y_1		y_2	
열번호 / 실험수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	N_0	N_1	N_0	N_0
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	59	63	23	29
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	59	64	30	37
3	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	65	69	27	33
4	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	51	56	24	29
5	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	59	75	36	34
6	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	59	65	21	18
7	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	65	74	32	30
8	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	51	59	29	25
9	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	59	55	30	35
10	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	59	45	31	36
11	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	65	57	33	41
12	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	51	44	20	26
13	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	59	61	31	25
14	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	59	58	32	26
15	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	65	62	24	20
16	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	56	51	34	31

<표 3> y_1의 분산분석표

요인	S	f	V	F_0
A	3.7830	1	3.7830	13.27
B	3.6290	1	3.6290	12.73
C	7.1824	1	7.1824	25.19
D	0.6400	1	0.6400	2.24
F	0.0240	1	0.0240	0.08
e	2.8514	10	0.2851	
계	18.1148	15		

<표 4> y_2의 분산분석표

요인	S	f	V	F_0
A	0.4658	1	0.4658	1.04
B	2.1830	1	2.1830	4.87
C	1.7490	1	1.7490	3.90
D	13.7456	1	13.7456	30.63
F	13.3043	1	13.3043	29.65
e	4.4805	10	0.4487	
계	34.9342	15		

<표 5> 요인 효과의 요약표

요인	수준	y_1에대한 SN비의 합	y_2에대한 SN비의 합	최적수준
A	0 (120 min)	47.62	47.81	○
	1 (130 min)	39.84	45.08	
B	0 (70 ℃)	39.92	43.49	
	1 (80 ℃)	47.54	49.40	○
C	0 (-20 ℃)	49.09	43.40	○
	1 (-15 ℃)	38.37	49.49	
D	0 (5 %)	42.13	53.86	○
	1 (10%)	45.33	39.03	
F	0 (800 rpm)	43.42	53.74	○
	1 (900 rpm)	44.04	39.15	

3.2 통합배열접근법

제어인자들과 잡음인자들 $(\underline{x}, \underline{z})$이 2수준이므로 일차회귀모형으로 나타낼 수가 있다. 따라서 제어인자와 잡음인자간의 교호작용을 고려한 적합된 i번째 일차회귀모형은 다음과 같다.

$$\hat{y}_i(\underline{x}, \underline{z}) = b_{i0} + \underline{x}'\underline{b}_i + \underline{z}'\underline{r}_i + \underline{z}'\hat{D}_i\underline{x}, \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

2.2절에서와 같은 방법으로 i번째 추정된 평균모형식과 분산모형식은 다음과 같다.

$$\hat{m}_i(\underline{x}) = b_{i0} + \underline{x}'\underline{b}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{3.1}$$

$$\hat{v}_i(\underline{x}) = \frac{1}{3}(\underline{r}_i + \hat{D}_i\underline{x})'(\underline{r}_i + \hat{D}_i\underline{x}), \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{3.2}$$

i번째 추정된 평균모형 식(3.1)를 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\hat{m}_i(\underline{x}) = \underline{h}'(\underline{x})\,\hat{\underline{\theta}}_{0i} \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

여기서 $\underline{h}'(\underline{x}) = (1, x_1, \cdots, x_l)$ 그리고 $\hat{\underline{\theta}}_{0i} = (b^i{}_0, b^i{}_1, \cdots, b^i{}_l)'$는 $\hat{\underline{\theta}}_i$의 일부분이다.

통합배열에는 제어인자 x_1(혹은 A), x_2(혹은 B) 그리고 x_3(혹은 C)와 잡음인자 x_4 (혹은 D), x_5(혹은 F) 그리고 z(혹은 N)를 하나의 직교배열 $L_{16}(2^{15})$에 실험배치 한다. <표 6>은 통합배열에 의한 실험자료인데 앞서 교차배열(<표 2>를 보시오.)에 의한 실험자료에서 1/2만의 자료를 사용하였다. 교차배열과 통합배열을 공정한 조건에서 비교하기 위하여 <표 6>에서 5개의 제어인자와 1개의 잡음인자의 수준이 일치하는 조건에서 <표 2>로부터 실험자료를 가져다 쓰기로 하자. 교차배열에서 y_1에서는 $A \times N$이 그리고 y_2에서는 $B \times N$이 유의함을 보았다. 따라서 <표 6>처럼 잡음인자를 4열에 실험 배치하면 될 것이다.

<표 6>로부터 추정된 2차 회귀모형은 각 각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(\underline{x}, z) &= 60.00 - 3.25x_1 + 3.13x_2 - 4.25x_3 + 1.38x_4 - 0.13x_5 - 1.00z \\ &\quad - 2.25zx_1 - 0.63zx_2 - 2.25zx_3 - 0.88zx_4 + 0.13zx_5.\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_2(\underline{x}, z) &= 29.31 + 0.94x_1 - 1.06x_2 - 1.19x_3 + 3.06x_4 + 2.94x_5 + 0.06z \\ &\quad - 0.81zx_1 - 1.81zx_2 - 0.44zx_3 + 0.31zx_4 + 0.19zx_5.\end{aligned} \tag{3.4}$$

식(3.3) 그리고 식(3.4)로부터 식(2.6)와 식(2.7)를 이용하면, 다음과 같은 추정된 평균모형식과 분산모형식을 얻는다.

$$\widehat{m_1}(\underline{x}) = -3.25x_1 + 3.13x_2 - 4.25x_3 + 1.38x_4 - 0.13x_5 + 60.00.$$

$$\widehat{m_2}(\underline{x}) = 0.94x_1 - 1.06x_2 - 1.19x_3 + 3.06x_4 + 2.94x_5 + 29.31.$$

$$\widehat{v_1}(\underline{x}) = (-2.25x_1 - 0.63x_2 - 2.25x_3 - 0.88x_4 + 0.13x_5 - 1.00)^2/3.$$

$$\widehat{v_2}(\underline{x}) = (-0.81x_1 - 1.81x_2 - 0.44x_3 + 0.31x_4 + 0.19x_5 + 0.06)^2/3.$$

흥미영역 R_x는 $-1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 1$의 범위에서 움직이며, R_x 상에서 $\widehat{m}_1(\underline{x})$, $\widehat{m}_2(\underline{x})$, $\hat{v}_1(\underline{x})$ 그리고 $\hat{v}_2(\underline{x})$의 범위는 각 각 $47.86 \leq \widehat{m}_1(\underline{x}) \leq 72.14$, $20.12 \leq \widehat{m}_2(\underline{x}) \leq 38.50$, $0.00 \leq \hat{v}_1(\underline{x}) \leq 16.99$ 그리고 $0.00 \leq \hat{v}_2(\underline{x}) \leq 4.37$이다.

<표 6> 통합배열에 의한 실험자료

실험수 \ 열번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	자료 y_1	자료 y_2
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	59	23
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	59	30
3	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	69	33
4	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	56	29
5	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	69	36
6	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	61	21
7	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	74	30
8	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	59	25
9	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	60	30
10	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	51	31
11	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	57	41
12	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	44	26
13	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	64	31
14	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	65	32
15	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	62	20
16	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	51	31
기본표시	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd		
배치	x_1	x_2	e	z	$x_1 z$	$x_2 z$	e	x_3	e	e	x_4	e	e	x_5	e		

강도 자료 y_1은 망대특성이므로 평균모형 $\widehat{m_1}(\underline{x})$의 목표치는 최대값 72.14가 되고 마모 자료 y_2는 망소특성이므로 $\widehat{m_2}(\underline{x})$의 목표치는 최소값 20.12가 된다. 또한 분산모형 $\widehat{v_1}(\underline{x})$는 최소값 $v_{1_*} = 0.00$이며 최대값 $v_1^* = 16.99$이다. 한편 $\widehat{v_2}(\underline{x})$는 최소값 $v_{1_*} = 0.00$이며 최대값 $v_1^* = 4.37$이다. 분산모형에 관한 기대함수는 식(2.12)에서 지수 q=1를 적용하고 총 기대함수는 r=2일 때 식(2.13)를 적용한다. <표 7>은 품질변동의 총 기대함수 $D_v(\underline{x})$가 0.83 보다 작은 어떤 값 이상에서 품질평균의 동시최적화 측도 $D_v(\underline{x})$를 사용하여 구한 동시최적화 결과이다. <표 7>에서 품질평균의 비중이 각 각 w_1=0.1과 w_2=0.9 일 때 제어인자의 최적조건은 x_1=-1.0, x_2=1.0, x_3=0.5, x_4=-1.0 그리고 x_5=-1.0 이며 이 때 $\widehat{m}_1(\underline{x})$, $\widehat{m}_2(\underline{x})$, $\hat{v}_1(\underline{x})$, $\hat{v}_2(\underline{x})$ 그리고

$D_v(\underline{x})$ 값은 각 각 63.01, 20.72, 0.02, 0.92 그리고 0.89이다.

<표 7> 동시최적화 방안 D_m

가중치		최적점					동시최적화 값				
w_1	w_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\widehat{m}_1(\underline{x})$	$\widehat{m}_2(\underline{x})$	$\widehat{v}_1(\underline{x})$	$\widehat{v}_2(\underline{x})$	$D_v(\underline{x})$
Subject to $D_v(\underline{x}) \geq$ *below** 0.83											
0.1	0.9	-1.0	1.0	0.5	-1.0	-1.0	63.01	20.72	0.02	0.92	0.89
0.3	0.7	-1.0	1.0	-1.0	-1.0	-1.0	69.38	22.50	4.37	0.33	0.83
0.5	0.5	-1.0	1.0	-1.0	-0.8	-1.0	69.66	23.11	3.95	0.29	0.85
0.7	0.3	-1.0	1.0	-1.0	0.9	-1.0	72.00	28.31	1.27	0.06	0.96
0.9	0.1	-1.0	1.0	-1.0	1.0	-1.0	72.14	28.62	1.15	0.05	0.96

* “ *below* m"은 m이나 m 보다 작은 어떤 값을 의미한다.

3.3 결과 비교

3.1절과 3.2절로부터 기존의 다구찌 방법론 즉, SN비를 사용한 교차배열접근법과 우리가 새로이 제안한 통합배열접근법에서의 다중 반응 동시최적화 방안과 비교할 수 있을 것이다.

교차배열의 결과 <표 5>로부터 동시최적화 조건은 $A_0B_1C_0D_0F_0$(x_1=-1.0, x_2=1.0, x_3=-1.0, x_4=-1.0, x_5=-1.0) 즉, 120 min, 80℃, -20℃, 5%, 그리고 800 rpm이 되었고 통합배열의 결과 <표 7>로부터 동시최적화 조건은 두 개의 품질특성치의 평균모형에 대한 비중을 똑같이 0.5로 두었을 때 x_1=-1.0, x_2=1.0, x_3=-1.0, x_4=-0.8 그리고 x_5=-1.0 즉, 120 min, 80℃, -20℃, 6.5% 그리고 800 rpm이 되는 것을 알 수 있었다. 우리가 제안한 통합배열에서 동시최적화 방안은 품질평균의 비중에 따라서 제어인자의 최적조건은 변화하지만 지나치게 한 쪽에 편중되지 않는다면 실험수를 1/2로 줄이면서도 기존의 교차배열접근법과 비슷한 결과를 얻을 수 있었다.

4. 결론

본 논문에서는 평균모형에 대한 최적화 방안인 D_m과 분산모형의 최적화 방안인 D_v와 두 모형에 대한 최적화 방안을 이용하여 품질변동과 품질평균을 동시에 고려한 다중 반응 동시최적화 방안을 제안하였다. 3장에서 우리는 새로이 제안한 최적화 방안을 사용하여 실험수를 크게 줄이면서도 기존의 교차배열접근법과 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 다구찌의 동시 최적화 방안은 제어인자의 수준만을 택하여야 하기 때문에 하나의 제어인자가 서로 다른 수준에서 두 개 이상의 품질특성치에서 동시에 유의한 경우 타협조건을 찾을 수 없었으나 우리가 제안한 방법은 흥미영역 내에서 최적조건을 찾기 때문에 타협조건 찾기가 용이한 장점이 있다. 로버스트 설계에서 실험배치 방법은 크게 교차배열과 통합배열이 있는데 새로이 제안한 최적화 방안은 통합배열을 이용

함으로써 기존의 잘 정립된 실험계획법 이론을 활용할 수 있어 다구찌 파라미터 설계에서 단점으로 지적된 제반 문제점을 해결할 수 있는 대체방안이 될 수 있을 것이다.

References

[1] Box, G. E. P. and Jones, S. P. (1992). Designing Products That Are Robust to the Environment, *Total Quality Management*, Vol. 3, 265-282.

[2] Derringer, G. and Suich, R.(1980). "Simultaneous Optimization of Several Response Variables," *Journal of Quality Technology,* Vol. 12, pp. 214-219.

[3] Huang, D. S. (1970). *Regression and Econometrics Methods*, New York, John Wiley.

[4] Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981). Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Functions, *Technometrics*, Vol. 23, 363-375.

[5] Taguchi, G. (1986). *Introduction to Quality Engineering*: Designing Quality Into Products and Processes, White Plains, NY : UNIPUB / Kraus International.

[6] Taguchi, G. (1987). *System of Experimental Design*: Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Cost, White Plains, NY: UNIPUB / Kraus International.

[7] Vining, G. G. and Myers, R. H. (1990). Combining Taguchi and Response Surface Philosophies : A Dual Response Approach, *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, 38-45.

[8] Welch, W. J., Yu, T. K., Kang, S. M. and Sacks, J. (1990). Computer Experiments for Quality Control by Parameter Design, *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, 15-22.