

# 음향 압축기 설계를 위한 축대칭 공명튜브 내부음장의 수치해석 및 특성연구

<sup>0</sup> 전영두\*, 김양한\*\*

## Numerical Analysis of Nonlinear Acoustic Characteristics in Axisymmetric Resonant Tubes for Sonic Compressors

<sup>0</sup>Young-Doo Chun and Yang-Hann Kim

### ABSTRACT

A numerical investigation on nonlinear oscillations of gas in an axisymmetric resonant tube is presented. When a tube is oscillated at a resonant frequency, acoustic variables such as density, velocity, and pressure undergo very large perturbation, often described as nonlinear oscillation. In order to analyze these phenomena, axisymmetric 2-D nonlinear governing equations have been derived and solved numerically. Numerical simulations were accomplished for cylindrical, conical, and 1/2 cosine-shape tubes, which have same volume and length. For conical and 1/2 cosine-shape tubes, very large variation of pressures can be induced without shock formation except the cylindrical tube. In addition, the results well agree to those of 1-D simple model analysis.

### 1. 서론

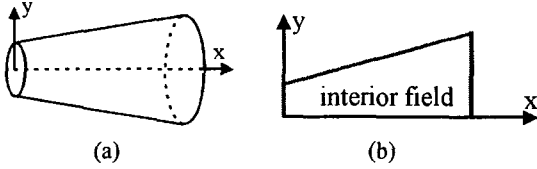
음향 압축기<sup>(1)</sup>(sonic compressor)는 음파 전파시 발생하는 압력 변화량을 효과적으로 증폭시켜 매질을 압축하려는 간단한 아이디어로부터 시작되었다. 일반적으로 닫힌 공간 내부를 공명주파수로 가진할 경우 다른 주파수 대역에 비해 큰 압력변화를 야기시킬 수 있고, 특히 벽면 어드미턴스(admittance)가 0 인 강체 튜브 내부에서는 공명 발생시 선형해석 범위를 벗어날 정도의 압력변화가 일어나기도 한다<sup>(2-4)</sup>. 이와 같이 닫힌 튜브내부의 공명원리를 이용하는 음향 압축기는, 기존의 압축기들에 비해 구성 요소들간의 마찰을 최소화하기 때문에 마모방지를 위한 윤활 문제나 에너지 손실 문제를 해결할 수 있고, 윤활성이 없는 대체냉매에 대해서도 원활히 동작 가능한 장점이 있다<sup>(1-3)</sup>.

초창기 음향 압축기의 설계에는 제작이 용이한 실린더 튜브가 주로 이용되었으나, 이 경우 압력이 높아지면서 발생하는 충격파로 인해 음향학적 포화(acoustic saturation)상태에 쉽게 도달하기 때문에 큰 폭의 압력 변화량을 얻기는 힘들게 된다<sup>(5)</sup>. 그러나, 공명 발생시 나타나는 비선형 음파의 모양은 튜브형상에 크게 영향을 받고<sup>(6)</sup>, 따라서 튜브의 형상을 적절히 변화시켜주면 충격파의 생성을 억제함으로써 압력 변화량을 대폭 증가시킬 수 있다. 이러한 기술을 RMS (Resonant Macrosonic Synthesis) 기술<sup>(7, 8)</sup>이라 일반적으로 부른다. 관련된 연구는 주로 압축효율을 증가시킬 수 있는 최적의 튜브형상을 찾기 위한 방향으로 활발한 연구가 이뤄지고 있다<sup>(9, 10)</sup>.

본 연구는 공명튜브 내부에서의 음장변화를 정확히 예측하기 위한 방법으로서, 임의의 축대칭 공

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과



**FIG. 1** An example of axisymmetric resonant tube : (a) 3D-shape of conical resonant tube and (b) its 2D-modeling of an interior field.

명튜브에 대한 2 차원적으로 모델링하는 방법을 소개하고, 이를 이용하여 형상에 따른 압축효율 영향을 정확히 예측하기 위해서는 임의의 형상을 가진 압축기 내부의 음장을 정확히 예측할 수 있는 이론적 바탕이 확립되어야 한다. 이러한 맥락에서 기존의 1 차원 해석결과의 타당성 및 제한조건 등을 검토하고 있다. 또한 확립된 이론을 바탕으로, 여러 형상의 튜브에 대한 모의실험을 수행하여 높은 압축효율을 갖는 공명튜브를 설계하는 방향을 제시하고 있다.

## 2. 지배방정식 및 해석방법

Fig. 1 과 같이, 임의의 축대칭 공명튜브의 내부 음장은 원통형 좌표계를 이용하여 2 차원적 지배방정식으로 쉽게 표현할 수 있다. 먼저 질량관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\rho v}{y} = 0 \quad (1)$$

여기서,  $\rho$  는 밀도,  $u$  와  $v$  는 각각 공명튜브에 대한  $x$  와  $y$  방향으로의 상대속도를 나타낸다.

$x$  와  $y$  방향으로의 운동량 관계식은

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\rho uv}{y} = f_x - \rho \alpha_{mbe} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) + \frac{\rho v^2}{y} = f_y \quad (3)$$

으로 표현되며,  $p$  는 압력을,  $f_x$  와  $f_y$  는 수직응력

(normal stress)과 관련된 점성력을 나타내고,  $\alpha_{mbe}$  는 공명튜브의 가진 가속도이다. 일반적으로 벽면에서의 경계층(boundary layer)은  $\sqrt{\mu/\rho\omega}$  에 비례<sup>(11)</sup>하는데, 특히 기체의 경우 음향 압축기가 작동하는 관심주파수 영역에서는 이 값이 매우 작기 때문에, 대부분의 영역에서는 경계층 효과가 무시되어 비점성 유체운동과 흡사하게 묘사될 수 있다. 그러나, 점성계수가 포함된 수직응력을 고려해줌으로써 음향 감쇄량을 결정해줄 수 있다. 또한, 매질간의 열전달량과 점성의 크기가 일반적으로 다른 항들에 비해 무시될 수 있을 정도로 작기 때문에 등엔트로피(isentropic process) 가정을 도입할 수 있다.

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad (4)$$

여기서,  $\gamma$  는 비열비(specific heat ratio)이다. 따라서, 식 (1)~(4)를 정리하여 행렬형태로 변환해 보면

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \mathbf{H} \quad (5)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ c^2/\rho & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho \\ 0 & v & 0 \\ c^2/\rho & 0 & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -\frac{\rho v}{y} \\ f_x/\rho - \alpha_{mbe} \\ f_y/\rho \end{Bmatrix}$$

이 된다. 그리고, 공명튜브 벽면에서는 비점성 유체의 운동과 같이 미끄럼조건(slip condition)을 적용하면, 면에 수직인 속도성분이 영(0)이 되는 조건을 적용할 수 있다.

$$\vec{n} \cdot \vec{V} = 0 \quad (6)$$

또한, 공명튜브 가운데의 축( $y=0$ )에서는 물리적으로 다음의 조건을 만족해야 한다.

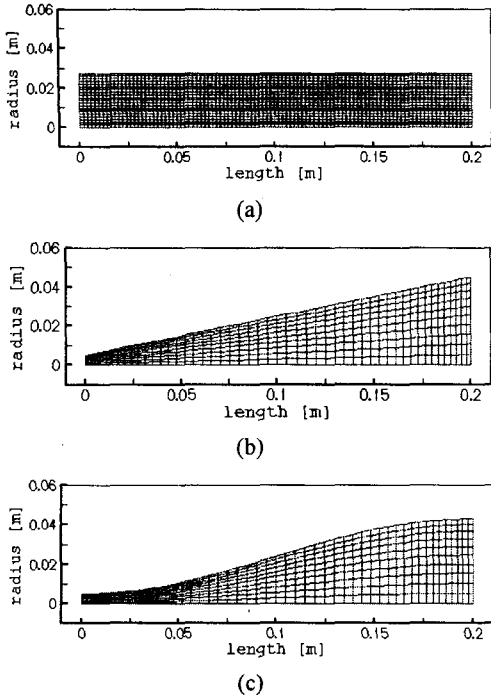


FIG. 2 Geometries of test tubes and their grid shapes: (a) cylindrical tube, (b) conical tube, (c) 1/2 cosine tube

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad (7)$$

이때, 나머지 경계 조건들은 튜브벽면에서 특성 경계조건(characteristic boundary condition)관계<sup>(12)</sup>를 이용하여 논리적으로 구할 수 있다.

임의의 형상을 갖는 축대칭 공명튜브에 대해 식 (5)의 해를 효과적으로 구하는 방법으로는, 공간상 미분과 시간상 적분의 구조를 갖는 유한차분법(finite difference method) 수치해석 기법<sup>(13)</sup>이 잘 알려져 있다. 본 연구에서는 공간상 미분의 경우, 글로벌 4 차 오차차수를 갖는 명시적 중앙 차분방식(explicit centered difference scheme)을 이용하고,

$$\frac{dF}{dx}\bigg|_n = \frac{1}{12\Delta x} [8(F_{n+1} - F_{n-1}) - (F_{n+2} - F_{n-2})] \quad (8)$$

시간상 적분은 4 차 오차차수 구조를 갖는 Runge Kutta 방법을 이용한다.

$$F^{i+1} = F^i + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (9)$$

$$k_1 = G(t^i, F^i),$$

$$k_2 = G(t^i + 0.5\Delta t, F^i + 0.5k_1\Delta t),$$

$$k_3 = G(t^i + 0.5\Delta t, F^i + 0.5k_2\Delta t),$$

$$k_4 = G(t^i + \Delta t, F^i + k_4\Delta t)$$

### 3. 모의 실험

튜브 형상에 따른 내부음장의 변화를 관찰하기 위해 Fig. 2와 같이 실린더 튜브, 콘 튜브, 1/2 코사인(cosine) 튜브를 선정하여 수치해석을 수행하였다. 특히 실린더 튜브의 경우 충격과 생성으로 인한 음향 변수들의 공간상 불연속이 발생하므로 격자 간격을 다른 두 경우에 비해 조밀하게 구성했다. 이때 동일한 조건에서의 결과를 얻기 위해 모두 같은 길이와 같은 부피를 갖도록 제한하였다. 그리고, 튜브 내부의 매질로는 27 °C, 306kPa의 냉매 R-12를 가정하였으며, 이때 밀도는 14.74kg/m<sup>3</sup>, 비열비는 1.129에 해당되고, 공명튜브는 공명주파수로 조화운동을 한다고 가정하였다. 또한, 이러한 조건은 기존의 1 차원 해석<sup>(10)</sup>과 동일하게 구성함으로써 서로의 해석결과를 비교해 보고자 하였다.

#### 3-1. 모의 실험(I): 실린더 튜브

길이가 0.2m인 실린더 튜브의 경우 공명주파수는 파장이 튜브길이의 2 배가 되는 381Hz이 된다.

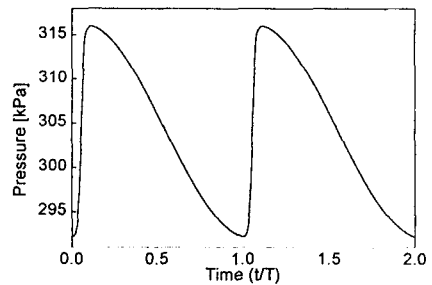


FIG. 3 Pressure patterns at one end of the cylindrical tube at resonance during two cycles when the amplitude of driving acceleration are 100m/s<sup>2</sup>

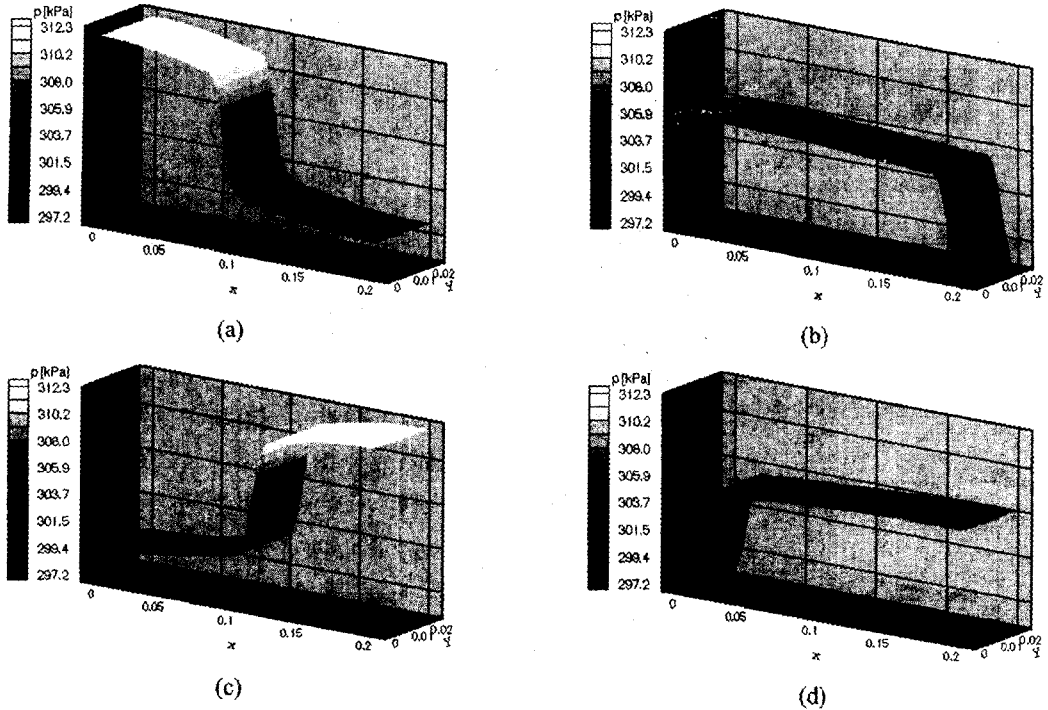


FIG. 4 Pressure profiles in the cylindrical tube for the acceleration of  $100 \text{ m/s}^2$  during one cycle. The figures are obtained at every time step of  $1/4$  cycle. (a)  $t = t_0$ , (b)  $t = t_0 + T/4$ , (c)  $t = t_0 + 2T/4$ , (d)  $t = t_0 + 3T/4$ .

Fig. 3 은 튜브의 가진 가속도가  $100 \text{ m/s}^2$  일때의 한 쪽 끝면에서 예측된 시간에 대한 압력변화를 보여 준다. 1 차원 해석 및 실험결과와 동일하게, 튜브 내부에 충격파가 발생하고 있음을 알 수 있다(9, 10). 이는 가진 주파수의 하모닉(harmonic) 주파수와 내부음장의 고차 고유주파수가 서로 정확히 일치하기 때문에 나타난 현상으로 파악되며(6), 일단 충격파가 발생하면 음향학적 포화상태에 도달하게 되어 압력 변화량이 제한을 받게 된다(5).

Fig. 4 는 튜브 가속도가  $100 \text{ m/s}^2$  일 경우, 한 주기동안의 공간상 압력분포 변화를 나타낸 것으로,  $1/4$  주기 간격으로 얻어진 결과이다. 실린더 내부에서 발생된 충격파가 공간상으로 전파되는 상황을 잘 보여주고 있다. 그리고, 튜브 단면에서 반지름 방향으로 일정한 압력이 분포함을 알 수 있으며, 이는 1 차원 모델링이 가능함을 시사해 준다.

### 3-2. 모의 실험(II): 콘 튜브

콘 튜브의 경우, 실린더 튜브와는 달리 공명 주파수가 일정하지 않고 가진 가속도의 크기가 커질수록 높아지는 현상을 보인다. 그리고, 공명 주파수 부근의 주파수 영역에서는 가진 주파수의 스위프 방향(sweep up / down)에 따라 압력 변화량이 달라져, 한 주파수에 대해 2 개의 서로 다른 압력 크기를 갖는 비선형 특성이 존재한다. 일반적으로 콘 튜브의 경우, 공명 주파수보다 낮은 주파수에서부터 스위프업(sweep up)해야만 최대 압력변화를 유도할 수 있다(8, 9).

Fig. 5 는 가속도의 크기  $200 \text{ m/s}^2$  으로 공명 가진 시, 콘 튜브의 작은 끝면( $x=0$ )에서 시간에 따른 압력변화를 보여준다. 4 기압 정도의 큰 압력변화가 있지만 실린더 튜브의 경우와는 달리 충격파가 발생되지 않음을 알 수 있다. 그러나, 피크(peak)의 시간 폭은 골(trough)의 시간 폭에 비해 좁아지고, 가압성에 비해 감압성이 상대적으로 약하게 일어남을 보여준다.

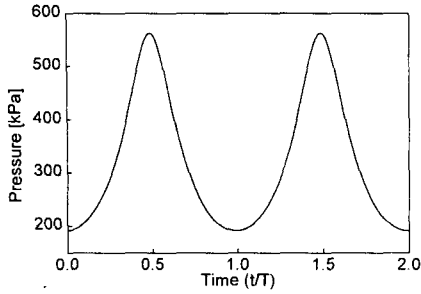


FIG. 5 Pressure patterns at small end of the conical tube at resonance during two cycles when the amplitude of driving acceleration are  $200\text{m/s}^2$

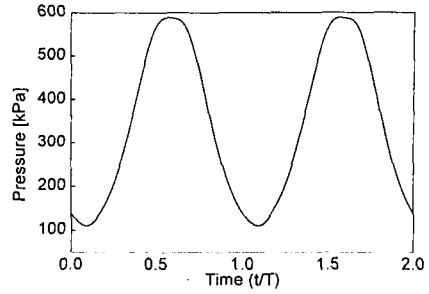


FIG. 7. Pressure patterns at small end of the 1/2 cosine tube at resonance during two cycles when the amplitude of driving acceleration are  $200\text{m/s}^2$

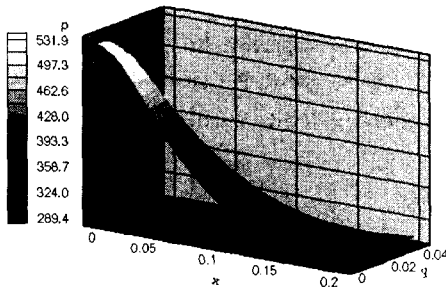


FIG. 6 Pressure distribution in the conical tube when the maximum pressure is induced at small end. It is excited with the acceleration of  $200\text{ m/s}^2$  at resonance.

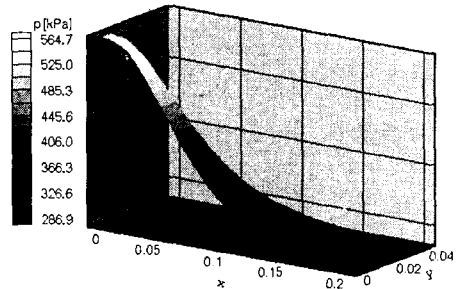


FIG. 8 Pressure distribution in the 1/2 cosine tube when the maximum pressure is induced at small end. It is excited with the acceleration of  $200\text{ m/s}^2$  at resonance.

이와 같이 공명으로 인한 최대 압력이 유도되었을 때의 공간상 압력분포는 Fig. 6 에 그려져 있다. 마찬가지로 튜브 단면에 대해 반지름 방향으로 일정한 압력이 분포함을 알 수 있고, 이는 1 차원 모델링이 가능함을 의미한다.

### 3-3. 모의 실험(III) : 1/2 코사인 튜브

1/2 코사인 튜브의 경우, 가진 크기에 따른 공명 주파수의 변화폭이 큰 튜브에 비해 현저히 줄어들지만, 마찬가지로 가진 크기를 계속 증가시키게 되면 히스테리시스(hysteresis) 현상이 나타나므로, 최대 압력변화를 유도하기 위해선, 공명 주파수보다 낮은 주파수로부터 스위업(sweep up)해야 한다<sup>(9)</sup>.

Fig. 7 은 가속도의 크기  $200\text{m/s}^2$  으로 공명 가진 시, 튜브의 작은 끝면( $x=0$ )에서 시간에 따른 압

력변화를 보여준다. 약 5 기압 정도의 큰 압력변화가 있으며, 피크(peak)와 골(trough)에서의 시간폭이 거의 비슷하고, 가압성과 더불어 감압성도 큰 튜브에 비해 향상되었음을 알 수 있다.

Fig. 8 은 최대압력이 유도될 때의 공간상 압력분포를 나타낸다. 앞의 두 경우와 마찬가지로 튜브 단면에 대해 반지름 방향으로 일정한 압력이 분포함을 보여준다.

## 4. 결론

임의의 축대칭 공명튜브 내부에서의 음장변화를 정확히 예측하기 위한 일반적인 축대칭 2 차원적 모델링 방법을 제안하였으며, 이에 적절한 수치해석 방법도 제안하였다. 부피와 길이가 서로 동일한 실린더, 콘, 1/2 코사인 형상의 튜브에 대한 모의실험을 수행하여, 이로부터 형상변화에 따른 음장변

화의 경향을 확인하였다. 기존의 1 차원 해석결과와의 비교를 통해 두 결과가 서로 잘 일치함을 볼 수 있었으며, 따라서 1 차원 해석방법의 타당성을 확인할 수 있었다. 1/2 코사인 형상의 경우 충격파의 형성 없이 큰 압력변화를 유도할 수 있었으며, 압력의 피크 (peak)와 골(trough)에서의 시간 폭이 거의 비슷하고, 다른 튜브형상에 비해 가압성과 감압성이 모두 뛰어나 음향 압축기용 공명튜브로 적절함을 확인할 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 부분적으로 BK21 연구지원과 NRL 지정연구실 사업의 지원을 받아 수행되었음을 밝힙니다.

## 참고 문헌

- (1) H. Mandroian, "Standing wave pump," U.S. Patent, 3,743,446 (1973)
- (2) T. S. Lucas and T. W. Van Doren, "Resonant macrosonic synthesis," U.S. Patent 5,515,684 (1996)
- (3) S. Ashley, "Sound waves at work," Mechanical engineering, 120 (3), 80-84, (1998)
- (4) W. Chester, "Resonant oscillations in closed tubes," J. Fluid Mech. 18, 44-64 (1964)
- (5) D. A. Webster and D. T. Blackstock, "Finite-amplitude saturation of plane sound waves in air," J. Acoust. Soc. Am. 62, 518-523 (1977)
- (6) D. F. Gaitan and A. A. Atchley, "Finite amplitude standing waves in harmonic and anharmonic tubes," J. Acoust. Soc. Am. 93, 2489-2495, (1993)
- (7) C. C. Lawrenson, B. Lipkens, T. S. Lucas, D. K. Perkins, and T. W. V. Doren, "Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavities," J. Acoust. Soc. Am. 104(2), pp. 623-636 (1998)
- (8) Y. A. Ilinskii, B. Lipkens, T. S. Lucas, T. W. Van Doren, and E. A. Zabolotskaya, "Nonlinear standing waves in an acoustical resonator," J. Acoust. Soc. Am., 104 (5), pp.2664-2674 (1998)
- (9) Y.-D. Chun, and Y.-H. Kim, "High acoustic pressure near resonance in an oscillating tube," *Internoise 99*, Fort Lauderdale, Florida, U.S.A. pp. 359-362, (1999)
- (10) Y.-D. Chun and Y.-H. Kim, "Numerical analysis for nonlinear resonant oscillations of gas in axisymmetric closed tubes," *J. Acoust. Soc. Am.*, 108 (6), pp.2664-2674 (2000)
- (11) D. T. Blackstock, *Fundamentals of physical acoustics*, John Wiley & Sons, 2000, Appendix. C
- (12) K. W. Thompson, "Time-Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems,II," *J. Comput. Physics*, 89, 1990, pp.439-461
- (13) S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, McGRAW-HILL, 1988