



다중 격자 기법을 위한 예조건화된 다단계 시간 전진 기법

Preconditioned Multistage Time Stepping for the Multigrid Method

*김윤식¹⁾, 권장혁²⁾

*Yoonsik Kim, Jang Hyuk Kwon

In this paper, the preconditioned multistage time stepping methods which are popular multigrid smoothers is studied for the compressible flow calculations. Fourier analysis on the local time stepping and block-Jacobi preconditioned residual operators is performed using the linearized 2-D Navier-Stokes equations. It turned out that block-Jacobi preconditioner has better performance in eigenvalue clustering. They are implemented in the 2-D compressible Euler and Navier-Stokes calculations with multigrid methods to verify that the block-Jacobi preconditioned multistage time stepping shows better performance in convergence acceleration.

1. 서 론

전산 유체 역학에서 수렴 가속화 기법은 단순한 정상 상태 유동 해석의 시간 절감뿐만 아니라 이중 시간 전진을 이용한 비정상(unsteady) 유동장 해석, 공력 최적 설계[1] 등과 같이 반복적인 유동해석이 필요한 계산에 있어 필수적이다. 이러한 수렴 가속화 기법들 중 가장 널리 알려진 기법으로는 다중 격자 기법을 들 수 있다.

다중 격자 기법은 1982년 Ni[2]가 Euler 방정식으로 적용 범위를 넓히면서 전산유체역학 기법에도 응용되기 시작하였다. 이후 1980년대에는 Jameson[3-4] 등에 의해 Euler 방정식의 수렴성 증진을 위하여 활용되었으며 1990년대 이후에 Navier-Stokes 방정식으로의 확장이 시도되어 왔다[5-6].

다중 격자 기법은 차분 방정식의 해를 구하기 위한 방법의 하나로, 행렬 연산 시간을 줄이기 위하여 원래 행렬의 형태를 유지하면서 보다 작은 크기의 행렬문제로 바꾸어 해를 구한 후 원래 방정식의 해를 보정해주는 기법이라 할 수 있다

[7]. 이러한 과정을 위하여 조밀 격자와 성근 격자가 필요하고, 각 계산 격자에서는 반복 연산과정과 격자들 간에 변수들의 전달과정에 발생하는 오차를 감쇠시키기 위한 smoother가 필요하게 된다. 그리고, 격자들 간의 자료전달을 위한 restriction, prolongation 연산자들이 필요하다.

다중 격자 기법은 성근 격자에서는 조밀 격자의 저주파 영역의 오차가 고주파 영역의 오차로 나타나므로, smoother를 이용하여 이러한 저주파 영역의 오차를 보다 효과적으로 감쇠시킴으로써 단일 격자 기법에 비하여 우수한 수렴성을 얻을 수 있게 되는 기법이다.

다중 격자 기법에서 각 격자 단계에서의 smoother는 고주파 영역의 에러에 대한 우수한 감쇠특성을 갖추고 있어야 한다. 이러한 특성을 갖는 smoother로서 대표적인 기법이 다단계 시간 전진 기법이라 할 수 있다. 이 방법은 Jameson[3]에 의해 고차의 시간 정확도 대신 고주파 영역의 에러에 대한 감쇠특성을 향상시키며 안정영역을 최대화하도록 설계되었으며, 이후 점성 유동장 해석을 위하여 Martinelli[8]에 의해 개선된 바 있



다. 한편, 상류 차분 잔류치 연산자에 적합하도록 Tai[9], Lynn[10], 박태상[11] 등에 의해 개선된 바 있다.

다단계 시간 전진 기법의 성능을 극대화하기 위해서는 특정 주파수 영역에서 잔류치 연산자의 고유치를 적절히 밀집시킬 수 있어야 한다. 이러한 특성을 갖는 수치 기법으로는 예조건화 기법이 있다. 예조건화는 행렬의 형식을 갖춤으로써, 잔류치 연산자의 고유치들을 적절히 밀집시킬 수 있어야 한다. 이러한 예조건화 기법중에 대수학적 의미의 예조건화 방법으로서 block-Jacobi, line-Jacobi 등의 방법이 있다[12]. Pierce[13]는 중앙 차분 잔류치 연산자에 적용하여 우수한 수렴성을 보인바 있다.

이와 같이 저주파 영역의 에러에 대한 우수한 감쇠특성을 갖는 다중 격자 기법과 고주파 영역의 에러를 밀집시켜주는 예조건화 기법 그리고, 고주파 영역의 에러에 대한 감쇠 특성이 우수한 다단계 시간 전진 기법의 조합으로 뛰어난 수렴성을 갖는 수치 기법을 형성할 수 있다.

본 연구에서는 Fourier 해석 기법을 이용하여, 2차 상류 차분 기법을 이용한 잔류치 연산자에 국소 시간 간격과 block-Jacobi예조건자를 적용한 경우에 대하여 잔류치의 고유치를 밀집시키는 효과를 선형화된 2차원 Navier-Stokes 방정식에 대하여 비교 해석하였다. 그리고, 박태상에 의해 개발된 다단계 시간 전진 기법과 다중 격자 기법을 적용하여 2차원 압축성 비점성 및 층류 점성 유동장 계산에 적용하여 그 수렴성을 비교함으로써 block-Jacobi예조건화된 잔류치 연산자가 우수한 수렴성을 가짐을 보였다.

2. 지배 방정식 및 수치 해석 기법

2.1 지배 방정식

일반적인 압축성 점성 유동의 지배방정식은 Navier-Stokes 방정식을 2차원 직교 좌표계에서 미분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f_v}{\partial x} + \frac{\partial g_v}{\partial y} \quad (1)$$

여기서 q 는 유동 변수를, f, g 는 비점성 유속 벡터를, f_v, g_v 는 점성 유속 벡터를 나타내며 자세한 식은 참고문헌[11]에 자세히 기술되어 있다.

본 연구에서는 완전기체 관계식을 사용하였으며, 점성계수는 Sutherland의 법칙을 사용하였다.

2.2 공간 이산화

일반 좌표계로 변환시킨 지배 방정식을 이산화하기 위해 격자 중심 유한 체적법을 사용하였다. 공간 이산화된 지배 방정식은 식(2)와 같이 각 격자 중심에서 정의되는 유동 변수 및 잔류치에 대한 연계된 상미분 방정식의 형태로 표현된다.

$$\frac{dQ_{ij}}{dt} + R_{ij} = 0 \quad (2)$$

여기서 잔류치(residual)는 다음과 같다.

$$R_{ij} = \sum_{s=1}^{N_{kx}} \left(F_s^E - \frac{\sqrt{VM_\infty}}{Re_\infty} F_s^v \right) \cdot \hat{n}_s \quad (3)$$

대류항의 계산을 위하여 총격과와 같은 불연속면을 잘 나타내면서 수치적 불안정성을 배제할 수 있는 2차 upwind TVD기법[11]을 이용하였다. 격자면의 유속 Jacobian은 Roe[14] 평균치를 사용하였으며, 제한자 함수는 minmod 제한자를 사용하였다.

점성항에 대해서는 계산 격자의 경계면에서 중앙 차분을 이용하였다.

2.3 시간 적분 기법

일반적인 예조건화된 m 단계 시간 전진 기법은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Q = Q^{(0)} - \alpha_k [P^{-1}R^{(k-1)}] \quad (4)$$

위에서 α_k 는 다단계 시간전진 계수를 의미한다.

본 연구에서는 박태상 등에 의하여 제안된 2차 upwind TVD기법을 위한 4단계 시간 전진 기법을 사용하였다. 본 기법에서 사용한 다단계 시간 전진 기법의 각 단계에서의 잔류치 계산은 다음과 같다. 먼저 잔류치를 1차 upwind 대류항 (R^{1st}) 과 반감쇄항 (R^a) 그리고, 점성항 (R^v) 으로 나누고 각 단계에서 잔류치는 아래와 같이 구한다.

$$\begin{aligned} R^{(0)} &= R^{1st}(Q^{(0)}) + R^a(Q^{(0)}) + R^v(Q^{(0)}) \\ R^{(k)} &= R^{1st}(Q^{(k)}) + R^a(Q^{(0)}) + R^v(Q^{(1)}), k \geq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

다단계 시간 전진 계수 및 CFL수는 다음과 같다.

• Euler 방정식

$$a_1 = (2\sigma)^{-1} - (4\sigma^2 a_2)^{-1} + (8\sigma^3 a_2 a_3)^{-1} - (32\sigma^4 a_2 a_3)^{-1}, \quad (6)$$

$$a_2 = 0.21, a_3 = 0.5, \\ CFL_{exp} = \sigma = 2.8$$

• Navier-Stokes 방정식

$$a_1 = \frac{1 - 1/(4\lambda) - 2\lambda(1-\beta)a_3[1 - 2\lambda(1-\beta)a_2]}{4\lambda\beta[1 - 2\lambda(1-\beta)a_3] + 8\lambda^3(1-\beta)^2(1+\beta)a_3a_2}, \quad (7)$$

$$a_2 = 0.23, a_3 = 0.54 \\ CFL_{exp} = \lambda = \sigma + \mu = 1.7$$

여기서, $\beta = \mu/\lambda$ 이며, μ 는 von Neumann수를 의미한다.

2.4 예조건화 기법

스칼라 형식의 예조건자인 국소 시간 간격은 다음과 같이 나타내어진다.

$$P_s = \frac{1}{(\Delta t)_{local}} = \frac{\sum \rho(A)}{CFL_{exp}} \quad (8)$$

여기서 $\rho(\cdot)$ 은 유속 Jacobian 행렬의 spectral radius를 의미한다.

각 계산 격자에서 정의되는 Point-implicit형식의 block-Jacobi예조건자는 다음과 같다.

$$(P_J)_{ij} = \left[\frac{I}{\Delta t_{imp}} + P_J^E + P_J^v \right] / CFL_{exp} \quad (9)$$

위 식에서 내재적 시간 간격 Δt_{imp} 는 다음과 같다.

$$\Delta t_{imp} = CFL_{imp} / \sum \rho(A) \quad (10)$$

비점성 잔류치에 의한 예조건자는 1차 upwind 대류항에 의한 잔류치로 근사하였으며, 격자면에서 유속 Jacobian은 Roe 평균치를 사용하였다.

$$P_J^E = \sum_{s=1}^{N_{loc}} \frac{\partial (F_s^E \cdot \hat{n}_s)}{\partial Q_{ij}} \approx \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_{loc}} |\hat{A}|_s \quad (11)$$

수치 유속 계산 과정에서 사용된 entropy 보정치를 적용한 수치 유속 Jacobian을 동일하게 사용하였다.

위의 비점성 부분과 유사하게 점성유속에 의한 부분은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P_J^v = - \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re_\infty} \sum_{s=1}^{N_{loc}} \frac{\partial (F_s^v \cdot \hat{n}_s)}{\partial Q_{ij}} \quad (12)$$

위의 점성 유속의 보존 변수에 대한 Jacobian은 계산의 편의를 위하여 원시 변수(primitive variables)를 도입하여 계산하였다.

다단계 시간 전진 과정에서 국소 시간 간격은 매 단계에서 다시 계산되지만, block-Jacobi예조건자는 계산 시간을 줄이기 위해 첫 번째 단계에서만 구하고 다음 단계에서는 고정된 값을 계속 사용하였다. 수치 계산에 의하면 매 단계에서 다시 계산하는 경우에 비해 전체 반복 연산 횟수는 큰 차이를 나타내지 않았다. 각 계산 격자의 예조건화 행렬의 역행렬 계산에는 Cramer's 법칙을 이용하였다.

2.5 경계 조건

원방 경계에서 아음속의 경우 Riemann 불변치를 사용하였다. 벽면에서는 밀도와 압력은 하나의 격자로부터 외삽하고 속도는 점성 유동의 경우는 no-slip 조건을, 비점성의 경우는 벽면에 수직인 속도 성분은 0으로 하였다.

2.6 다중 격자 기법

FAS(Full Approximation Scheme)[15]를 사용하였으며, 성근 격자는 full-coarsening 기법을 이용하였고, 톱니(saw-tooth) 사이클을 사용하였다. 유동 변수에 대한 restriction 연산자는 면적 가중 평균 연산자를 사용하였으며, prolongation 연산자는 bilinear interpolation 연산자를 사용하였다. 조밀 격자와 성근 격자에서의 시간 전진 과정, 격자들간의 유동 변수 및 잔류치의 전달 등 다중 격자 사이클 과정에서의 자세한 내용은 참고문헌 [11]에 자세히 기술되어 있다.

3. Fourier 해석

3.1 선형화 및 공간 이산화

직교 좌표계에서 Navier-Stokes 방정식을 준선형 방정식(quasi-linear equation.s)형태로 나타낸 후 기준상태에 대하여 선형화하고 교란변수(perturbation variables)에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Q}{\partial y} - R \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - S \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - T \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0 \quad (13)$$

위 식에서 A,B,R,S,T는 유속 Jacobian 행렬을 나



타내며, 자세한 식은 참고문헌[16]에 나타나있다. 각 유속 Jacobian들은 기준상태를 정의하는 매개변수(governing parameter)들에 의하여 결정된다. 선형화된 식을 공간 차분을 하면 잔류치 연산자는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R = R^E + R^V$$

$$R^E = \frac{A}{\Delta x} C_x + \frac{|A|}{\Delta x} D_x + \frac{B}{\Delta y} C_y + \frac{|B|}{\Delta y} D_y \quad (14)$$

$$C_x = \frac{1}{2}(\delta_x^- + \delta_x^+), \quad D_x = \frac{1}{2}(\delta_x^- - \delta_x^+)$$

$$R^V = -\frac{R}{\Delta x^2} \delta_{xx} - \frac{S}{\Delta y^2} \delta_{yy} - \frac{T}{\Delta x \Delta y} \delta_{xy}$$

위 식에서 δ^\pm 는 상류 차분 연산자를 나타내며, δ_{xx} , δ_{yy} , δ_{xy} 는 2차 정확도의 중앙 차분 연산자를 나타낸다. 2차 상류 차분 연산자를 이동 연산자(translation operator)를 이용하여 나타내면 식(15)와 같다. y 방향에 대해서는 x 방향과 동일한 형태를 가지므로 생략하였다.

$$\delta_x^\pm = \mp \frac{1}{2}(1 - T_x^{\pm 1})(3 - T_x^{\pm 1}) \quad (15)$$

여기서, 이동 연산자는 $T_x^n Q_{ij} \equiv Q_{i+n, j}$ 으로 정의된다. 그리고, 대류항(C_x)과 수치 점성 연산자(D_x), 그리고 점성항에 대한 중앙 차분 연산자도 유사한 형식으로 표현된다.

식(13)의 유속 Jacobian 행렬들은 다음과 같은 각 계산 격자에서의 기준상태에 대한 매개변수들로 나타내어진다.

◦ Cell Mach수 : $M = \sqrt{u^2 + v^2} / c$

◦ Cell Reynolds수 : $Re = (u\Delta x + v\Delta y) / \nu$

◦ 격자의 종횡비 : $AR = \Delta x / \Delta y$

◦ 유동각 : $\varphi = v / u$

3.2 Fourier symbols

잔류치 연산자의 Fourier symbol은 직교 좌표계에서 정의된 식과 동일한 형태를 가지며, 각 연산자들(이동 연산자, 차분 연산자 등)의 Fourier symbol로서 정의된다. 직교 좌표계에서 정의된 각 연산자들의 Fourier symbols은 다음과 같다.

$$\hat{T}_x = \exp(i\hat{\theta}_x), \quad \hat{i} \equiv \sqrt{-1}$$

$$\hat{C}_x = \hat{i} \sin \theta_x (2 - \cos \theta_x), \quad \hat{D}_x = (\cos \theta_x - 1)^2$$

$$\hat{\delta}_{xx} = 2(\cos \theta_x - 1), \quad \hat{\delta}_{yy} = 2(\cos \theta_y - 1) \quad (16)$$

$$\hat{\delta}_{xy} = -\sin \theta_x \sin \theta_y$$

국소 시간 간격을 나타내는 스칼라 예조건자의 Fourier symbol은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\hat{P}_s = \left[\frac{\rho(A)}{\Delta x} + \frac{\rho(B)}{\Delta y} + \frac{\rho(R)}{\Delta x^2} + \frac{\rho(S)}{\Delta y^2} \right] / CFL_{exp} \quad (17)$$

Block-Jacobi 예조건자의 Fourier symbol은 다음과 같다.

$$\hat{P}_J = \frac{1}{CFL_{exp}} \left[\frac{I}{\Delta t_i} + \frac{|A|}{\Delta x} \text{diag}[\hat{D}_x] + \frac{|B|}{\Delta y} \text{diag}[\hat{D}_y] - \frac{R}{\Delta x^2} \text{diag}[\hat{\delta}_{xx}] - \frac{S}{\Delta y^2} \text{diag}[\hat{\delta}_{yy}] \right] \quad (18)$$

위 식에서 $\text{diag}[\cdot]$ 는 연산자의 대각항을 나타낸다. 즉, 이동 연산자의 Fourier symbol을 이용하여 나타내었을 때 상수항을 의미한다.

Fourier 변환된 예조건화된 잔류치 연산자는 식(19)과 같이 예조건자와 잔류치 연산자의 Fourier symbol로 나타내어지며 4×4 복소 행렬이 된다. 이러한 예조건화된 잔류치 연산자의 고유치들로 구성된 집합을 Fourier footprints라 한다.

$$FT(P^{-1}R) = \hat{P}^{-1} \hat{R} \quad (19)$$

행렬 고유치의 수치적 계산은 LAPACK[17]을 이용하여 수행하였다.

본 연구에서 사용한 2차 upwind TVD기법을 위한 4단계 시간 전진 기법의 안정 영역 및 증폭률에 대한 자세한 표현은 참고문헌[11]에 나타나 있다.

4. 결과 및 토의

4.1 Fourier footprints

국소 시간 간격 또는 block-Jacobi 예조건자와 2차 상류 차분 잔류치 연산자를 이용한 Fourier footprints를 나타내면 Fig.1-2와 같다. Fourier

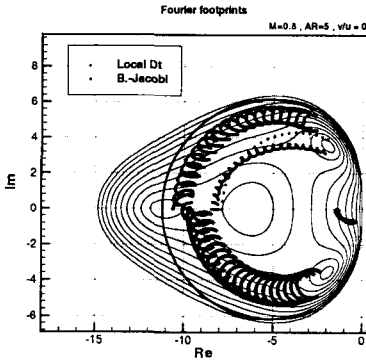


Fig. 1. Fourier footprints(Euler)
(M=0.8, AR=5, v/u=0)

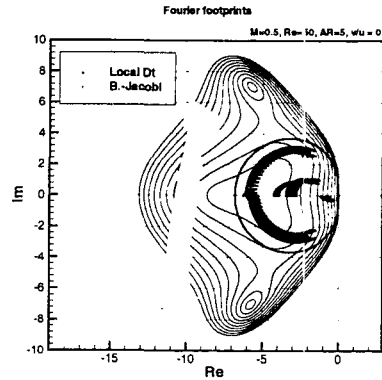


Fig. 2. Fourier footprints(Navier-Stokes)
(M=0.5, Re=50, AR=5, v/u=0)

footprints는 실수 축을 중심으로 대칭적으로 나타나므로 각 예조건자에 대해 반 평면에만 나타내었다. 위쪽 반평면은 block-Jacobi 예조건자를 이용한 결과이며, 아래쪽 반평면은 국소 시간 간격을 이용한 결과를 나타낸다. Fig.(1)은 Euler 방정식에 대한 Fourier footprints를 나타내며 block-Jacobi 예조건자의 내재적 CFL수는 20을 사용하였다. 실선으로 나타낸 선은 1차원 대류 방정식에 대한 2차 상류 차분 잔류치 연산자의 Fourier symbol을 나타낸다. Fourier footprints는 $\pi/2 \leq \theta_x, \theta_y \leq \pi$ 구간의 고주파수 영역에 대하여 나타내었다.

Fig.1은 M=0.8, AR=5, v/u = 0인 경우이며, 국소 시간 간격을 이용한 잔류치 연산자의 고유치들은 그 분포가 광범위하게 흩어져 있으며, 특히, 고주파수 영역임에도 불구하고 원점 주위에 까지 고유치들이 나타나는 것을 확인할 수 있다. 이에 반해 block-Jacobi 예조건자를 이용한 경우 고유치들이 비교적 잘 밀집되어 있다.

Fig.2는 M=0.5, Re=50, AR=5, v/u=0일 때 Navier-Stokes 방정식의 Fourier footprints를 나타낸 그림이다. 실선으로 나타낸 선은 1차원 대류-전도 방정식의 2차 잔류치 연산자의 Fourier symbol을 나타낸다. Block-Jacobi 예조건자를 위한 내재적 CFL수는 15를 사용하였다.

Navier-Stokes 방정식의 경우도 block-Jacobi 예조건자를 이용한 경우가 국소 시간 간격을 이용한 경우에 비하여 고유치들의 밀집효과가 뛰어난 것을 알 수 있다.

이상을 통해 볼 때 다단계 시간 전진 기법을 적용할 경우 Block-Jacobi 예조건화된 잔류치 연산자를 이용하는 경우가 국소 시간 간격을 이용하는 경우에 비하여 우수한 수렴 특성을 보일 것을 예상 할 수 있다.

4.2 수치 해석 결과

앞서 수행한 Fourier 해석 결과를 실제 문제에 검토하기 위하여 익형 주위의 압축성 유동장을 해석하였다. Euler 방정식 및 Navier-Stokes 방정식에 대한 수치 계산을 단일 격자 및 4레벨-다중 격자 기법과 예조건화된 다단계 시간 전진 기법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. Euler 방정식에 대해서는 NACA0012의형 및 RAE2822의형 주위의 유동장을 해석하였다. 격자점의 수는 129×33 개의 O형 격자계를 사용하였다. Navier-Stokes 방정식 계산에는 257×65 의 C형 격자계를 사용하였다. 첫 번째 격자까지의 거리는 2×10^{-3} 이며 익형위에는 161개의 격자점이 분포되어 있다. 수치 계산에 사용된 CPU는 Pentium III-933MHz 이며 컴파일러는 g77을 사용하였다.

Fig.3은 $M_\infty=0.8, \alpha = 0$ 일 때 NACA0012의형 주위의 비점성 유동장 해석시 수렴 곡선을 나타낸다. Fig.4는 $M_\infty=0.73, \alpha = 2.79$ 일 때 RAE2822의형 해석시 수렴곡선을 나타낸다.

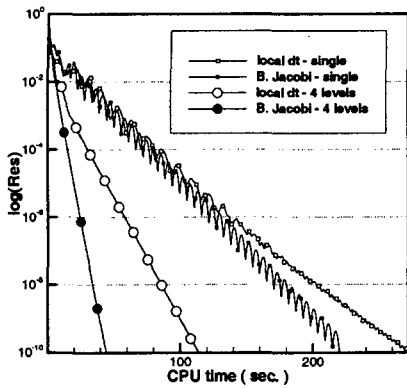


Fig. 3. Convergence history(Euler-NACA0012)

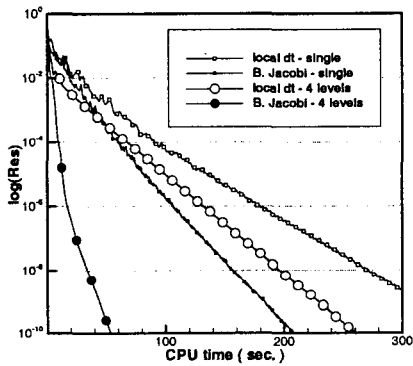


Fig. 4. Convergence history(Euler-RAE2822)

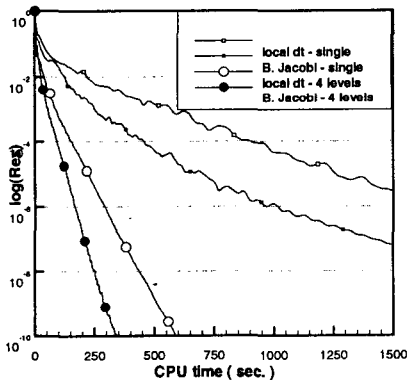


Fig. 5. Convergence history (Navier-Stokes)

Table 1. Computational costs(Euler)

	NACA0012				RAE2822			
	국소시간 간격		Block- Jacobi		국소시간 간격		Block- Jacobi	
Level	1	4	1	4	1	4	1	4
반복 회수	4,114	1,053	2,762	352	5,500	2,459	2,627	433
계산시간 (sec.)	272	114	220	44	361	261	208	54

Table 2. Computational costs(Navier-Stokes)

	점성 유동 (NACA0012)			
	국소시간 간격		Block-Jacobi	
Level	1	4	1	4
반복회수	11,915	1,180	7,240	552
계산시간 (sec.)	3,433	590	2,700	344

Fig.5는 $M_\infty=0.8$, $Re_\infty=500$, $\alpha=10$ 일 때 NACA0012의형 주위의 점성 유동장 계산시 수렴 곡선을 나타낸다.

Table 1은 Euler 방정식에 대하여, Table (2)은 Navier-Stokes 방정식에 대해 국소 시간 간격 및 block-Jacobi 예조건자를 이용한 기법에 대해 연속 방정식 잔류치의 RMS 값이 10^{-10} 까지 수렴할 때까지 소요된 사이클 수 및 계산 시간을 나타낸 것이다.

Table 1에서 NACA0012의형 주위의 유동장 계산의 경우, 국소 시간 간격의 경우 반복 회수에 있어서는 다중 격자 기법에 의한 성능 향상이 3.9배 정도 되지만, 계산 시간을 기준으로 볼때는 2.4배 정도 된다. Block-Jacobi 예조건자를 이용한 경우에는 반복 회수 기준으로 7.8배, 계산 시간 기준으로는 5배로 다중 격자 기법을 통한 수렴성 향상 성능이 훨씬 우수한 것을 확인 할 수 있다.

Table 2의 성능 비교표를 통해 다중 격자 기법의 적용을 통한 수렴성 향상 성능은 국소 시간 간격을 이용한 기법은 반복 회수에 대해서는 약 10배, 계산 시간 기준으로는 약 5.8배 정도의 수렴성 향상 성능이 있으나, block-Jacobi 예조건자를 이용한 경우는 반복 회수 기준으로는 약13배,



계산 시간 기준으로 약 7.8배 정도로서 점성 유동장 계산에 있어서도 block-Jacobi예조건화된 다단계 시간 전진 기법이 우수한 성능을 나타낸다.

이상과 같은 수치 해석 결과들은 Fourier 해석상에서 Fourier footprints의 적절한 밀집효과를 통하여 예측된 바와 일치하는 것을 알 수 있다.

V. 결론

본 연구에서를 통하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

2차 upwind 잔류치 연산자에 대하여, 국소 시간 간격과 block-Jacobi예조건자를 이용한 예조건화된 잔류치 연산자의 Fourier footprints의 밀집도가 매우 상이하게 나타나며, 특히 고주파수 영역에서는 block-Jacobi예조건화된 잔류치 연산자의 Fourier footprints의 밀집 효과가 뛰어난 것을 확인하였다. 비 점성 및 층류 점성 유동장에 적용하여 다중 격자 기법을 적용한 수치해석에 있어서 block-Jacobi예조건자를 이용한 경우가 국소 시간 간격을 적용한 경우에 비해 매우 우수한 수렴성을 나타내는 것을 확인하였다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 기초연구과제 "Navier-Stokes code의 수렴성 증진 방안 연구"의 일환으로 수행되었으며 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] 성춘호, 권장혁, "강연계 기법을 이용한 공력 최적설계", 한국항공우주학회 춘계 학술발표회 논문집, pp.642-645, (2001)
- [2] R.-H. Ni, "A multiple-grid scheme for solving the Euler equations", *AIAA J.* 20, No.11, pp.1565-1571, (1982)
- [3] A. Jameson, "Solution of the Euler Equations for Two Dimensional Transonic Flow by a Multigrid Method", *Appl. Math. Comp.* 13, pp.327-355, (1983)
- [4] A. Jameson and S. Yoon, "Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes", *AIAA J.* 24, No.11, pp1737-1743, (1986)
- [5] T.S. Park and J.H. Kwon, "An Improved Multistage Time Stepping for 2nd Order Upwind TVD Schemes for the Navier-Stoke Equations", *Proceedings of 2nd ACFD*, 145-150, Tokyo, Japan, Dec. 15-18, (1996)
- [6] F. Grasso, M. Marini "Solutions of Hypersonic Viscous Flows with Total Variation Diminishing Multigrid Techniques", *Computer & Fluids*, 24, pp.571-592, (1993)
- [7] K. Stuben, U. Trottenberg, "Multigrid Methods: Fundamental Algorithms, Model Problem Analysis and Applications", *Lecture Notes in Math* 960, pp.1-176, (1981)
- [8] L. Martinelli, "Calculations of viscous flows with a multigrid method", Ph.D. Thesis, Princeton Univ. (1987)
- [9] C.H. Tai, "Acceleration Techniques for Explicit Euler Codes", Ph.D. Thesis, Aerospace Eng., University of Michigan (1990)
- [10] J.F. Lynn and van Leer, "Multi-Stage Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations with Optimal Smoothing", AIAA-93-3355-CP
- [11] 박태상, "2차 upwind TVD 기법을 위한 개선된 다단계 시간 전진 기법", 박사학위논문, 한국과학기술원 항공우주공학과, (1998)
- [12] Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", PWS Pub. (1996)
- [13] N.A. Pierce, "Preconditioned Multigrid Methods for Compressible Flow Calculations on Structured Meshes", Ph.D. Thesis, Oxford University, (1997)
- [14] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Comput. Phys.* 43, pp.357-372, (1981)
- [15] A. Brandt, "Guide To Multigrid Development", *Lecture Notes in Math* 960-Multigrid Methods, pp.220-312, (1981)
- [16] S. Abarbanel D. Gottlieb, "Optimal Time Splitting for Two- and Three-Dimensional Navier-Stokes Equations with Mixed Derivatives", *J. Comput. Phys.* 41, pp1-33, (1981)
- [17] G.H. Golub, C.F. van Loan, "Matrix Computations", Johns Hopkins Univ. press, (1996)