

# 형상 최적화를 통한 구조물의 고유진동수 최대화

## Maximization of the natural frequency of a structure using shape optimization

서 범 석\* 박 윤 식\*\*  
Beom-Seok Seo and Youn-Sik Park

**Key Words :** Shape Optimization(형상 최적화), Beam Stiffener(보 보강재), Natural Frequency(고유진동수)

### ABSTRACT

구조최적화는 기계구조물의 동특성을 변경하기 위하여 필수적으로 수행되어야 할 요소이다. 어떠한 방법을 택하여 보다 효율적으로 수행할 것 인지가 엔지니어의 관심일 것이다. 구조최적화는 설계변수에 따라 치수최적화, 물성치최적화, 형상최적화 등으로 나눌 수 있다. 형상 최적화는 구조물의 유한요소모델을 기본으로 경계의 형상이나 절점의 형상, 회전 등을 설계 변수로 삼는 것이다. 고유진동수를 높이거나 모드형상을 제어하기 위하여 평판에 보강재를 붙이는 경우가 있다. 이때 보강재의 위치나 치수 형상 등이 중요한 변수가 될 수 있다. 본 논문에서는 평판의 고유진동수를 극대화 하기위해 보 보강재를 붙이는 문제에서 보의 회전을 설계 변수로 삼아 최적설계를 수행 할 것이다.

설계 변수로 삼는 형상최적화(Shape optimization)를 수행할 것이다. 실제 적용 대상으로 평판에 보 보강재를 붙이는 문제에 대하여 보의 회전(Rotation)을 변수로 하여 평판의 첫번째 고유진동수를 최대화하는 문제를 다룰 것이다. 상용코드인 MSC/NASTRAN의 최적설계 모듈<sup>(1)</sup>을 이용하여 최적 형상기저벡터를 구하고 최적화 과정을 수행 할 것이다,

## 1. 서론

구조변경은 기계구조물의 동특성 개선을 목적으로 구조물의 첨가, 삭제 그리고 형상 및 물성치 변경을 도출하기 위한 광범위한 연구를 지칭한다. 즉, 구조 진동학(Structural Vibration)의 한 분야로서 설계변수를 선정하고 최적화(Optimization) 알고리즘을 이용하여 최적화를 수행하는 과정을 포함하게 된다. 일반적으로 구조최적화(Structural Optimization)는 유한요소모델(FEMmodel)을 기반으로 하여 수행 하며, 그 설계 변수를 무엇으로 하느냐에 따라 치수 최적화(Sizing Optimization), 물성치 최적화 (Material Optimization), 형상최적화(Shape optimization) 등으로 분류할 수 있다.

실제 적용에 있어서 구조물의 치수를 변경이나 물성치를 바꾸는 것은 용이하지 않거나 불가능한 경우가 있다. 이러한 경우는 구조물의 경계 형상(Boundary shape)이나 회전(Rotation) 등을 설계 변수로 하는 형상 최적화를 수행하여야 할 것이다.

본 연구에서는 구조물의 진동을 저감하기 위해 구조변경을 수행 하는데 있어서 유한요소 모델을 기반으로 하여 구조물의 절점형상(Nodal shape), 회전(Rotation), 경계형상(Boundary shape)등을

## 2. 문제 정의

본 연구에서는 형상최적화의 기법을 이용해 평판(Plate)에 보(Beam) 보강재를 붙이는 문제에 대해서 적용해 보겠다. 평판에 보 보강재를 붙이는데 있어서 그 동안의 연구는 평판에서의 보의 위치나 개수 등을 가지고 최적화 한 연구가 많았으나, 본 연구에서는 유한 요소 모델의 평판에 보를 붙일 때 그 위치 뿐만 아니라 보의 회전(Rotation)을 고려하겠다.

간략한 진행과정은 다음과 같고, Fig.1에 해석 절차를 요약하였다.

1. 유한 요소모델을 구성한 후 고유진동수 해석을 통해서 고유진동수 및 고유 형상을 구한다.
2. 보 요소를 부착할 위치를 선정하기 위해 평판을 24개의 영역으로 나누고 각 영역의 두께에 대한 고유진동수의 민감도를 구한다.
3. 선정된 위치에 보를 부착한 후 고유진동수 해석을 한다.
4. 빔의 가운데는 고정시킨 채 회전시키는 회전량을 변수로 하여 첫번째 고유진동수를 극대화 시

\* 한국과학기술원 기계공학과 대학원  
E-mail : seobs@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3060, Fax : (042) 869-8220

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

키는 최적화를 수행한다  
5. 결과를 비교한다.

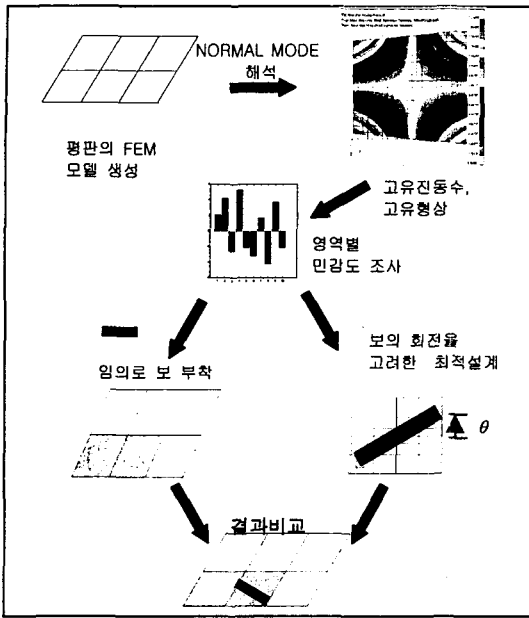


Fig.1 Analysis Procedure

### 3. 배경이론

형상최적화(Shape Optimization)는 구조물을 나타내는 좌표를 설계 변수로 잡는 방법이다. 이 설계변수에는 구조물이 존재하는 영역, 즉 길이나 넓이, 또는 부분 구조물 간에 연결이 있을 때 그 연결의 위치, 각도 혹은 특정한 영역 안에서 구조물이 가질 수 있는 형상을 설계변수로 하는 가장 포괄적인 최적 설계 방법이다. 이 방법의 관건은, 구조물의 형상을 적합한 설계변수를 선정하여 나타내고 그 설계변수에 대한 고유진동수의 민감도를 구하는 것이다. 형상설계는 설계변수의 종류에 따라서 여러 가지로 나눌 수 있겠으나, 본 연구에서는 Continuum Approach에 기반을 둔 유한요소법을 이용한 형상최적화를 다룰 것이다.

Continuum Approach는 구조물을 연속체로 보고 물질미분(Material derivative)를 이용하여 그 경계의 위치가 특정한 함수를 가지고 변할 때 고유진동수의 민감도를 구하여 최적 설계를 진행한다. 관련연구를 보면, Choi 등은 Control Volume Approach를 통하여 구조물의 영역이 변할 때의 고유진동수 민감도를 구하였다<sup>(2,3,4)</sup>. Liu와 Tada는 BEM을 사용하여 경계면의 위치에 대한 고

유진동수의 민감도를 구하였다<sup>(5,6)</sup>. Braibant는 이때 B-Spline을 사용하여 계산의 효율을 높였다<sup>(7)</sup>. Son은 Control Volume 방법을 사용해 구조물의 경계조건을 설계변수로 두고 최적 설계를 했다<sup>(8)</sup>.

이러한 연속체 접근법은 유한요소모델을 이용하여 형상최적화를 수행할 때 형상기저벡터(Shape Basis Vector)의 개념을 필요로 한다. 이 개념은 MSC/NASTRAN의 Design Sensitivity and Optimization<sup>(1)</sup>에서 쓰이기도 하는 개념으로 다음과 같이 간략히 설명될 수 있다.

Fig.2의 간단한 Angle Bracket의 모델의 예를 들어보겠다. Fig.2는 Bracket의 경계부분의 절점만을 나타낸 것인데 여기서 설계변수는 절점 1의 y방향 변위와 절점 4의 x방향 변위이다. 또한 경계 부분이 직선을 이루어야 한다는 조건을 준다면 절점 1, 4의 변위에 대한 나머지 절점들의 변위의 관계는 다음 관계를 만족해야 한다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta G_{2x} \\ \Delta G_{2y} \\ \Delta G_{3x} \\ \Delta G_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta G_{1y} \\ \Delta G_{4x} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

또한, 설계변수와 다음의 관계를 고려한다면

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= \Delta G_{1y} \\ \Delta X_2 &= \Delta G_{4x} \end{aligned}$$

설계변수와 절점들의 관계는 다음의 형태가 된다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta G_{1y} \\ \Delta G_{2x} \\ \Delta G_{2y} \\ \Delta G_{3x} \\ \Delta G_{3y} \\ \Delta G_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

식(2)은 각 설계변수의 변화에 따른 절점들의 변화를 나타내는 식이 된다. 우변의 행렬의 각 열이 형상기저 벡터(Shape Basis Vector)가 된다. 식(2)에서 쉽게 알 수 있듯이 첫번째 열은 Fig.3-1의 y방향의 변위를 나타내고 두 번째 열은 Fig.3-2의 x방향의 변위를 나타낸다.

이렇게 형상기저 벡터를 얻게 되면 최적기(Optimizer)를 이용하여 설계변수의 변화에 따른 절점의 변화를 계산하게 된다.

식(2)를 일반화 시키게 되면 다음과 같다.

$$\{\Delta G\}_{m \times 1} = [T]_{m \times n} \{\Delta X\}_{n \times 1} \quad (3)$$

where,  $\{G\}^{i+1} = \{G\}^i + \{\Delta G\}$   
 $\{X\}^{i+1} = \{X\}^i + \{\Delta X\}$

식(3)은 절점의 변위변화를 설계변수 벡터의 변화의 함수로 나타냄을 보여준다. 식(3)에서 행렬  $[T]_{m \times n}$ 은 각 열을 형상 기저 벡터로 갖는 행렬이고, 최적화 문제는 주어진 목적함수와 제약조건을 갖는 문제로써, 설계변수를 조금씩 변화시켜가면서 최적의 변수 값을 찾아내게 된다. 결국, 최적화문제는 식(3)에서 알 수 있듯이 형상 기저벡터의 최적의 선형조합(Linear Combination)을 찾아내는 문제가 된다.

유한 요소 모델을 이용하여 형상 최적화를 수행할 경우 설계변수의 선정과 형상기저벡터의 생성이 가장 중요한 부분이다. BELEGUNDU와 RAJAN은 설계변수가 되는 절점에 가상의 하중을 주어서 나온 절점의 변형 형상을 형상 기저벡터로 이용하여 형상최적화를 수행하였고<sup>(9)</sup>, 형상 최적화 기능을 제공하는 상용코드인 MSC. NASTRAN의 경우도 이러한 형상기저벡터를 생성하기 위해서 절점에 강제변위를 주는 등의 여러가지 방법을 제공한다.<sup>(10)</sup> 절점에 가상의 하중을 주거나 강제변위를 주는 경우는 유사한 경우로써, 실제 유한요소 모델과 절점, 요소, 물성치 등이 같은 보조모델(Auxiliary Model)에 강제 변위를 주게 된다. 이때 정적해석(Static Analysis)을 통해서 나온 절점의 정보를 형상기저벡터로 쓰게 된다.

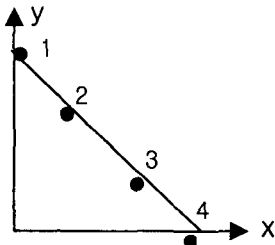


Fig.2 Angle Bracket

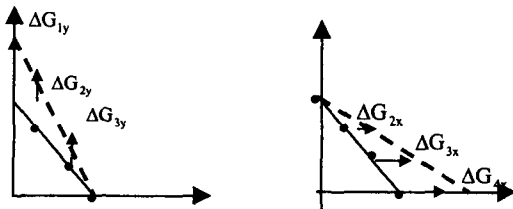


Fig.3-1,2 Variation of nodes

## 4. 해석절차

### 4-1 평판의 고유진동수 해석

평판의 형상은 Fig.4의 유한요소모델과 같고 너비 0.6m, 높이 0.4m, 두께 2mm의 규격을 가지고 물성치는 표.1에 있다. 평판의 규격은 임의로 선정된 것이지만 에어컨 실내기의 후면이나 자동차 차체의 판넬 등의 모델이 될 수 있다. 평판의 유한요소모델은 425개의 절점과 384개의 사각형 Shell 요소로 구성되어있다. 고유진동수해석은 MSC. NASTRAN을 이용하여 LANCZOS 방법으로 수행하였다.

첫번째 고유진동수는 26.69Hz이고 고유형상은 Fig.5과 같이 비틀림 모드이다. 이 첫번째 고유진동수를 극대화 시키기 위해서 보 보강재를 부착할 것이다.

### 4-2 평판의 고유진동수 민감도 해석

보 보강재를 붙이기 위한 위치를 선정하기 위하여 평판을 24개의 영역으로 분할 하였다. Fig.6에 분할한 영역의 표시되었다. 각 영역은 너비 10cm, 높이 10cm로 사각형 Shell 요소가 16개씩 포함된다. 각 영역의 두께를 변수로 하여 첫번째

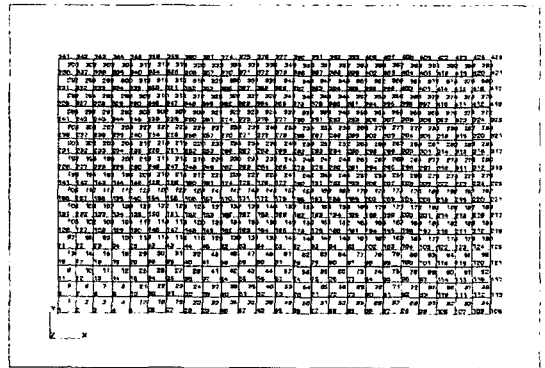


Fig.4 Fem model of plate

표.1 Material Property of Plate

규격	너비(W)	높이(H)	두께(T)
단위:m	0.6	0.4	0.002
물성치	탄성계수(E)	프와송비(V)	밀도(ρ)
	200 (Gpa)	0.33	7860(kg/m <sup>3</sup> )

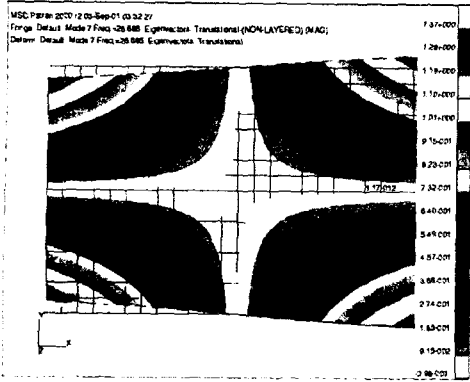


Fig.5 1<sup>st</sup> mode of plate

19	20	21	22	23	24
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

Fig.6 Divided plate

고유진동수에 대한 민감도를 구하였다. 정확히 하자면 민감도는 평판의 두께가 아니라 붙이는 보의 치수에 따른 민감도를 구해야 할 것이다. 하지만 보에 대한 민감도를 구하기도 쉽지 않고 그 자체의 의미도 명확하지 않기 때문에, 이 연구에서는 평판의 두께에 대한 민감도를 계산하여 보의 부착 위치를 선정하였다. 민감도는 다음의 식에 의해 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t_i} = \frac{\{\phi_n\}^T \left( \frac{\partial [K]}{\partial t_i} - \lambda_n \frac{\partial [M]}{\partial t_i} \right) \{\phi_n\}}{\{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\}} \quad (t_i : \text{thickness}) \quad (4)$$

여기서  $t_i$ 는 각 영역의 두께이다. 식(4)에 의한 각 영역의 두께에 대한 첫번째 고유진동수의 민감도 결과가 Fig.7에 있다. 결과적으로 보면 영역 9, 10, 15, 16의 두께가 고유진동수 변화에 가장 민감한 것을 알 수 있다. 이는 Fig.5의 첫번째 고유형상에서 알 수 있듯이 첫 번째 모드형상이 비틀림 모드이고 Nodal line이 가로 세로로 평판의 중심을 지나고 있기 때문에 Fig.7에서 보듯이 가운데를 중심으로 민감도가 대칭으로 나오는 것을 알 수 있다.

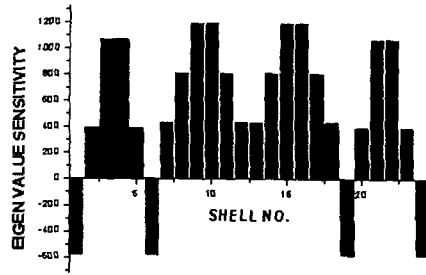


Fig.7 Eigenvalue sensitivity of plate

#### 4-3 보 보강재 부착

평판 고유진동수에 대한 민감도가 가장 큰 중앙의 4개의 영역 (9, 10, 15, 16)중에 임의로 16번째 영역에 보 보강재를 Fig.8처럼 수평으로 부

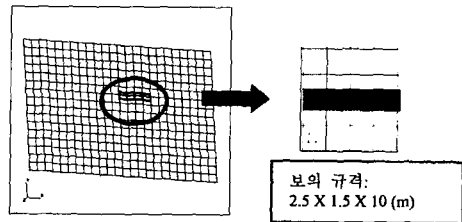


Fig.8 Attachment of Beam Stiffener

착하였다. 보의 요소는 3개이고 4개의 절점을 잇는다. 보 보강재의 규격은 너비 2.5, 높이 1.5, 길이 10cm이다. 보를 붙인 후에 고유진동수 해석을 수행하였다. 결과로, 첫번째 고유진동수가 26.69Hz에서 27.68Hz로 0.99Hz 증가하였다.

#### 4-4 보의 회전을 설계변수로 한 형상 최적화

보의 회전을 설계변수로 삼아서 첫번째 고유진동수를 최대화 시키는 최적화를 시행하였다. 그림 Fig9와 같이 앞 절에서 부착했던 보의 중심을 고정시킨 채 보를 회전시켜서 부착할 경우 평판의 고유진동수를 최대화 시키는 보의 회전각을 찾아내고자 함이다. 이때 보의 길이나 형상은 그대로이고 다만 회전만을 할 뿐이다.

목적함수는  $\text{Max. } \omega_1$ 이고, 설계변수는 보의 회전각  $\theta$ 이다. 문제가 보의 회전을 고려한 형상 설계이므로 하중이나 주파수 등의 특별한 제약 조건은 두지 않기로 하였다. 다만 회전각  $\theta$ 를 다음의 범위로 제한 하였다.

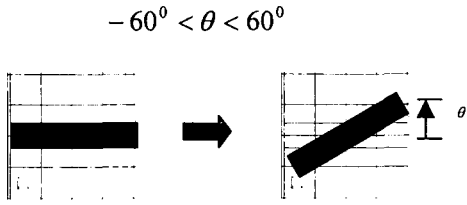


Fig.9 Rotation of Beam

3 장의 배경이론에서 언급했듯이 MSC. NASTR-AN 을 이용하여 형상 최적화를 하기 위해서는 형상 기저 벡터(Shape Basis Vector)를 먼저 구해야 한다.

이 문제의 경우 설계변수는 회전각  $\theta$  하나이다. 그러므로 형상 기저 벡터도 보의 회전을 나타낼 수 있는 절점의 변위 벡터가 필요하다. 유한요소 모델에서는 평판 위에 보를 부착할 경우, 기존 평판의 절점과 부착하는 보의 절점을 일치시켜주면 된다. 이를 이용해서 형상기저벡터를 구할 수 있다. 우선 기존의 보를 부착한 평판의 유한요소 모델과 절점, 요소, 물성치 등이 같은 보조모델(Auxiliary Model)을 만든다. 원래 유한요소 모델과 다른점은 경계조건이다. Fig.10 에서처럼 보조모델의 경계의 6 개의 자유도(3 병진, 3 회전)를 완전히 구속한다. 그리고 Fig.11 에서 보여지듯이 보가 공유하는 5 개의 절점 중에서 가운데 절점은 병진운동이 없도록 구속하고, 그곳에 극좌표계를 세운 후 나머지 4 개의 절점에 회전방향으로 강제 변위를 준다.

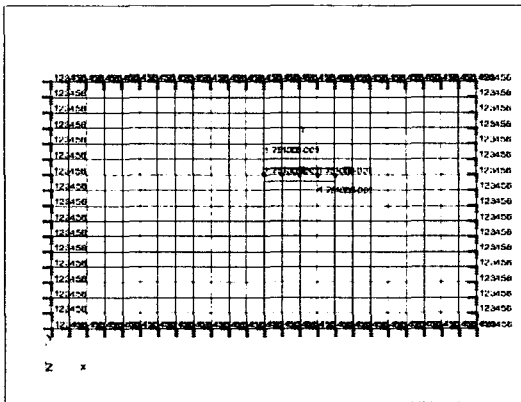


Fig.10 Boundary Condition of Auxiliary Model

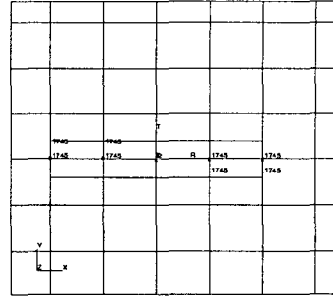


Fig.11 Load Condition of Auxiliary Model

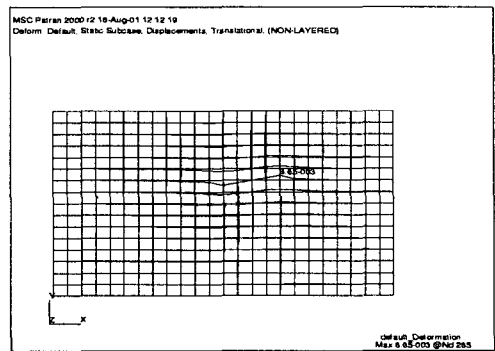


Fig.12 Varied Shape of Nodes

이렇게 구속조건과 강제변위를 준 보조모델에 대하여 Static Analysis 를 하게 되면 Fig.12 에서 처럼 변형된 절점의 형상을 얻을 수 있다. 이 변형된 절점의 형상을 형상 기저벡터로 쓰게 된다.

형상최적화 과정도 변수를 변화시켜가면서 최적점을 찾게 된다. MSC. NASTRAN 에서 지원하는 최적화 Algorithm 은 Modified Method of feasible Directions, Sequential Linear Programming, Sequential Quadratic Programming 등이 있는데 모든 방법이 비선형 최적화 문제를 지원하기 때문에, 설계변수가 하나뿐인 이번 문제에 대해서는 어떤 방법을 쓰느냐는 크게 중요하지 않다. 이번 문제에서는 Modified Method of Feasible Directions 방법을 써서 수행하였다.

결과를 보면 첫번째 고유진동수 27.68Hz 에서 28.72Hz 로 증가, 이 때,  $\theta = -43^\circ$ .

모드형상은 보 보강하기 전과 마찬가지로 비틀림모드이고,  $\theta = -43^\circ$  일때의 절점의 형상은 Fig.13 과 같다. 이는 첫 번째 비틀림 모드형상

인 Fig.5 에서 알 수 있듯이 비틀림 모드에 대하여 가장 강성을 높일 수 있는 보의 부착 방법은 Fig.13 에서의 형상이 적적함을 알 수 있다.

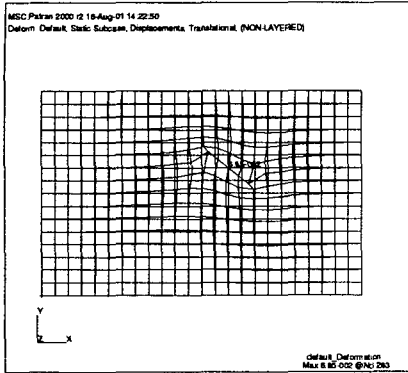


Fig.13 Optimized Shape of Nodes

## 5. 결론

각 경우에 대해서 첫번째 고유진동수를 비교하면 다음과 같다.

보를 붙이지않은 평판	:26.69 Hz
보를 수평으로 부착한 평판	:27.68 Hz
보의 회전을 고려하여 형상최적화를 한 평판	:28.72 Hz

고유진동수 증가를 비교하면	
보를 수평으로 부착한 경우	:0.99 Hz 증가
보의 회전까지 고려한 경우	:2.03 Hz 증가

위의 결과를 보면 실제로 고유진동수 증가량은 그다지 크지 않다. 이는 평판의 크기에 비해 보의 크기가 작고 보를 하나만 부착한 경우이기 때문이다.

그러나 중요한 것은 보를 민감도 해석을 통해서 보의 부착위치를 선정하여 붙인 경우는 0.99Hz 증가 하였고, 보의 회전까지 고려한 형상 최적화를 수행할 경우 이의 두 배 정도가 되는 2.13.Hz 의 증가를 가져왔다. 재료의 양을 늘이지않고 같은 양으로 최적의 효과를 얻기 위해서는 형상최적화가 필요함을 알 수 있다.

## 후 기

본 연구는 국가지정연구사업 "진동저감을 위한 동특성 변경기술(M1-0001-00-0139)"의 지원에 의한 것입니다.

## 참고문헌

- (1) Gregory J. Moore, 1994, Design Sensitivity and Optimization, Macneal-Schwendler Corporation, Los Angeles.
- (2) Meric R. A., Shape Design Sensitivity Analysis of Dynamic Structures, AIAA Journal, Vol. 26, No.2, pp.206 - 212
- (3) Twu, S. L. and Choi K. K., 1992, Configuration Design Sensitivity Analysis of Builtup Structures, International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol.35, pp.1127-1150
- (4) Chen C. J. and Choi K. K., 1994, Continuum Approach for Second-Order Shape Design Sensitivity of Three-Dimensional Elastic Solids, AIAA Journal, Vol. 32, No. 10, pp.2099-2107
- (5) Liu H. B., Chen S. H., and Wang J. L., 1992, Boundary Element Perturbation For Shape Design: Sensitivity Analysis of Vibration Modes, Computers & Structures, Vol. 44, No.3, pp.653-656
- (6) Yamazaki K. and Sakamoto J. and Kitano M., 1994, Three-Dimensional Shape Optimization Using the Boundary Element Method, AIAA Journal, Vol. 32, No. 6, pp.1295 - 1301
- (7) Braibant V. and Fleury C., 1984, Shape Optimal Design Using B-Splines, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 44, pp.247-267
- (8) Son J. H. and Kwak B. M., 1993, Optimization of Boundary Conditions for Maximum Fundamental Frequency of Vibrating Structures, AIAA Journal, Vol. 31, No. 12, Dec. pp.2351-2357
- (9) A. D. Belegundu and S. D. Rajan, 1988, A Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variables and Shape Functions, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 66 pp.87-106
- (10) S. Kodiyalam, G. N. Vanderplatts and H. Miura, Structural Optimization with MSC/NASTRAN, Computers and Structures Vol.40.4, pp821-829