

전달오차와 백래쉬를 고려한 기어구동계의

비선형 진동

조윤수 최연선**

Non-linear Vibration of Gear Pair System with transmission error and Backlash

°Yun-Su Cho, Yeon-Sun Choi

ABSTRACT

Main sources of the vibration of a gear-pair system are backlash and transmission error. This paper investigates the dynamics of a gear-pair system involving backlash and transmission error. This paper presented 4 types of gear motions due to the existence of a backlash. The solutions are calculated using a multiple-time scale method and numerically. The results shows the existence of 4 type motions, jump phenomenon, and chaotic motion consequently the design of gear driving system with low vibration and noise requires the study on the effects of transmission error and backlash, i.e. nonlinearities in gear driving system.

1. 서론

기어는 높은 동력 전달효율과 다양한 속도비를 갖는 기계요소로서 모터와 같은 동력발생원으로부터 감속을 통해 높은 구동력을 얻는데 사용되고 있다. 기어구동부에서 발생하는 진동, 소음은 주로 기어몰림과정에서 발생되는 것으로서 축과 베어링을 통해 케이스 등 기어구동계 전체로 전달된다. 특히, 기어구동계는 백래쉬(backlash)와 기어가 맞물림(gear meshing) 과정에서 발생하는 강성변화때문에 복잡한 진동이 발생한다.

Tavakoli 와 Houser^[1]는 전달오차(transmission error)가 진동과 소음을 유발시키는 중요한 요인임을 밝히고, 전달오차를 최소화하는 최적 치형 수정프로그램을 개발 하였으며, Kahraman 과 Singh^[2]는 평치차에서 기어의 백래쉬를 편적선형

(piecewise-linear) 모델을 이용하여 기어의 비선형 응답을 연구하였고, Theodosiades와 Natsiavas^[3]는 강성변화와 백래쉬를 동시에 고려하여 기어의 비선형 응답의 안정성에 관한 연구를 수행한 바 있다.

이상의 연구에서 본 바와 같이 기어구동계에서는 설계변수 변화마다 다양한 비선형 응답이 발생하며 경우에 따라서 대변형, 혼돈운동이 발생하여 기어 구동계로서의 기능을 상실할 수도 있다. 이에 본 연구에서는 강성변화와 백래쉬를 동시에 고려한 기어구동계 모델에 대한 설계변수 연구를 통해 설계변수 변화에 따른 기어구동계의 응답 변화를 살펴봄으로서 저진동, 저소음을 구현할 수 있는 기어 설계 조건을 찾아보자 했다.

2. 기어구동계에 대한 해석 모델

기어시스템은 Fig. 1과 같이 모델링 할 수 있다. 기어가 강성베어링에 의해 지지되어 있다고 가정

* 성균관대학교 기계설계학과 대학원

** 성균관대학교 기계공학부 교수

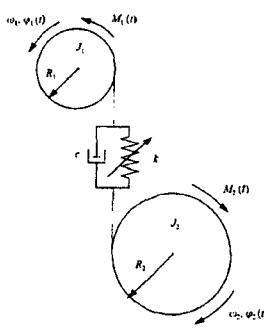


Fig. 1 Gear model

하면 기어축의 상하, 좌우 병진운동은 무시할 수 있고 단지 기어축의 비틀림 진동만을 고려하면 된다. 각 기어구동축의 회전각 ϕ 은 기어구동축의 회전각 ωt 와 물리는 기어이의 유연성에 의한 회전운동 θ 의 합이다.

$$\phi(t) = \omega t + \theta(t) \quad (1)$$

여기서 ω 는 기어혹은 피니언의 회전속도이다. 기어이의 강도변화는 물리는 기어이의 수와 위치에 따른 기어의 각 변위량에 의해 결정된다. 기어 구동계는 기어이의 강성변화에 의해 구동기어와 피동기어 사이에서 회전각 오차, 즉 전달오차, $e(t)$ 를 갖는다. 기어의 물림강성변화는 푸리에 급수형태로 표현하면 식(2)과 같은 형태로 표현된다.

$$k(t) = k_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [p_s \cos(s\omega_M t) + q_s \sin(s\omega_M t)] \quad (2)$$

여기서 기본주파수, ω_n 은 기어 물림주파수로서 다음과 같이 표현된다.

$$\omega_M = n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2 \quad (3)$$

여기서 n_1 과 n_2 는 각각 기어이의 갯수를 나타낸다. 전달오차를 고려한 실제 비틀림 변위량에 대한 운동방정식은 두개의 비틀림 항 $\phi_1(t)$ 과 $\phi_2(t)$ 을 포함하여야 한다.

$$x(t) = R_1 \phi_1(t) - R_2 \phi_2(t) - e(t) \quad (4)$$

여기서 R_1 과 R_2 는 구동기어와 피동기어의 기초 원 반지름이다. Fig. 1의 모델로부터 운동방정식을 유도하면 식(5)와 같다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(t)h(x) = f_T(t) + f_M(t) \quad (5)$$

여기서

$$f_T(t) = \frac{R_1 J_2 M_1(t) - R_2 J_1 M_2(t)}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2}, \quad m = \frac{J_1 J_2}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2}$$

$$f_M(t) = -m \dot{e}(t) \quad (6)$$

이고 J_1 과 J_2 는 기어의 질량관성모멘트이다. $f_T(t)$ 는 시스템에 나타나는 외부 비틀림 하중 $M_1(t)$ 과 $M_2(t)$ 에 의한 외부 가진항이고 $f_M(t)$ 는 기어의 전달오차에 의한 내부 가진항이다. $h(x)$ 는 기어의 백래쉬 영향을 고려한 항으로 아래와 같이 표현된다.

$$h(x) = \begin{cases} x - b, & x \geq b \\ 0, & |x| < b \\ x + b, & x \leq -b \end{cases} \quad (7)$$

$2b$ 는 전체 백래쉬를 나타낸다. 설계변수 변화에 따른 다양한 변화를 보기 위해서 식(8)을 무차원화하기 위해 아래의 변수들을 하용하면

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk_0}}, \quad \Omega_M = \frac{\omega_M}{\omega_0}$$

$$\hat{t} = \omega_0 t, \quad w(\hat{t}) = \frac{k(t)}{k_0}, \quad u(\hat{t}) = \frac{x(\hat{t})}{b} \quad (8)$$

운동방정식(5)은 아래의 무차원 운동방정식이된다.

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + w(\hat{t})g(u) = f(\hat{t}) \quad (9)$$

이 식에서, \hat{t} 는 간단히 t 로 나타내기로 한다. 강성변화는 기본주기 $T_M = 2\pi/\Omega_M$ 를 갖는 $w(t+T_M) = w(t)$ 주기함수이다. 백래쉬에 기인한 $g(u)$ 는 무차원화 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(u) = \begin{cases} u^{-1}, & u \geq 1 \\ 0, & |u| < 1 \\ u+1, & u \leq -1 \end{cases} \quad (10)$$

$f(t)$ 항은 외부가진항, $f_M(t)$ 와 내부가진항, $f_T(t)$ 를 포함하는 무차원 가진항이다.

2. 주기응답

운동방정식(9)는 정상상태 주기해를 갖는다. 그러나, 해석적으로 정상상태의 주기해를 구하는 과정은 쉽지 않다. 첫째는 백래쉬의 존재이고 두 번째는 물림강성변화이다. 실제적으로 식(9)의 엄밀해를 구하는 해석적인 방법은 없다. 기어물림주파수가 공진영역 근처에 있을 때 응답은 섭동법(perturbation method)을 사용하여 해석해를 구할 수 있다.

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \quad (11)$$

여기서 ε 은 작은 양의 값이다. 또한 강성변화와 가진력 변화에서 1차항만 고려하면 기본 운동방정식은 식(12)와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} + (1 + 2\varepsilon\cos\Omega t)g(u) = f_0 + \varepsilon f_1 \cos(\Omega t + \theta) \quad (12)$$

백래쉬의 존재로 인하여 기어구동계의 응답은 4가지 형태의 운동^[3]으로 분류가 가능하다.

2.1 I형 주기 운동

시스템변수의 적절한 조합과 초기조건의 적절한 선택은 기어구동계의 진동이 항상 $u \geq 1$ 의 범위 안에 있도록 만들 수 있다. 즉 항상 구동기어와 피동기어가 접촉하는 형태로서 I형 주기운동으로 명명하기로 한다. 여기서 물림과정의 구동기어와 피동기어가 백래쉬로 인하여 불리되는 순간, 즉 충격은 포함하지 않는다. 이 경우 운동방정식은 아래와 같이 된다.

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} + (1 + 2\varepsilon\cos\Omega t)(u - 1) = f_0 + \varepsilon f_1 \cos(\Omega t + \theta) \quad (13)$$

이 경우 다중 시간법(multiple-time scale method)을 사용하면 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$u(t) = 1 + f_0 + \cos(\Omega t - \gamma) - \varepsilon a[\cos\gamma - \frac{1}{3}\cos(2\Omega t - \gamma)] - \varepsilon^2[\frac{4}{9}\alpha\cos(2\Omega t - \gamma) - \frac{1}{24}\cos(3\Omega t - \gamma) + \frac{4}{9}f_0\cos 2\Omega t - \frac{2}{9}f_1\cos(2\Omega t + \theta)] + O(\varepsilon^3) \quad (14)$$

2.2 II형 주기 운동

정상상태 응답이 1보다 더 큰 최대값을 가지며 1보다 작고 -1보다 큰 최소값을 갖는다고 가정할 때, II형 운동으로 분류할 수 있고, 이 경우 물림과정의 충격이 포함될수 있다. Fig. 2에서 구동기어와 피동기어가 접촉하는 시간간격 $0 \leq t_1 \leq t_{1c}$ 에서의 운동방정식은 식(15)와 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\ddot{u}_1 + 2\varepsilon\mu\dot{u}_1 + [1 + 2\varepsilon\cos(\Omega t_1 + \phi)](u_1 - 1) = f_0 + \varepsilon f_1 \cos(\Omega t_1 + \theta + \phi) \quad (15)$$

섭동량 ε 을 사용하면 식(15)의 해는 아래의 형태로 나타낼 수 있다.

$$u_1(t_1) = u_{01}(t_1) + \varepsilon u_{11}(t_1) + \varepsilon^2 u_{21}(t_1) + O(\varepsilon^3) \quad (16)$$

식(16)을 이용하여 식(15)의 해를 구하면 아래와

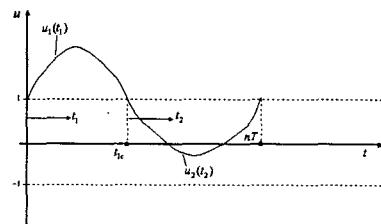


Fig. 2 Periodic steady state motions (type 2)

같이 된다.

$$u_1(t_1) = 1 + f_0 + \cos(\Omega t_1 + \phi - \gamma) - \varepsilon a[\cos\gamma - \frac{1}{3}\cos(2\Omega t_1 - \gamma) - \varepsilon^2[\frac{4}{9}\alpha\cos(2\Omega t_1 - \gamma) - \frac{1}{24}\cos(3\Omega t_1 - \gamma) + \frac{4}{9}f_0\cos 2\Omega t_1 - \frac{2}{9}f_1\cos(2\Omega t_1 + \theta + \phi)] + O(\varepsilon^3) \quad (17)$$

시간간격 $t_{1c} \leq t_1 \leq t_{2c}$ 에서의 응답은 아래의 운동방정식이 된다.

$$\ddot{u}_2 + 2\xi\dot{u}_2 = f_0 + \hat{f}_1 \cos(\Omega t_2 + \theta + \phi) \quad (18)$$

이때 $\hat{f}_1 = \varepsilon f_1$ 이다.

위의 식은 다음과 같은 해를 갖는다.

$$u_2(t_2) = A_2 e^{-2\xi t_2} + B_2 + C_2 t_2 + D_2 \cos(\Omega t_2 + \theta + \phi - \psi) \quad (19)$$

$$\text{이 때 } C_2 = \frac{f_0}{2\xi}, D_2 = \frac{\hat{f}_1}{\sqrt{\Omega^2 + 4\xi^2}}$$

$$\cos\psi = \frac{-\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 4\xi^2}}, \sin\psi = \frac{2\xi}{\sqrt{\Omega^2 + 4\xi^2}} \quad (20)$$

여기서 A_2, B_2 는 아래의 초기조건에 의하여 결정된다.

$$u_1(0) = u_1(t_{1c}) = u_2(0) = u_2(t_{2c}) = 1$$

$$\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(t_{2c}) = \dot{u}_{10}, \dot{u}_1(t_{1c}) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20} \quad (21)$$

$$\left[e^{-\frac{1}{2}\xi t_{2c}} \begin{matrix} 1 \\ B_2 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} A_2 \\ 1 - D_2 \cos(\theta + \phi - \psi) \end{matrix} \right] = \left(1 - C_2 t_{2c} - D_2 \cos(\Omega t_{2c} + \theta + \phi - \psi) \right) \quad (22)$$

여기서 $t_{2c} = nT - t_{1c}$ 그리고, $T = 2\pi/\Omega$, n 은 정수이다.

2.3 III형 주기운동

식(12)의 주기운동이 최대 변위가 1보다 크고 최소변위가 -1보다 작은 값일 때, 기어 시스템의 운동은 양면 충격을 포함한다. 그리고 Fig. 3과 같은 III형 운동으로 분류할 수 있다. 각각의 시간구간

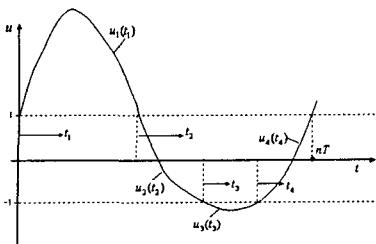


Fig. 3 Periodic steady state motions (type 3)

$0 \leq t_1 \leq t_{1c}, t_{1c} \leq t_2 \leq t_{2c}, t_{2c} \leq t_3 \leq t_{3c}, t_{3c} \leq t_4 \leq t_{4c}$,
에서의 시스템의 운동 방정식은 각각 식(23), (24), (25), (26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{u}_1 + 2\epsilon\mu\dot{u}_1 + (1 + 2\epsilon\cos\Omega t_1)(u_1 - 1) = f_0 + \epsilon f_1 \cos(\Omega t_1 + \theta) \quad (23)$$

$$\ddot{u}_2 + 2\zeta\dot{u}_2 = f_0 + \hat{f}_1 \cos(\Omega t_2 + \theta + \varphi_1) \quad (24)$$

$$\ddot{u}_3 + 2\epsilon\mu\dot{u}_3 + [1 + 2\epsilon\cos(\Omega t_3 + \varphi_2)](u_3 + 1) = f_0 + \epsilon f_1 \cos(\Omega t_3 + \theta + \varphi_2) \quad (25)$$

$$\ddot{u}_4 + 2\zeta\dot{u}_4 = f_0 + \hat{f}_1 \cos(\Omega t_4 + \theta + \varphi_3) \quad (26)$$

이 때 $t_{4c} = nT - (t_{1c} + t_{2c} + t_{3c})$ 의 관계를 갖는다.

2.4 IV형 주기운동

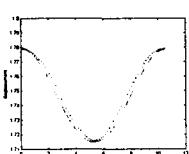
가진항의 상수항이 무시되는 경우 동적 시스템은 변위의 진폭이 -1과 1사이에서 나타나는 주기운동이 존재할 때, 그 운동을 추가적인 해는 IV형으로 나타낼 수 있다.

이 경우, 운동방정식은 다음과 같다.

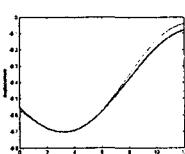
$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} = \hat{f}_1 \cos(\Omega t + \theta) \quad (27)$$

그리고 $A_2 = C_2 = 0$ 이고 (19)와 동일한 형태를 갖는다. 이것은 다음을 의미한다.

$$u(t) = B_2 + D_2 \cos(\Omega t + \theta - \psi) \quad (28)$$



(a) I type motion



(b) II type motion

Fig. 4 Comparison of time response

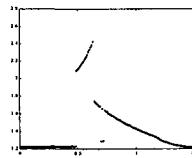
여기서 B_2 는 초기조건에 의해 구해지며 D_2 와 위상 ψ 는 식 (20)으로부터 구할 수 있다.

3. 수치해석

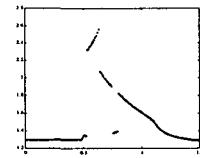
먼저 앞에서 구한 엄밀해와 수치해석 결과를 Fig. 4에서 비교하였다. 엄밀해와 수치해석 결과가 잘 일치함을 확인할 수 있다.

앞에서 구한 기어의 운동방정식(12)을 수치해석을 이용하여 해석함으로서 기어구동계의 응답을 구하였다.

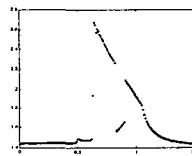
Fig. 5는 각각의 변수들 $\mu = 0.8$, $f_1 = 2.5$,



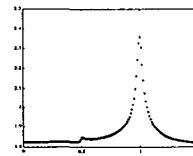
(a) $f_0=0.16$



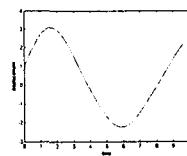
(b) $f_0=0.24$



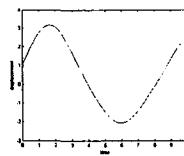
(c) $f_0=0.40$



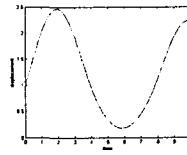
(d) $f_0=0.80$



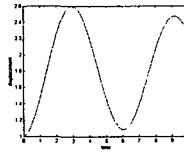
(e) $f_0=0.16$



(f) $f_0=0.24$



(g) $f_0=0.40$



(h) $f_0=0.80$

Fig. 5 Effect of forcing parameter f_0

$\varepsilon=0.03$, $\theta=0$ 의 값을 갖고 f_0 값이 변할 때 나타나는 시스템의 응답곡선이다. 여기서 알 수 있듯이 $f_0=0.6$ 보다 큰 값에서는 I형 운동이 나타나며, $f_0=0.6$ 보다 작은 값으로 내려가면, 운동은 II형 운동에서 III형 운동으로 점차 변해간다는 사실을 확인할 수 있다. 이는 Fig. 5(e), (f), (g), (h)의 시간 응답의 그래프를 통해서 확인이 가능하다. (e)와 (f)의 경우, 응답의 최대값이 1보다 크고, 최소값이 -1보다 작은 범위에서 운동이 발생한다. 이는 III형 운동에 해당하며, (g)에 보여지는 바와 같이 최대값이 1보다 크고, 최소값이 -1과 1사이에 존재하는 운동은 II형 운동이 된다. 마지막으로, 1보다 큰 영역에서 일어나는 운동은 I형 운동 형태임을 알 수 있다. 또한 구동속도가 증가함에 따라 급격한 응답 변화가 있는 도약현상(Jump phenomenon)이 발생함을 알 수 있다.

Fig. 6은 위와 동일한 설계변수를 사용하고, $f_0=0.75$ 를 가질 때, f_1 의 변화에 따른 시스템이 응답

특성을 나타낸다. $f_1=0.04$ 에서 II형 운동을 보이던 시스템은 $f_1=0.075$ 로 커질 때 III형 운동을 나타내게 된다. 여기서 $f_1=0.4$ 의 값을 가질 때 나타나는 시스템 응답은 $\Omega<0.6$ 인 구간에서 안정해가 존재하지 않는다는 것을 보여준다.

Fig. 7(a), (b), (c)의 시스템 응답은 감쇠계수 μ 가 시스템의 응답에 미치는 영향을 보여준다. 이경우 위의 경우와 같은 변수 값들을 사용하였으며 이때 μ 를 변화시키면서 시스템의 응답을 살펴보았다. $\mu=0.25$ 일 때 II형 운동이 나타나지만, μ 값이 증가하면 I형 운동으로 변한다는 것을 확인할 수 있으며 또한 시스템의 감쇠값이 커지면서 응답의 진폭은 점점 작아 진다는 사실을 확인 할 수 있다.

Fig. 7(d), (e), (f)는 $\varepsilon=0.1$, $\mu=0.5$, $f_0=0.5$, $f_1=2$ 의 변수값을 가질 때 가진 위상 θ 의 변화에 따른 시스템의 응답특성을 나타낸다. θ 가 작은 값

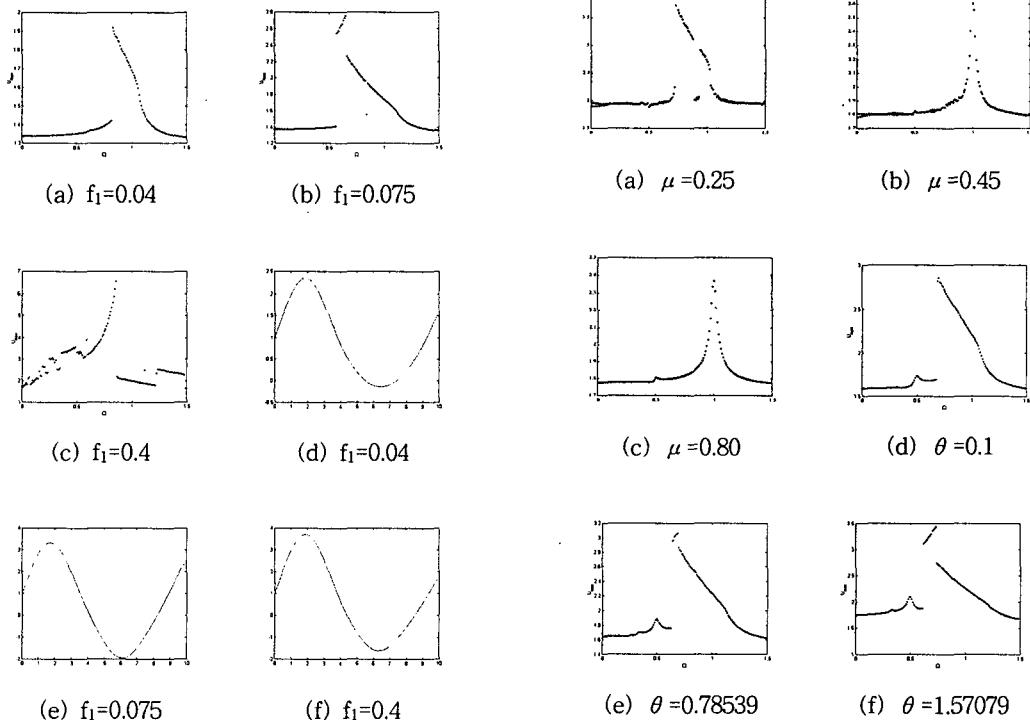


Fig. 6 Effect of forcing parameter f_1

Fig. 7 Effect of system parameter

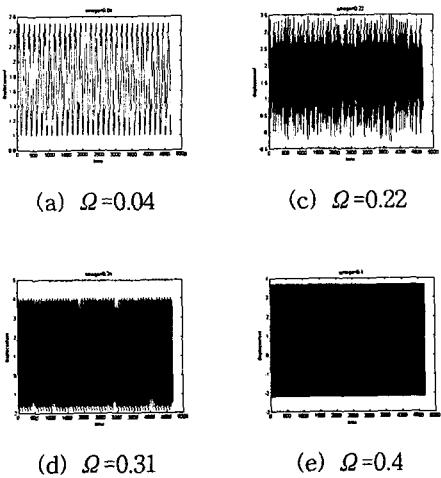


Fig. 8 Effect of forcing frequency

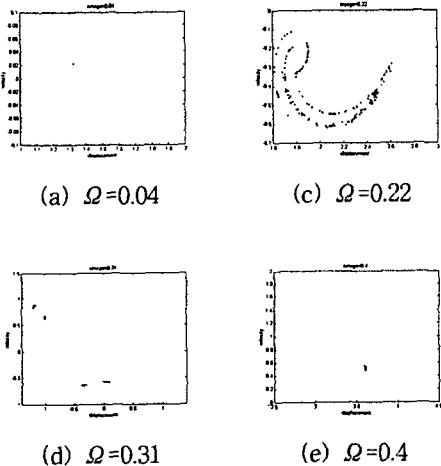


Fig. 9 Poincare section

을 가질 때 시스템은 II형 운동을 하고 θ 가 커지면서 III형 운동이 나타나게 된다. 마지막으로, Fig. 8은 가진주파수 Ω 가 변할 때의 시간응답이고, Fig. 9는 그때의 포앙카레 맵(Poincare map)을 나타낸다. $\Omega=0.22$ 일 때의 응답을 살펴보면, 포앙카레 맵 상에서 구름과 같은 형태를 나타내고 있다. 이는 혼돈응답이 발생함을 말해주는 것이다. 이로서 기어구동계에 혼돈응답이 발생할 수 있음을 확인 할 수 있다.

4. 결론

기어 구동계를 모델링 하고, 시스템의 운동을 응답의 크기에 따라 4가지 형태로 구분하여 살펴보았다. 시스템의 변수들이 시스템에 미치는 영향을 살펴보기 위하여, 변수값이 변화할 때 시스템의 응답의 변화와 그 때의 시간 응답을 고찰하였다. 각 설계변수들이 값이 변하면서 시스템의 운동의 형태도 달라진다는 것을 확인할 수 있었다. 기어 시스템은 대표적인 비선형 현상인 도약 현상이 발생한다는 사실을 응답곡선을 통하여 확인 할 수 있으며, 특정 설계변수 에서는 시스템의 응답이 불안정하다는 사실도 확인 할 수 있었다. 즉, 가진주파수가 조금만 변하여도 그 응답의 크기가 급격히 변하는 구간들이 많이 존재함을 확인할 수 있었다. 또한, 기어의 응답 중 어느 한 순간 혼돈응답이 발생할 수 있음을 확인하였다.

후기

본 연구는 과학기술처가 지원하는 특정연구개발사업(기계설비요소기술개발)으로 지원되어 수행하였습니다.

참고 문헌

1. M. S. Tavakoli and D. R. Houser, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears," Transactions of the ASME, 108, 86-94, 1986.
2. A. Kahraman and R. Singh, "Non-linear Dynamics of a Spur Gear Pair," Journal of Sound and Vibration, 142(1), 49-75, 1990.
3. S. Theodossiades and S. Natsiavas, "Non-linear Dynamics of Gear-Pair Systems with Periodic Stiffness and Backlash," Journal of Sound and Vibration, 229(2), 287-310, 2000.
4. A. H. Nayfeh and B. Balachandran, Applied Nonlinear Dynamics, John Wiley & Sons, Inc.