

## 회전 방향으로 매개 가진하는 외팔보의 동적 해석

임형빈 \* · 정진태 \*\*

### Dynamic Analysis of a Cantilever Beam with the Parametric Excitation in Rotation

Hyung-Bin Im, Jintai Chung

**Key Words :** Dynamic Stability (동적 안정성), Cantilever Beam (회전 외팔보), Multiple Time Scale Perturbation Method (다중시간척도 섭동법), Oscillating Rotary Motion (액동하는 회전 운동), Stability Diagram (안정성 도표)

#### Abstract

Dynamic stability of a rotary oscillating cantilever beam is presented in this study. Using the stretch deformation instead of the conventional axial deformation, three linear partial differential equations are derived from Hamilton's principle and transformed into dimensionless forms. Stability diagrams of the first order approximate solutions are obtained by using the multiple scale perturbation method. The stability diagrams show that relatively large unstable regions exist near the combination of the first chordwise bending natural frequency and the first stretch natural frequency. This result is verified by using the generalized- $\alpha$  method.

#### 1. 서 론

외팔보 구조물의 형태는 여러 가지 공학적인 예제에서 발견되는 중요한 구조형태이다. 회전하면서 진동하는(액동하는 각속도를 가진) 외팔보의 전형적인 예는 광학업 장치의 데이터를 읽어 들이는 부분이다. 이런 구조물은 각속도가 항상 액동하는 주파수 성분을 갖는다. 그리고 이런 액동 성분은 매개변수 공진과 같은 동적 불안정성을 야기할 수 있다. 따라서, 이런 장치들은 안정성을 확실히 보장할 필요가 있다.

회전하는 외팔보에 대한 연구는 상당수 많은 연구가 있어 왔다. 참고문헌(1,2)에서 회전 외팔보의 모드 해석에 관한 방법이 연구되었다. 더 나아가 보들의 복잡한 형상과 효과에 대한 연구들은 참고문헌(3~9)에서 자세히 설명되었다. 그리고, 맥동 가속도 운동으로 인해 발생하는 동적 불안정성에 관한 연구는 주로 보 구조물에 대하여 이루어져 왔으며, 참고문헌(10~11)들이 대표적이다. 이들 대부분은 동적 해석 방법으로 참고문헌(12)에서 제

시된 다중시간척도 섭동법(multiple time scale perturbation method)으로 연구되었다.

본 연구에서는 우선 회전외팔보의 진동에 대한 운동방정식을 헤밀턴의 원리를 이용하여 선형 편미분 방정식 형태의 지배 방정식을 유도하였다. 유도 과정에서 면내 및 면외 변위, 그리고 길이 방향의 인장 변위를 사용하였다. 그런 연후에 각 속도 성분을 액동하는 형태로 바꾸고 나서 무차원화된 형태의 방정식을 얻었다. 이 방정식에 다중 시간척도 섭동법을 적용하여 액동하는 각속도의 무차원수와 주파수의 무차원수에 따른 면내의 동적 불안정 영역을 나타내는 안정성 도표(stability diagram)를 도시하였다. Generalized- $\alpha$  법<sup>(13)</sup>을 이용하여 동적 안정 영역과 불안정 영역의 시간응답을 살펴봄으로써 그 안정성 도표의 신뢰성을 입증하였다. 본 연구에서 얻어진 안정성 도표는 광학업 장치의 설계에 참고 자료로 사용될 수 있을 것이라 생각된다.

\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\* 한양대학교 공학대학 기계공학과

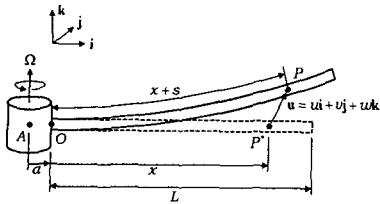


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam in rotary oscillating motion.

## 2. 운동방정식 유도

Fig. 1에서 길이가  $L$ 인 외팔보가 반지름이  $a$ 인 강체축의  $O$  점에 고정되어 있다. 외팔보는 Euler 보로서 재질은 균일하며 등방성이며 대칭축에 대해 회전각속도  $\Omega$ 로 맥동한다. 직교단위벡터  $i$ ,  $j$ ,  $k$ 는 축과 함께 회전하며 보의 변형은 점  $P^*$  가 점  $P$ 로 이동할 때 일반적으로 축방향변위  $u$ , 면내변위  $v$  그리고 면외변위  $w$ 로 각각 표현된다.

서론에서 언급한 바와 같이 인장변위  $s$ 의 사용은 축방향변위  $u$ 의 사용보다 유리하다.  $s$  와  $u, v, w$ 의 관계는 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$u = s - h_v - h_w \quad (1)$$

$$h_v = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad h_w = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

회전 외팔보가  $\Omega$ 로 맥동할 때 운동 에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P dx \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{v}_P$ 는 속도벡터이며 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = (\dot{u} - \Omega v) \mathbf{i} + [\dot{v} + \Omega(a + x + u)] \mathbf{j} + \dot{w} \mathbf{k} \quad (4)$$

한편 보의 변형에너지

$$U = \frac{1}{2} E \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

이다. 여기서  $E$ 는 영의계수,  $I_y, I_z$ 는  $y, z$  축에 대한 면적관성모멘트이다.

운동방정식은 다음 식과 같은 헤밀턴의 원리를 적용한다.

$$\int_1^2 (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (6)$$

여기서  $\delta T, \delta U$ 는 각각 운동에너지와 변형에너지

의 변분이고,  $\delta W_{nc}$ 는 비보존력의 변분을 나타낸다.

헤밀턴의 원리를 적용할 때  $z$  방향의 비보존력을 고려하고 선형화하면 다음과 같은 선형 편미분 방정식들을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \rho A \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) \\ & - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho A \Omega^2 (a + x) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s \right) + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ & - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ & = -\rho A \dot{\Omega} (a+x), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\ & = p_w \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $p_w$ 는  $z$  방향에서의 단위길이 당 작용력이고, 식 (7)와 (8)은 서로 연성 되어 있는 반면 식 (9)는 다른 방정식과 연성 되어 있지 않다. 식 (7)와 (8)로 묘사되는 운동은 면내방향 운동 그리고 식 (9)로 표현되는 운동은 면외방향 운동이다. 식 (7)-(9)에 상응하는 경계조건들은 다음과 같다.

$$s = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at } x = L \quad (11)$$

## 3. O|산화

본 논문에서는 편미분 방정식 (7)-(9)로부터 해를 구하는 편의성을 위해서 다음의 몇 가지 무차원수를 정의하였다.

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{a}{L}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{AL^2}{I}}, \quad T = \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}} \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 각속도를 맥동성분을 포함한 식으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\Omega = \Omega_s \cos \omega t \quad (13)$$

여기서  $\Omega_s$ 는 각속도의 크기를 나타내고  $\omega$ 는 각속도의 맥동을 나타내는 가진 주파수이다.

맥동을 나타내는 가진 주파수에 대한 무차원수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega^* = T\omega \quad (14)$$

식(12)-(14)를 편미분방정식 (7)-(9)에 적용하면 다음과 같은 무차원화된 편미분 방정식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 s^*}{\partial t^{*2}} - 2(T\Omega_s)\cos\omega^*t^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} \\ & - (T\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \cdot s^* + (T\Omega_s)\omega^* \sin\omega^*t^* \cdot v^* \quad (15) \\ & - \alpha^2 \frac{\partial^2 s^*}{\partial x^{*2}} = (T\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* (\delta + x^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} + 2(T\Omega_s)\cos\omega^*t^* \frac{\partial s^*}{\partial t^*} - (T\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \cdot v^* \\ & - (T\Omega_s)\omega^* \sin\omega^*t^* \cdot s^* + \frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \\ & - (T\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \left[ \delta(1-x^*) + \frac{1}{2}(1-x^{*2}) \right] \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right\} \\ & = (T\Omega_s)\omega^* \sin\omega^*t^* (\delta + x^*) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} \\ & - (T\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \left[ \delta(1-x^*) + \frac{1}{2}(1-x^{*2}) \right] \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right\} \quad (17) \\ & = \frac{P_w L^3}{EI} \end{aligned}$$

다음의 식들은 고정외팔보의 각 방향의 eigen 함수와 새로운 무차원 변수  $\varepsilon$ 의 정의이다.

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x)p_n(t), \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)q_n(t), \quad (18) \end{aligned}$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)r_n(t)$$

$$\varepsilon = T\Omega_s \quad (19)$$

식(15)-(17)에 식(18)-(19)를 적용하고 무차원을 나타내는 첨자(\*)를 생략하고 표현하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ M_{mn}^s \ddot{p}_n - 2\varepsilon \cos\omega t G_{mn}^{sv} \dot{q}_n M_{mn}^s \ddot{p}_n \right. \\ & \left. - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t M_{mn}^s p_n + \varepsilon \omega \sin\omega t G_{mn}^{sv} q_n \right. \\ & \left. + \alpha^2 K_{mn}^s p_n \right] = \varepsilon^2 \cos^2 \omega t f_m^s \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ M_{mn}^v \ddot{q}_n + 2\varepsilon \cos\omega t G_{mn}^{vs} \dot{p}_n \right. \\ & \left. - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t M_{mn}^v q_n - \varepsilon \omega \sin\omega t G_{mn}^{vs} p_n \right. \\ & \left. + K_{mn}^v q_n + \varepsilon^2 \cos^2 \omega t K_{mn}^{\Omega} \right] = \varepsilon \omega \sin\omega t f_m^v \quad (21) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{mn}^s &= \int_0^1 s_m s_n dx, \quad M_{mn}^v = \int_0^1 v_m v_n dx, \\ G_{mn}^{sv} &= \int_0^1 s_m v_n dx, \quad G_{mn}^{vs} = \int_0^1 v_m s_n dx, \\ K_{mn}^s &= \int_0^1 s'_m s'_n dx, \quad K_{mn}^v = \int_0^1 v'_m v'_n dx, \quad (22) \\ K_{mn}^{\Omega} &= \int_0^1 \left[ \delta(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] v'_m v'_n dx, \\ f_m^s &= \int_0^1 (\delta+x) s_m dx, \quad f_m^v = \int_0^1 (\delta+x) v_m dx \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ M_{mn}^w \ddot{r}_n + K_{mn}^w q_n + \varepsilon^2 \cos^2 \omega t K_{mn}^{\Omega w} \right] = Q_m \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{mn}^w &= \int_0^1 w_m w_n dx, \\ K_{mn}^w &= \int_0^1 w'_m w'_n dx, \\ K_{mn}^{\Omega w} &= \int_0^1 \left[ \delta(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] w'_m w'_n dx, \quad (24) \\ Q_m &= \int_0^1 w_m \frac{P_w L^3}{EI} dx \end{aligned}$$

식(20),(21),(23)에서  $s_n(x), v_n(x), w_n(x)$ 가 각각 고정외팔보의 eigen 함수이자 orthonormal 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \ddot{p}_m - 2\varepsilon \cos\omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{sv} \dot{q}_n - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t p_m \\ & + \varepsilon \omega \sin\omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{sv} q_n + \omega_m^{s2} p_m \\ & = \varepsilon^2 \cos^2 \omega t q_m \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_m + 2\varepsilon \cos\omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{vs} \dot{p}_n - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t q_m \\ & - \varepsilon \omega \sin\omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{vs} p_n + \omega_m^{v2} q_m \quad (26) \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}^{\Omega} q_n = \varepsilon \omega \sin\omega t f_m^v$$

$$\ddot{r}_m + \omega_m^{w^2} r_m + \varepsilon^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}^{\Omega w} r_n = Q_m \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned}\omega_m^{s^2} &= \delta_{mn} \alpha^2 K_{mn}^s, \\ \omega_m^{v^2} &= \delta_{mn} K_{mn}^v, \\ \omega_m^{w^2} &= \delta_{mn} K_{mn}^w\end{aligned}\quad (28)$$

여기서  $\delta_{mn}$ 은 크로넥커 텔타변수이다.

#### 4. 동적 안정성 해석 방법

본 논문에서는 면내 방향의 각속도에 맥동 성분을 포함할 경우에 관한 동적 안정성을 해석하기 위해 다중시간척도 섭동법을 사용한다. 식(25)-(27)에서 면내 방향만을 고려한다. 따라서 식(25)과 (26)에만 다중시간척도 섭동법을 적용한다.

다중시간척도 섭동법을 적용하기 위해서 식(25)과 (26)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$p_m = p_{m0}(T_0, T_1) + \varepsilon p_{m1}(T_0, T_1) + \dots \quad (29)$$

$$q_m = q_{m0}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{m1}(T_0, T_1) + \dots$$

여기서  $T_0, T_1$ 은 시간척도(time scale)를 나타내며, 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t \quad (30)$$

식(30)에 의한 시간 미분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots\end{aligned}\quad (31)$$

여기서  $D_k = \partial/\partial T_k$ 이다. 식(29)-(31)을 식(25)-(26)에 대입하고,  $O(\varepsilon^1)$ 까지 고려하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$O(\varepsilon^0)$ :

$$D_0^2 p_{m0} + \omega_m^{s^2} p_{m0} = 0 \quad (32)$$

$$D_0^2 q_{m0} + \omega_m^{v^2} q_{m0} = 0 \quad (33)$$

$O(\varepsilon^1)$ :

$$\begin{aligned}D_0^2 p_{m1} + \omega_m^{s^2} p_{m1} &= -2D_0 D_1 p_{m0} \\ &+ 2 \cos \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{sv} D_0 q_{n0} \\ &- \omega \sin \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{sv} q_{n0}\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}D_0^2 q_{m1} + \omega_m^{v^2} q_{m1} &= -2D_0 D_1 q_{m0} \\ &- 2 \cos \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{vs} D_0 p_{n0} \\ &+ \omega \sin \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{vs} p_{n0} + \omega \sin \omega T_0 f_m^v\end{aligned}\quad (35)$$

식(32)와 (33)의 일반해를 구하면 다음과 같이 구

할 수 있다.

$$p_{m0} = A_m \exp(i\omega_m^s T_0) + \bar{A}_m \exp(-i\omega_m^s T_0) \quad (36)$$

$$q_{m0} = B_m \exp(i\omega_m^v T_0) + \bar{B}_m \exp(-i\omega_m^v T_0) \quad (37)$$

여기서  $\bar{A}_m, \bar{B}_m$ 는 각각  $A_m, B_m$ 의 켤레 복소수를 나타낸다. 식(36)과 (37)을 식(34),(35)에 대입하고 그 특이해를 구하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p_{m1} = \sum_n G_{mn}^{sv} iB_n \left\{ \frac{\omega_n^v + \frac{1}{2}\omega}{\omega_m^{s^2} - (\omega_n^v + \omega)^2} \exp[i(\omega_n^v + \omega)T_0] \right. \\ \left. + \frac{\omega_n^v - \frac{1}{2}\omega}{\omega_m^{s^2} - (\omega_n^v - \omega)^2} \exp[i(\omega_n^v - \omega)T_0] \right\} + cc \quad (38)$$

$$q_{m1} = \sum_n G_{mn}^{vs} iA_n \left\{ \frac{\omega_n^s + \frac{1}{2}\omega}{(\omega_n^s + \omega)^2 - \omega_m^{v^2}} \exp[i(\omega_n^s + \omega)T_0] \right. \\ \left. + \frac{\omega_n^s - \frac{1}{2}\omega}{(\omega_n^s - \omega)^2 - \omega_m^{v^2}} \exp[i(\omega_n^s - \omega)T_0] \right\} + cc \quad (39)$$

여기서  $cc$ 는 켤레항들을 나타낸다. 이 근들을 구하는 과정은 참고문헌(12)에 잘 나타나 있으므로 여기서는 생략한다. 그 과정에서 우리는  $A_k, B_l$ 을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}A_k &= a_k \exp(-i\lambda T_1) \\ B_l &= b_l \exp[i(\bar{\lambda} + \sigma)T_1]\end{aligned}\quad (40)$$

여기서  $a_k, b_l$  그리고  $\lambda$ 는 복소수이다. 또,  $\bar{\lambda}$ 는  $\lambda$ 의 켤레 복소수이고,  $\sigma$ 는 매개 변수이다. 만약  $\lambda$ 가 허수부를 가지면 이 시스템의 근들은 발산하게 된다. 따라서, 식(36)과 (37)의 근들은 불안정하게 된다.  $\lambda$ 에 관한 특성 방정식을 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Case: } \omega = \omega_k^s + \omega_l^v + \varepsilon\sigma \quad (41)$$

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Lambda_{kl} = 0$$

여기서

$$\Lambda_{kl} = \frac{(G_{kl}^{sv})^2}{\omega_k^s \omega_l^v} (\omega_k^s - \omega_l^v)^2 \quad (42)$$

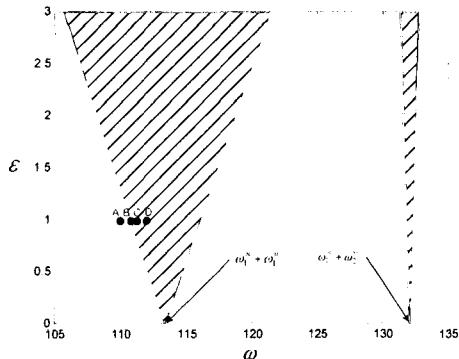
식(41)에서  $\lambda$ 가 실수근을 가지려면  $\sigma^2 \geq 1/4 \Lambda_{kl}$ 이어야 한다. 여기서 경계치값의  $\sigma$ 를 구하게 되면 다음과 같은 안정과 불안정을 판별할 수 있는 transition curve를 구할 수 있다.

$$\omega = \omega_k^s + \omega_l^v \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_{kl}} \quad (43)$$

이 식(43)을 이용해서  $\lambda$ 가 실수근을 갖는 안정성 영역과 복소수근을 갖는 불안정성 영역을 갖는 안정성 도표를 구할 수 있다.

**Table 1.** Dimensionless natural frequencies for the chordwise motion when  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = 70$ .

|                                  | 1st     | 2nd     | 3rd     | 4th     |
|----------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| Bending mode ( $\omega_l^y$ )    | 3.516   | 22.035  | 61.697  | 120.902 |
| Stretching mode ( $\omega_k^s$ ) | 109.956 | 329.867 | 549.779 | 769.69  |

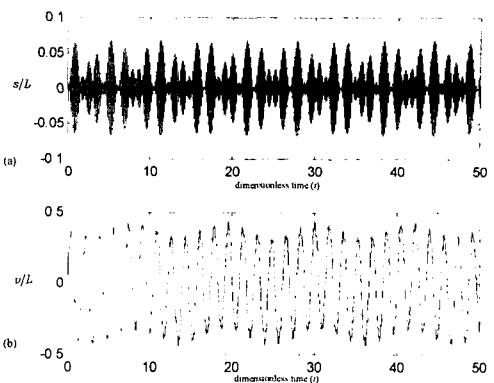


**Fig. 2** Stability diagram of a cantilever beam in oscillating rotary motion

## 5. 안정성 판별 및 시간응답

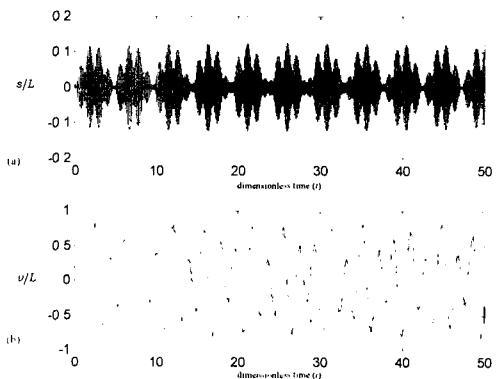
Table 1 은 인장 방향의 무차원 고유진동수  $\omega_k^s$  와 면내 굽힘 방향의 무차원 고유진동수  $\omega_l^y$  를 나타낸다. 이 고유진동수들과 앞장에서 수행한 안정성 해석 방법을 이용하여 Fig 2 에서 보는 바와 같은 1 차 확장에 대한 다중시간적도법에 의해 안정성 도표를 얻었다. 이 안정성 도표는 무차원수  $\varepsilon$  과  $\omega$  에 의해서 결정되어지는 도표이다. 빛금 친 부분은 불안정 영역을 나타낸다. 그림에서 보는 것처럼  $\omega = \omega_l^y + \omega_k^s$  근처에서 상대적으로 넓은 불안정 영역이 나타난다.

Fig 3 에서 Fig 6 은 Fig 2 에서 표시한 A, B, C, D 그리고 D 점들에 대한 시간 응답을 보여준다. A 와 B 는 안정 영역에서의 점이고 C 와 D 는 불안정 영역의 점들이다. B 는 거의 경계치 부근의 점이고 C 는 불안정 영역의 경계치 부근을 나타낸다. 이 시간 응답은 초기치를 모두 0 으로 하였고, generalized- $\alpha$ 법<sup>(13)</sup>을 사용하여 얻어진 결과들이다. Fig 3 과 Fig 4 는 안정적인 반응을 보이는 반면 Fig 5 와 Fig 6 은 불안정적으로 발산하는 반응을 보인다. 특히, 경계치 근처의 점인 B 점에서는 맥놀이 현상과 같은 반응을 나타낸다. 그리고 C 점은 D 점과 같이 발산은 하지만 그 정도가 D 점보다 낮은 지수로 발산하는 반응을 보인다.



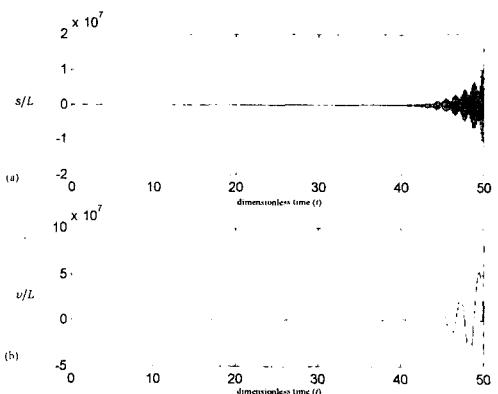
**Fig. 3** Deformation time histories at  $x = 1$  for point A.

- (a) the dimensionless stretch deformation  $s/L$ ,
- (b) the dimensionless chordwise deformation  $v/L$



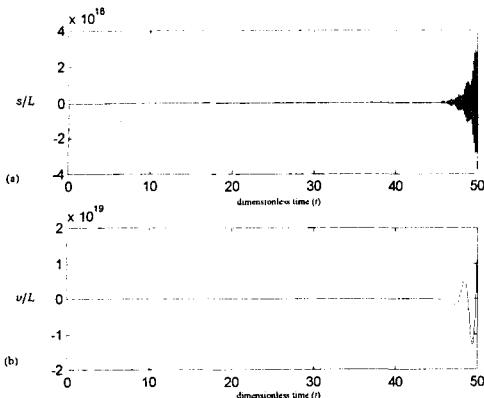
**Fig. 4** Deformation time histories at  $x = 1$  for point B.

- (a) the dimensionless stretch deformation  $s/L$ ,
- (b) the dimensionless chordwise deformation  $v/L$



**Fig. 5** Deformation time histories at  $x = 1$  for point C.

- (a) the dimensionless stretch deformation  $s/L$ ,
- (b) the dimensionless chordwise deformation  $v/L$



**Fig. 6** Deformation time histories at  $x = 1$  for point D.  
 (a) the dimensionless stretch deformation  $s/L$ ,  
 (b) the dimensionless chordwise deformation  $v/L$

## 6. 결 론

본 논문에서는 맥동 각속도를 가진 외팔보의 구조물에 대한 동적 안정성 해석을 수행하였다. 안정성 해석은 회전 외팔보를 헤밀턴의 원리를 이용해 운동 방정식을 유도한 후에 각속도를 조화함수의 형태로 바꾸고 나서 무차원화시킨 방정식을 구한 후에 다중시간척도 섭동법을 이용하여 안정성 도표를 구하였다. 안정성 도표를 보면 첫번째 길이 방향 무차원 고유 진동수와 첫번째 면내 방향 굽힘의 무차원 고유진동수의 합의 값 근처에서 상대적으로 넓은 불안정 영역이 나타났다. 도표에서 보듯이 불안정 영역들은 면내 굽힘 방향의 고유진동수와 길이 방향의 고유진동수와는 서로 연관되어 있지만, 면외 방향의 고유진동수와는 연관되어 있지 않음을 알 수 있다. 이 안정성 도표의 신뢰성은 generalized- $\alpha$ 법에 의한 시간 응답에 의해 입증되었다.

## 참고문헌

- (1) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural frequencies of radial rotating beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (2) Bauer, H. F., 1980, "Vibration of a rotating uniform beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, pp. 177~189.
- (3) Yoo, H. H. and Shin, S. H., 1998, "Vibration analysis of rotating cantilever beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, pp. 807~828.
- (4) Yoo, H. H., Ryan, R. R., and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of flexible beams undergoing overall motion," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, pp.

261~278.

- (5) Chung, J. and Yoo, H. H., 2001, "Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the Finite Element Method," *Journal of Sound and Vibration*, Accepted for publication.
- (6) Park, J. H. and Kim, J.H., 1999, "Dynamic analysis of rotating curved beam with a tip mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, pp.1017~1034.
- (7) Fallahi, B. and Lai ,S. H.-Y., 1994, "An improved numerical scheme for characterizing dynamic behavior of high-speed rotating elastic beam structures," *Computer & Structures*, Vol. 50, pp.749~755.
- (8) Lai, Steven H. Y., 1991, "Nonlinear Finite Element Modeling of a high speed rotating Timoshenko beam structure," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 36, pp.849~861.
- (9) Chen, C. I., Mucino, V. H. and Spyros, C. C., 1994, "Flexible rotating beam: Comparative modeling of isotropic and composite material including geometric non-linearity," Vol. 178,pp.591-605.
- (10) Beal, T., 1965, "Dynamic stability of a flexible missile under constant and pulsating thrusts," *J. AIAA*, Vol. 3, pp.486~494.
- (11) Hyun, S. H. and Yoo, H. H., 1999, "Dynamic modeling and stability analysis of axially oscillating cantilever beams," *Journal of Sound and Vibration* , Vol.228, pp.543~558.
- (12) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric excitations of linear systems having many degrees of freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 62, pp.375~381.
- (13) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 371~375.