

변요소를 이용한 3차원 적응유한요소법

류 재섭, 고 창섭, 홍 선기*
 충북대학교 전기공학과, *호서대학교 제어계측공학과

3D Adaptive Finite Element Method Using Edge Elements

Ryu Jae Seop, Koh Chang Seop, Hong Sun ki*
 Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National University, *Hoseo University

Abstract - A three dimensional adaptive finite element analysis algorithm is developed. In the method, the edge elements are used for field analysis, and the local error in each element is estimated from the fact that the magnetic field should satisfy the continuity condition at the interface of the two adjacent elements. Based on the estimated error, the elements which are considered to have big error are divided into several elements using the bisection method. The effectiveness of the developed algorithm is proved through numerical examples.

1. 서 론

유한요소 해석에서 요소분할은 지배방정식의 정식화와 더불어 해의 정확성에 많은 영향을 미친다. 따라서, 정확한 해를 얻기 위해서는 해의 오차가 클 것으로 생각되는 부분을 미리 예측하고, 그 부분의 요소를 세분화하여 분할하여야 한다. 그러나 실제 모델의 적용에서, 특히 해석 모델이 복잡한 3차원 해석에서는 그 부분을 예측하기가 쉽지 않아 적절한 요소분할이 어렵다.

적용 유한요소법에서는 초기 요소망에 의한 해석 결과를 이용하여 각 요소에서의 오차를 추정하고, 상대적으로 오차가 큰 요소를 오차의 크기에 따라 몇 개로 세분화함

으로써 비교적 적은 수의 요소분할로도 정확한 해석을 할 수 있다. 적용 유한요소법을 이용한 전체 해석과정은 그림 1에 나타난 바와 같이 크게 유한요소 해석, 각 요소의 오차 추정, 오차가 큰 요소의 세분으로 구성된다. 이 중에서 전체적인 적용 유한요소해석의 성능은 각 요소의 부분 오차 추정과 오차가 큰 요소의 세분 방법에 좌우된다. 이에 대한 기존의 연구를 보면 절점요소(Nodal element)를 이용하는 경우에 대하여는 오차추정과 요소세분에 대한 그 방법이 비교적 소상히 연구되었으나[1-3], 변요소(Edge element)를 이용하는 경우에 대해서는 아직까지 연구가 미미한 실정이다.

본 논문에서는 근래에 전기기기의 해석에 널리 이용되고 있는 변요소를 이용하는 경우에 적용할 수 있도록 각 요소의 부분 오차 추정법을 제안하여 적용 유한요소법을 개발하였다.

2. 본 론

2.1 변 요소를 이용한 정식화

외부 인가 전류와 영구자석을 포함하는 시스템의 지배방정식은 Maxwell 방정식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A} - \vec{B}_s) = \vec{J} \quad (1)$$

여기서, 각 기호는 통상의 의미를 가진다. 변 요소를 이용한 3차원 유한요소 해석에서, 사면체 요소를 이용하면 요소(e)내의 임의의 점에서의 자기 벡터 포텐셜 $A^{(e)}$ 는 벡터 보간 함수 \vec{N}_i 를 이용하면 다음 식으로 표현되어진다.

$$\vec{A}^{(e)} = \sum_{i=1}^6 \vec{N}_i A_i \quad (2)$$

여기서, A_i 는 요소(e)의 i 번 변에 대한 미지수이고, \vec{N}_i 는 그 변에서의 벡터 보간 함수이다.

지배방정식에 갤러킨법을 적용하면 다음식이 구해지고,

$$G_i = \int \vec{N}_i \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A} - \vec{B}_s) dv - \int \vec{N}_i \cdot \vec{J} dv = 0 \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

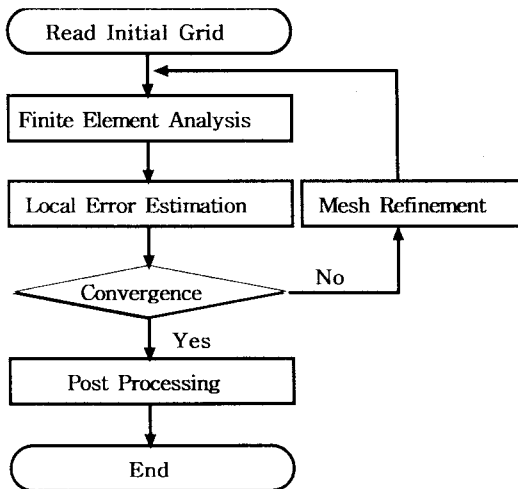


Fig. 1. Algorithm of adaptive finite element method.

식(2)를 대입하여 정리하면 다음과 같은 식으로 된다.

$$G_i = \sum_e G_i^{(e)} = \sum_e \left\{ \sum_{k=1}^6 \nu^{(e)} \cdot K_k^{(e)} \cdot A_i^{(e)} - F_n^{(e)} - F_m^{(e)} \right\} \quad (4)$$

= 0, $i=1, 2, \dots, N$

여기서 각각의 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$K_k^{(e)} = \int (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot (\nabla \times \vec{N}_j) dv \quad (5)$$

$$F_n^{(e)} = \int \vec{N}_i \cdot \vec{J} dv \quad (6)$$

$$F_m^{(e)} = \frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot \vec{B}_r dv \quad (7)$$

여기에서 $\nu^{(e)}$ 는 요소 (e) 에서의 자기저항률이다.

또한 매질의 비선형성을 고려하기 위하여 뉴튼-랩슨법을 식(4)에 적용하면 다음 방정식이 얻어진다.

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial A_i} \right] [\delta A_i] = -[G_i] \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial A_i} \right] = \sum_e \frac{\partial G_i^{(e)}}{\partial A_i} \quad (9)$$

식(9)에서 우변의 식은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\frac{\partial G_i^{(e)}}{\partial A_i} = \nu^{(e)} K_k^{(e)} \delta_i^{(e)} \delta_i^{(e)} + \frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial A_i} \sum_{k=1}^6 K_k^{(e)} \cdot A_i^{(e)} \delta_i^{(e)} \delta_i^{(e)} \quad (10)$$

여기서 각각의 계수는 다음과 같다.

$$K_k^{(e)} = \int (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot (\nabla \times \vec{N}_j) dv \quad (11)$$

$$\frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial A_i} = \frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial B^2} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial A_i} \quad (12)$$

$$\frac{\partial B^2}{\partial A_i} = 2 \cdot \sum_{k=1}^6 K_k \cdot A_k \quad (13)$$

여기에서, $\nu^{(e)}$ 는 자속밀도에 대한 함수로 $\nu^{(e)} = f(B^2)$ 로 표현이 되어지며, B 는 각 요소 (e) 에서의 자속밀도이고, $\delta_i^{(e)}$, $\delta_j^{(e)}$ 는 각각 그 요소 (e) 에 i 번 변, j 번 변이 포함되어져 있는 경우만 1이고 그 외의 경우는 0이다.

2.2 오차추정

정자장 문제에서 계의 연속조건에 의하면, 그림 2와 같이 요소 e_1 과 e_2 의 경계면 S 에서 다음의 연속조건을 만족

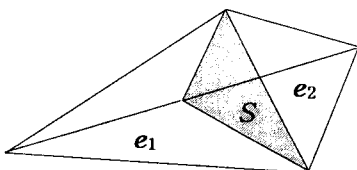


Fig. 2. Interface of two adjacent elements

해야 한다.

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (14)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (15)$$

여기에서 B_n 과 H_t 는 각각 경계면에서 자속밀도의 법선 방향성분과 자계의 세기의 접선방향 성분을 나타낸다. 그런데 변 요소를 이용하는 경우 그 형상함수가 Lagrange 보간함수로부터 유도되기 때문에 자속밀도의 법선방향 성분의 연속조건은 항상 자동으로 만족되나, 자계의 세기의 연속조건은 해석 결과에 따라 만족되지 않을 수도 있다 [2,3]. 이는 유한요소해석의 결과가 부정확하기 때문에 발생하는 것으로, 이를 이용하여 요소 e_1 의 경계면 S 에서의 오차를 다음과 같이 추정한다.

$$\varepsilon_{e_1}^S = (|H_t - \overline{H}_t| + |H_r - \overline{H}_r|) \cdot A_S \quad (16)$$

여기서, A_S 는 경계면 S 의 면적이고, t 와 r 는 각각 경계면 S 의 두 개의 접선방향 성분을 의미하며, $\overline{H}_t, \overline{H}_r$ 는 경계면 S 에서 다음과 같이 추정된 접선성분이다.

$$\overline{H}_t = \theta H_{1t} + (1 - \theta) H_{2t} \quad (17)$$

$$\overline{H}_r = \theta H_{1r} + (1 - \theta) H_{2r} \quad (18)$$

여기서, 첨자 1,2는 각각 요소 e_1 과 요소 e_2 를 뜻하며 θ 는 두 요소의 형상과 투자율을 고려하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\theta = \frac{\mu_1}{d_1} / \left(\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right) \quad (19)$$

여기서, d_i 는 i 번 요소의 중심에서 경계면까지의 거리를 나타낸다. 이를 이용하여 사면체 요소 e 에서의 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_e = \sum_{s=1}^4 \varepsilon_e^s \quad (20)$$

2.3 요소분할

추정된 오차에 의해 상대적으로 큰 오차를 갖는 요소는 오차의 크기에 따라 세분된다. 요소를 세분하는 방법으로 이분법을 사용하였다. 이분법은 요소를 구성하는 변 중에서 가장 긴 변의 중심에 점을 발생시키고, 이 점과 마주 보는 변의 두 꼭지점을 연결하여 요소를 둘로 나누는 방법이다[1-4]. 그림 3은 본 논문에서 이분법을 이용하여 사면체 요소를 세분하는 과정을 나타내고 있다. 즉, 요소를 구성하는 6개의 변 중, 길이가 긴 3개의 변이 분할되는 경우를 나타내고 있다. 이 과정은 분할하고자 하는 변이 정해지면 이 변을 포함하지 않는 두 절점과 분할되는

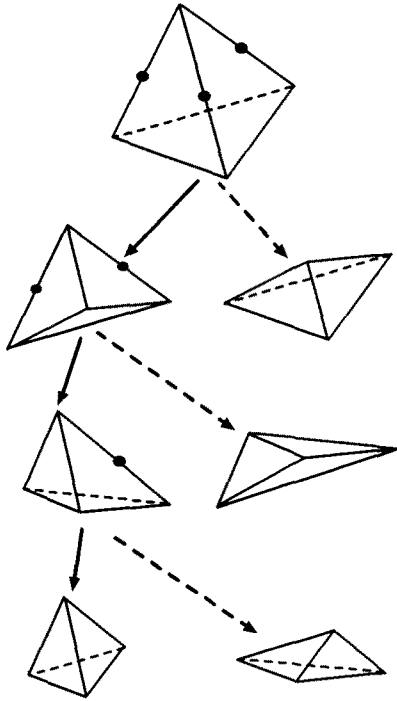


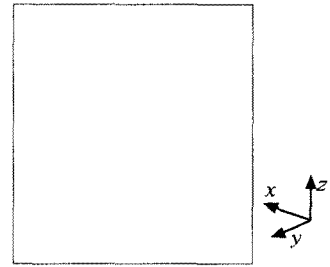
Fig. 3. Mesh refinement by bisection method

변의 중점에 발생된 새로운 점으로 구성되는 면을 새로 발생시켜 두 개의 요소로 분할하는 과정의 반복이다. 이때 세분되는 요소의 질을 좋게 하기 위하여 가장 긴 변부터 분할하게 된다.

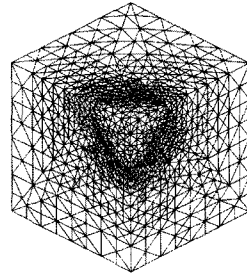
2.4 해석 결과

제안된 방법을 우선 $I[T]$ 의 균등한 외부 자계에 구형 자성체가 놓여 있는 경우의 3차원 정자장 문제의 해석에 적용하였다. 자성체의 비투자율은 1,000이며, 초기 요소망은 그림 5에 나타난 것과 같이 11개의 사면체 요소로 구성되어 있다. 오차 추정과 요소 세분의 과정을 반복함에 따라 표 1에 나타난 바와 같이 요소수가 증가하였으며, 재분할 과정을 6회 반복한 후 그림 5에 나타난 51,297개의 요소가 얻어졌다. 그림 6은 6회 반복 후 구해진 자계의 분포를 나타내고 있다. 한편, 표 1은 요소 세분의 과정을 반복함에 따라 요소의 질의 변화를 나타내고 있는데, 초기 요소망에 비하여 점차로 요소의 질이 나빠지고 있음을 알 수 있다.

두 번째로 개발된 알고리즘을 비선형성을 갖는 모델의 해석에 적용하였다. 그림 6은 TEAM Problem 13번 모델로 코일에는 1000[AT]의 전류가 흐르고 이용된 자성체는 그림 7에 나타난 비선형성을 갖는다. 이 모델은 특히 자성체의 일부에 자속이 집중되어 심하게 포화되기 때문에 정밀한 해석이 어렵다. 해석을 위한 초기요소망은 15,208개의 사면체 요소로 구성되어있고 2번의 반복 과정 후에 48,573개의 요소가 발생되었다. 해석 결과 자속 밀도의 분포는 그림 8과 같다. 해석의 정밀도를 확인하기

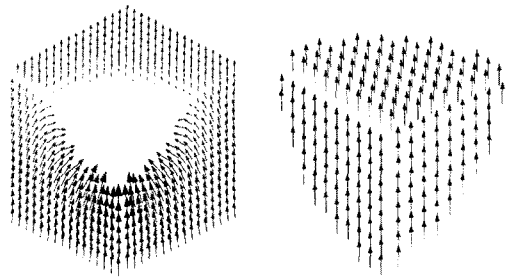


(a) Initial grid



(b) Refined grid

Fig. 5. The initial and refined grids.



(a) Outside of the sphere (b) Inside of the sphere

Fig. 6. Magnetic field distribution at the refined grid.

Table 1. Minimum solid angle of the worst elements.

Number of refinement	Number of Element	Minimum solid angle
0	11	0.03178
1	78	0.02767
2	209	0.02047
3	846	0.02047
4	3898	0.02047
5	15501	0.02047
6	51297	0.01863

위하여 자성체 channel 아래의 공기중에서 자속밀도를 계산하여 적응 유한요소법을 이용하지 않은 경우(요소수 57424개)의 해석 결과와 함께 측정값과 비교하여 그림 9에 나타내었다. 이로부터 적응 유한요소법을 이용하면 상대적으로 적은 수의 요소수로도 비교적 정확한 해석 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 변 요소를 이용한 3차원 적응유한요소법을 제안하였다. 제안된 방법에서는 경계면에서의 자계 연속조건을 이용한 오차 추정법을 제안하였고, 요소 세분은 이분법을 이용하여 수행하였다. 제안된 방법은 간단한 정자장 문제와 비선형 문제(TEAM problem #13)에 적용하여 그 유용성을 확인하였다. 그러나, 해석 결과로부터 이분법을 이용한 요소 세분은 요소 세분이 진행됨에 따라 요소의 질을 떨어뜨림을 알 수 있었다. 따라서, 적응 유한요소법이 더욱 효과적이기 위해서는 요소의 질을 유지할 수 있고, 또 나아가 초기 요소망의 질이 나쁜 경우에도 요소의 질을 향상 시킬수 있는 요소세분 방법에 대한 연구가 이루어져야 할 것으로 사료된다.

[1] 김형석, 정현교, 한송엽, "3차원 적응 유한요소법을 위한 사면체 요소세분에 관한 연구", 전기학회 논문지, 제39권 9호, pp. 921-927, Sep. 1990
 [2] H.S.Kim, S.P.Hong, K.Choi, H.K.Jung and S.Y. Han, "A three dimensional adaptive finite Element method for magnetostatic problems", IEEE Trans. on Magn, Vol.27, No.5, pp.4081-4084. Sep. 1991
 [3] S.Y. Han, C. Calmels, G. Meunier and J.L. Coulomb, "A Posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation", IEEE Trans. on Magn, Vol.24, No.1, pp.315-317. Jan. 1988
 [4] M.Rivara, "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques", IJNME, Vol. 20, pp.745-756, 1984

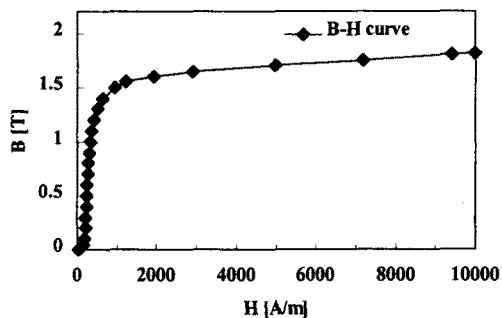
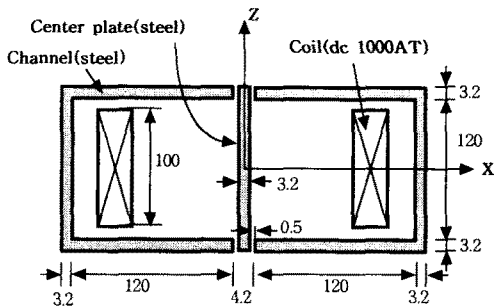
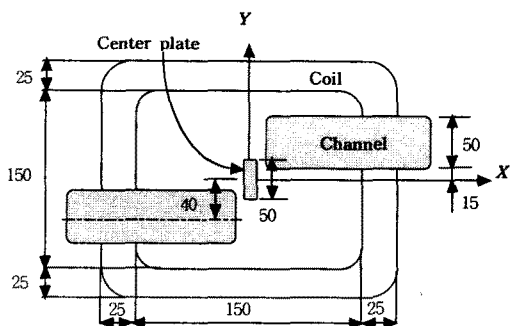


Fig. 7. B-H curve



(a) Front view



(b) Plane view

Fig. 6. Model for 3D non-linear problem(TEAM13)

[참 고 문 헌]

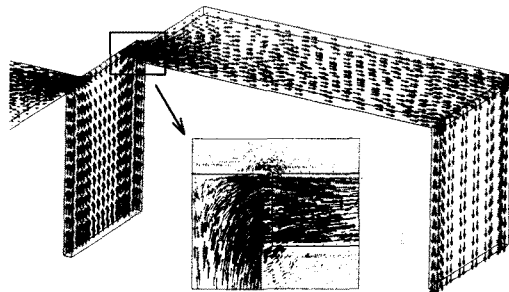


Fig. 8. Flux distribution in steel

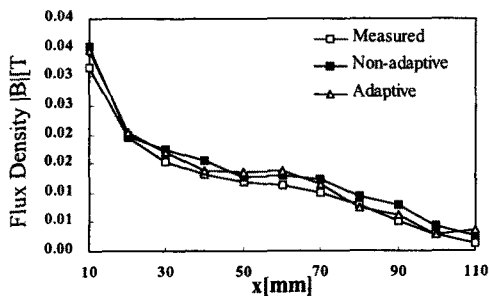


Fig. 9. Flux density in the air under channel