

유한체적법을 이용한 2차원 라플라스방정식의 수치해석

안 희 섭, 신 양 섭, 이 석 원, 이 한 신, 김 영 근, 서 정 민
LG산전

Computational Analysis of 2-Dimensional Laplace Equation Using Finite Volume Method

Heui-Sub Ahn, Yang-Sob Shin, Seog-Won Lee, Han-Shin Lee, Young-Geun Kim, Jung-Min Seo
LG Industrial Systems

Abstract - 유한체적법(Finite Volume Method)은 기계공학분야에서 열, 유체현상을 수치해석하는 방법으로 널리 쓰이고 있다. 열전달(Heat Transfer)문제의 지배방정식은 에너지방정식(Energy equation)으로서 그 중 순수 전도문제의 경우 지배방정식은 라플라스(Laplace)방정식의 형태를 띠고 있다. 전계해석의 지배방정식 역시 라플라스 방정식의 형태이다. 수학적으로 동일한 지배방정식을 갖는다는 것은 물리적으로 같은 현상을 나타내고 있다는 것을 의미하며 이러한 점에 착안을 하여 본 논문에서는 유한체적법을 사용하여 2차원 모델에 대한 전계해석을 수행하였다.

하기 위하여 수학적 엄밀해(Analytic Solution)가 존재하는 문제를 해석하였으며 그 결과를 엄밀해와 비교하였다.

1. 서 론

컴퓨터를 이용한 수치해석 시 널리 사용되고 있는 방법으로는 유한차분법(Finite Difference Method), 유한체적법(Finite Volume Method), 유한요소법(Finite Element Method)등이 있다. 각각의 방법들 모두 장, 단점을 가지고 있지만 그 중 열, 유체분야에서는 유한체적법을 주로 사용하고 있다. 그 이유는 지배방정식의 보존법칙(Conservative Law)이 전체 계산영역 및 해석을 수행하기 위해 생성한 각각의 체적(Volume)에서도 잘 만족되기 때문이다⁽¹⁾.

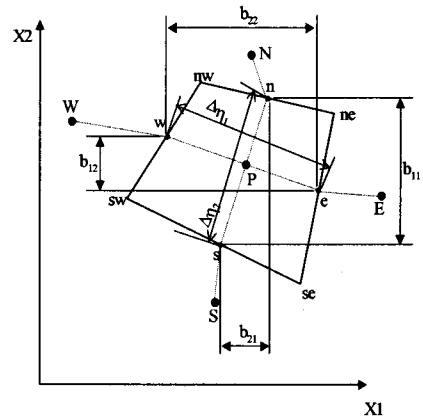


Fig. 1) Geometry of Finite Volume

2. 본 론

2.1 지배방정식과 수치해석 기법

직교좌표계의 라플라스방정식을 일반비직교좌표계 (η_1, η_2, η_3)로 좌표변환하면 식(1)과 같다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(\beta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left[\beta_{ij} \left(\frac{1}{J} \beta_{im} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_m} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 J 는 Jacobian, β_{ij}, β_{im} 는 Mapping에 따르는 좌표변환계수를 나타낸다. Jacobian은 해석영역과 mapping된 계산영역과의 체적비를 나타낸다.

그림(1)은 임의의 형상을 가진 2차원 유한체적을 나타내고 있다. X_1, X_2 는 각각 직교좌표계의 x, y 축을 나타내고 $X_3(z$ 축)방향으로는 단위길이의 차원을 가지고 있다. η 는 격자의 형상을 따르는 일반좌표계의 방향이다. 대문자로 표시한 각 점(P, E, W 등)은 각 체적의

일반적으로 유한체적법을 적용하는 방법에는 크게 2가지 방법이 있다. 첫 번째는 해석영역(Physical Domain)의 격자(Grid)를 생성 한 후 이 격자를 수치 계산영역(Computational Domain)으로 좌표변환(Mapping)한 후 각각의 체적에서 적분을 수행하여 하여 이산화(Discretization)를 하는 방법이다. 두 번째는 해석영역의 격자로 구성된 체적에 가우스의 발산정리를(Gauss' Divergence Theory)적용하는 방법이 있다. 전자는 Mapping을 하기 위해 좌표변환행렬을 구해야 하며 격자가 정렬격자(Structured Grid)의 형태에만 적용할 수 있는 단점이 있다. 그에 비해 후자의 방법은 유한체적(Finite Volume)에 발산정리를 적용하여 체적적분을 면적분으로 변환 후 유한체적의 기하학적인 형상에서 이산화에 필요한 모든 정보를 얻을 수 있다. 또한 정렬격자나 비정렬격자(Unstructured Grid) 모두 적용할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문에서는 정렬격자를 사용하여 후자의 방법으로 이산화를 하였으며 선형화 된 이산화방정식의 해를 구하는 방법으로는 TDMA(Tri Diagonal Metrics Algorithm)를 사용하였다. 해석결과의 정확도를 평가

중심을 나타내고 있으며 이 점에서의 포텐셜 (Potential) 값이 계산에 사용되어 진다. 체적을 구성하는 각 면의 중심은 소문자(e, w 등)로 표시하였으며 모서리는 조합(ne, nw 등)하여 표시하였다.

한편 P점에 대한 체적적분은 가우스의 발산정리를 이용하여 식(2)과 같이 표현된다.

$$\int_V (\nabla^2 \phi) dV = \int_S dA \cdot \nabla \phi \cong \sum_{e,w,n,s} \delta A \cdot \nabla \phi \quad (2)$$

여기서 δA 는 체적면에서 바깥쪽으로 향하는 면적법선 벡터이다. 면적법선벡터를 그림(1)과 같은 임의의 체적에 대해 기하학적인 양으로 나타내면 식(3)과 같이 표현된다.

$$\delta A = i_m b_{mj} \quad (3)$$

최종적인 이산화과정은 식(2)의 마지막 식에서 나타낸 바와 같이 임의의 체적에 대해 각 면에서의 $\delta A \cdot \nabla \phi$ 를 구하여 더하면 완성된다.

식(2)에 나타난 $\nabla \phi$ 는 다음과 같이 표현된다. 임의의 체적의 중심 P에 발산정리를 적용하면 식(4)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \int_S dA \phi \cong \sum_{e,w,n,s} \delta A \phi \\ &= (i b_{11} + j b_{21})_e \phi_e - (i b_{11} + j b_{21})_w \phi_w \\ &= (i b_{12} + j b_{22})_n \phi_n - (i b_{1n} + j b_{2n})_n \phi_n \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)에 나타난 바와 같이 체적면에서의 기하학적인 양과 그 면에서의 포텐셜값이 필요하게 된다. 그러나 기울기 (gradient)는 보통 생성항 (source term)으로 취급하기 때문에 윗 식을 사용하지 않고 식(5)와 같이 근사하여 사용한다.

$$(b_{11} \phi)_e - (b_{11} \phi)_w \cong (b_{11})_P (\phi_e - \phi_w) \quad (5)$$

또한 체적면의 포텐셜값들은 체적중심 값들로부터 보간 (interpolation)하여 구한다. 식(5)를 이용하면 식(4)는 최종적으로 식(6)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \phi \cong & i [b_{11} (\delta \phi)_1 + b_{12} (\delta \phi)_2]_P \\ & + j [b_{21} (\delta \phi)_1 + b_{22} (\delta \phi)_2]_P \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $(\delta \phi)_P = \phi_e - \phi_w$, $(\delta \phi)_P = \phi_n - \phi_s$ 이다.

식(6)에서 $\int_V \nabla \phi dV \cong (\nabla \phi)_P (\nabla V)_P$ 로 두면 P점에서의 기울기 (gradient)는 텐서총합기호 (summation rule)를 사용하면 식(7)과 같이 된다. 여기서 δV 는 P점을 둘러싼 임의체적의 부피 (Volume)을 나타낸다.

$$(\nabla \phi) \cong \frac{1}{(\delta V)_P} [i_m b_{mj} (\delta \phi)_j]_P \quad (7)$$

임의의 점에서 기울기를 구하는 식(7)을 식(2)에 대입하면 라플라스 방정식의 최종적인 이산화방정식이 구해진다. 먼저 'e'면에 대해 구해보면 식(8)과 같이 되며 나머지 면들에 대해서도 동일한 방법으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta A_e &= (i b_{11} + j b_{21})_e \\ (\nabla \phi)_e &\cong \frac{1}{(\delta V)_e} [i_m b_{mj} (\delta \phi)_j]_e \\ (\delta A \cdot \nabla \phi)_e &= \frac{1}{(\nabla V)_e} [(b_{1j} b_{11} + b_{2j} b_{21}) (\delta \phi)_j]_e \\ &= \frac{1}{(\delta V)_e} [B_{j1} (\delta \phi)_j]_e \\ &= \frac{1}{(\delta V)_e} [B_{11} (\delta \phi)_1 + B_{21} (\delta \phi)_2]_e \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $(\delta \phi)_e = \phi_E - \phi_P$, $(\delta \phi)_e = \phi_{ne} - \phi_{se}$ 으로 각각 주확산 (normal diffusion), 교차확산 (cross diffusion)이며 교차확산은 격자의 비직교성에 의해서 나타나며 격자가 직교성 (Orthogonality)을 유지할 경우는 그 값이 '0'이 되며 비직교인 경우에는 생성항으로 처리한다. 또한 $B_{jm} = b_{ij} b_{im} = (\delta A)_i \cdot (\delta A)_j$ 이다.

동일한 방법으로 각 면에 대해서 정리하면 최종적인 이산화 방정식의 식(9)와 같이 된다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (9)$$

여기서 $a_E = (\frac{B_{11}}{\delta V})_e$, $a_N = (\frac{B_{11}}{\delta V})_n$, $a_P = \sum_{E,W,N,S} a$ 이다. b는 생성항을 나타내며 교차확산등이 이에 포함된다.

서론에서 언급한 바와 같이 본 논문에서는 정렬격자 및 방정식의 해법으로 TDMA를 사용하였다. TDMA는 반복법 (Iteration Method)으로 해를 구하는 해법중의 하나이며 유한요소법의 행렬해법으로 주로 사용되는 Gauss소거법보다 계산시간이 절약된다. 이 방법은 수치해석과 관련된 여러 교재⁽³⁾에 많이 소개되어 있으므로 상세한 적용은 생략하기로 한다.

수렴판정기준은 $|\phi_n - \phi_{n-1}| \leq 10^{-3}$ 으로 설정하였다.

2.2 적용 결과

본 논문에서 제시한 방법을 이용하여 두 종류의 예제에 대해 적용을 하였다. 계산결과와 정확성을 비교하기 위해 두 경우 모두 엄밀해가 존재하는 문제를 선택하였다.

2.2.1 적용사례 1

기하학적인 형상은 그림(2)와 같고 경계조건이 모두 지정되어 있는 Dirichlet 형태의 문제이다. 위 문제의 엄밀해는 식(10)과 같다⁽⁴⁾.

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi x/b)}{\sinh(m\pi d/b)} \sin(m\pi y/b) \quad (10)$$

여기서 V_0 는 100V로 설정하였으며 b, d는 각각 0.05m로 지정을 하였다. 계산에 사용된 체적은 21×21 을 사용하였다. 그림(3)은 수치해석 결과의 등전위선과 전계의 유선을 나타내고 있다. 그림(4)는 $b/2$ 와 $d/2$ 지점에서 각각 x축과 y축을 따른 엄밀해와 수치해의 계산 결과를 비교한 그림이다. 해석해와 수치해가 잘 일치함을 알 수 있으며 상대오차(relative error)의 최대값은 약 0.8% 정도였다.

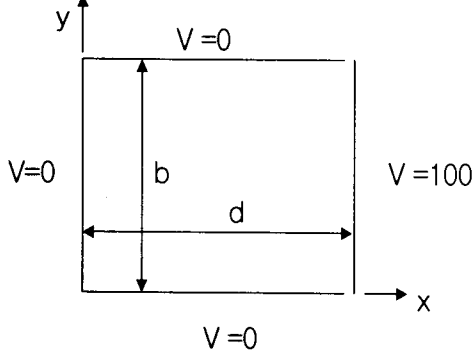


Fig. 2) Geometry and Boundary condition

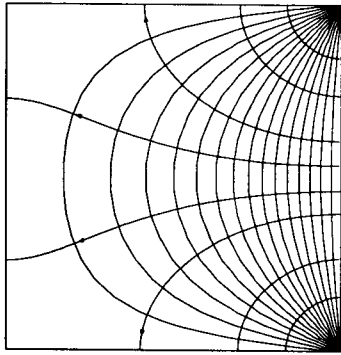


Fig. 3) Potential and Electric Field

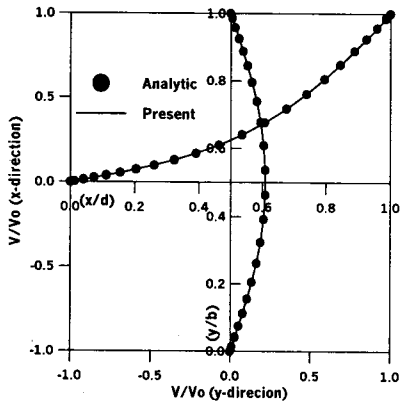


Fig. 4) Comparison of Analytic and Numerical

2.2.2 적용사례 2

두 번째 적용사례로는 동축케이블(coaxial cable)을 선정하였다. 계산에 사용된 유한체적은 41×41 이며, 경계조건으로는 대칭조건(Neumann Condition)과 케이블의 내부와 외부에는 전위차를 100V로 설정하였다. 동축케이블의 전위와 전계의 엄밀해는 식(11)과 같다.

$$V = a \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}, \quad E_\rho = \frac{a \rho_s}{\epsilon_0 \rho} \quad (11)$$

여기서 ρ 는 반경방향 거리이고 a, b는 각각 내측과 외측의 반경으로 각각 0.5, 1.0m로 설정하였다.

그림(5)는 해석결과로써 등전위선과 전계의 유선을 나타내고 있다. 전계의 방향이 방사선방향임을 알 수 있고 전위선과 수직이 됨을 볼 수 있다. 그림(7)과 (8)은 엄밀해와 해석값을 각 위치별 전계와 전압을 비교한 그림이다. 상대오차는 각각 0.9%와 0.7%이며 상대오차가 가장 크게 나타난 부위는 위치는 내부와 외부 원통도체의 표면이다.

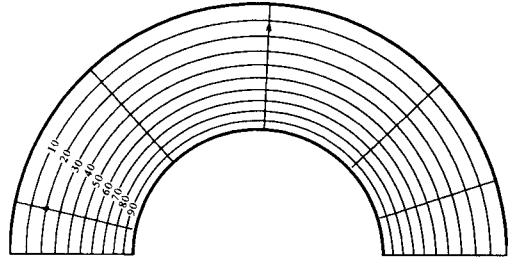


Fig. 5) Potential and Electric Field

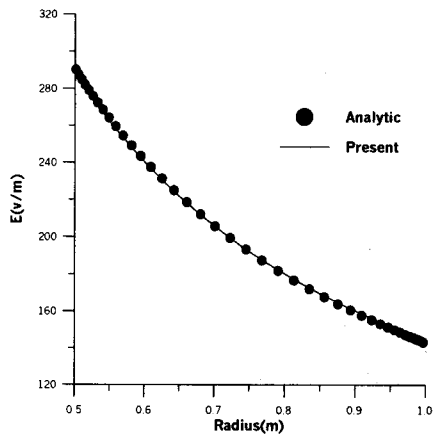


Fig. 6) Comparison of Electric Strength

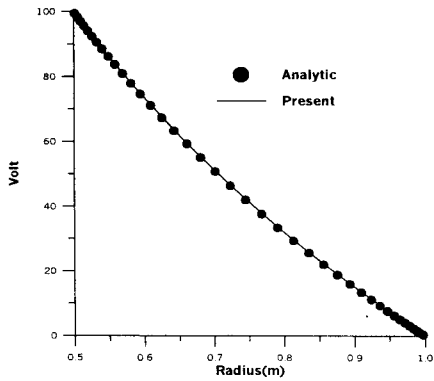


Fig. 7) Comparison of Potential

3. 결 론

유한체적법을 이용하여 2차원 라플라스 방정식을 수치해석하여 그 결과를 엄밀해와 비교하였다. 그 결과 정확성의 신뢰도가 상당히 높았음을 확인하였고 적용사례에 보인 바와 같이 임의형상의 해석영역에도 적용할 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 점을 고려했을 때 유한체적 해석이 전계해석의 유용한 방법으로 이용될 수 있으리라 판단된다. 추후 이러한 유한체적해석을 3차원으로 확장하는 연구가 추가적으로 이루어야 할 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] Patanker, S. V. "Numerical heat transfer and fluid flow". 1980. McGraw-Hill, New York
- [2] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., Mastin, C. W. "Numerical Grid Generation". 1985. Elsevier, New York
- [3] Stone, H. L. "Iterative solution of implicit approximations of Multi-Dimensional partial differential equation ". SIAM J. Num. Anal. vol.5, p.530
- [4] Hyat, W. H. "Engineering Electromanetics". 6th Edition. McGraw-Hill