

공진과 반공진 특성을 동시 고려한 모델 축소

Model Reduction Considering Both Resonances and Antiresonances

허진석*, 이시복**, 이창일***

Jin Soek Hoe, Shi Bok Lee, Chang Il Lee

Key Words : Resonance(공진점), Antiresonance(반공진점), FE model(유한요소모델), Model Reduction(모델 축소), Optimal design(최적설계)

ABSTRACT

The Frequency Response Function(FRF)s of FE Model reduced by SEREP methods accurately estimate the full model at resonance frequencies. However these FRFs are not accurate at antiresonance frequencies. Additionally, the truncation errors may be significant in the reduction model. So this paper considers the possibility of SEREP method through a numerical method to preserve dynamic behavior at antiresonance and applies the static or dynamic compensation methods for truncation errors to the reduction model. This compensated reduction model is redesigned for pole-zero cancellation with the objective of reducing a resonance frequency.

1. 서론

기계 구조물의 동적해석을 위해서는 이산요소모델이 주로 사용되며 이를 위해 유한요소법이 보편적으로 사용된다. 유한요소법은 매우 복잡한 대형 구조물의 수학적 모델을 수립할 수 있는 장점은 있으나 구조물의 모드 매개 변수를 정확하게 예측하기 위해서는 매우 많은 수의 자유도가 필요하며 그 수는 수 천 또는 수만에도 이르러 방대한 계산용량과 해석시간이 요구된다. 또한 유한요소법은 계가 정확히 모델링되면 그 유용성이 크지만 계의 모델은 여러 불확실 변수로 인하여 오차를 수반하며 이런 불확실한 변수는 해석결과를 부정하는 요인이 된다. 그 결과 유한요소모델의 개선을 위하여 실험적해석 결과를 반영하여 유한요소모델을 개선시키는 방법이 연구되어져 왔다.

실험 모델을 통한 유한요소모델을 개선할 경우 두 모델 사이의 변수들은 일치하지 않으며 일반적으로 유한요소모델의 자유도 수가 실험 모델의 자유도 수보다 크며, 유한 요소모델의 자유도를 실험 모델의 자유도로 축소하는 방법이 널리 사용되어진다. 가장 오래 되고 널리 사용

되어지는 축소 방법은 정적 축소로 Guyan^[1]에 의해 제시되었다. 이 방법은 축소될 자유도에 관계한 관성행이 무시되기 때문에 정적 모델에 대해서는 정확한 반면 축소될 모델이 동적 모델일 경우 정확성이 떨어지며, 따라서 자유도 선택에 민감하다. 이러한 단점을 극복하기 위해 O'Challaghan^[2]은 IRS(Improved Reduction System)와 SEREP(System Equivalent Reduction and Expansion Process)라고 불리는 방법을 제안 했다. IRS 방법은 의사 정적 힘을 관성행에 포함시키므로 정적 축소보다 향상된 결과를 얻는다. 그러나 이 또한 정적 축소 모델에 의존하므로 자유도 선택에 민감하다. SEREP 방법은 축소된 모델의 고유치와 고유 모드가 축소되기 전과 정확히 일치하고 자유도 선택에도 무관하지만, 실제 고유치 해석을 해야한다. Friswell^[3]은 IIRS(Iterated Improved Reduction System)을 제안하였다. 이 방법은 IRS방법에 반복적인 알고리즘을 도입하여, 축소된 유한요소모델의 고유치와 고유모드가 반복계산을 통해 전체 고유치 해석없이 SEREP 방법에 의해 축소된 모델로 수립한다. 그러나 이 방법 또한 정적 축소 모델에 의존하므로 자유도 선택에 민감하다.

본 논문에서는 SEREP 방법으로 축소된 모델에서 모

*), (**), (***) 부산대학교 대학원 기계설계공학과

***) 부산대학교 기계공학과

델 축소시 생기는 오차를 줄이는 방법으로 생략된 고차모드를 보상하는 정적보상 및 동적보상의 방법을 적용하고 또한 축소 전 모델의 공진점과 반공진점의 일치성을 위해서 최적설계의 기법을 도입하여 수치적 방법으로 접근하고자 한다. 그리고 축소후 개선된 모델에서 공진과 반공진을 일치 시켜 원하는 주파수에서 진동을 피하도록 진동설계(Pole-Zero Cancellation)를 하고자 한다.

2. 축소된 모델의 개선

2.1 고차모드 보상에 의한 개선

모델의 자유도 축소에 따른 절단오차(truncation error)를 보상하기 위해 아래의 방법을 도입한다. 구조물에서 측정된 완전한 FRF 는 아래식과 같이 저주파수 잉여항 부분, 해석되는(측정되는) 영역 즉 관심주파수영역 그리고 고주파수 잉여항 부분으로 나눈다.

$$H_{ij}^c(\omega) = \sum_{r=1}^{m-1} 1 + \sum_{r=m}^{m_2} \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} + \sum_{r=m_2+1}^N \quad (1)$$

일반적으로 측정이 0 Hz에서 시작되기 때문에 실제적으로 나타나는 중요한 문제는 고주파수 항이다. 따라서 식의 첫째, 둘째항은 알고 있다고(측정된다고) 가정하면 다음식과 같다.

$$H_{ij}^c(\omega) = \sum_{r=1}^m \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} + \sum_{r=m+1}^N \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (2)$$

고주파수 잉여항은 다음과 같다.

$$R_{ij}(\omega) = \sum_{r=m+1}^N \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (3)$$

이것은 측정 주파수영역 밖의 모든 모드의 합이다.

단지 해석적인 구조물에 대해서는 고주파수 잉여항을 계산하기위해서 전체구조물의 동적해석을 수행하는 것이 가능하다. 또한, 측정 FRF가 이용될 때(고주파수 모드는 포함되지않는다.) 다음과 같다.

$$R_{ij}(\omega) = H_{ij}^c(\omega) - \sum_{r=1}^m \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (4)$$

측정 FRF는 실험 FRF를 이용하지않을 때, 물리 매개변수 행렬(질량,감쇠,강성 행렬)로부터 얻어진다.

식(4)은 식(5)와 같이 표현된다.

$$[R(\omega)] = ([K] - \omega^2[M] + i[D])^{-1} - ([\phi'][\lambda_r^2 - \omega^2][\phi']^T) \quad (5)$$

관심주파수 영역밖의 모드를 정적 보상하기 위해서 고주파수 잉여항을 가정함으로써 식(5)를 단순화하고, 일반적으로 감쇠가 고려되지 않을 때 식 (5)는 정적 잉여항으로써 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[R_0] = [K]^{-1} - [\phi'][\lambda_r^2][\phi']^T \quad (6)$$

위 식의 주요 문제점은 구조물이 강체 모드를 가질 때 질량 행렬이 비정칙행렬이 되기 때문에, 0 Hz 근처의 주파수에서 계산되어야한다.

정적 잉여보상은 관심 주파수 영역밖의 고유 진동수가 관심영역내의 마지막 주파수보다 더 높은 경우에 유효하다. 모드 빈도가 높을 때 관성효과가 무시될 수 있다는 가정은 더 이상 유효하지 않다. 그러한 경우에 잉여항은 동적 보상을 하여 계산된다. 식(1)에서 각각의 FRF에 대한 잉여항의 보상은 계산에서 사용된 모드에만 의존한다. 이것은 모드가 지역 매개변수이고 반면에 고유 진동수와 감쇠비는 전역 매개변수이기 때문이다. 이러한 점에 근거하여 고주파수 잉여항의 보상을 모는 매개변수를 이용하여 수행하는 대신 지역 매개변수만을 사용한다.

잉여항을 다시쓰면 다음과 같다.

$$R_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} - \sum_{r=1}^m \frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (7)$$

윗식을 지역 매개변수만으로 가정하여 행렬형태로 정의하면 다음과 같다.

$$[R^M] = [\phi][\phi]^T - [\phi'][\phi']^T \quad (8)$$

여기서, 상첨자 M 은 변경된 잉여항을 나타내기위해 사용된다. 사용되는 모드는 질량 정규화된 모드이므로

$$[M]^{-1} = [\phi][\phi]^T \quad (9)$$

식(9)을 식(8)에 대입하면 다음과 같다.

$$[R^M] = [M]^{-1} - [\phi'][\phi']^T \quad (10)$$

식(8)를 식(10)와 비교해보면 잉여 행렬이 강성행렬에 관계되는 대신에 질량행렬에 관계된다. 이것은 고주파수 잉여항이 관심주파수영역내에서 강성과 같은 효과를 가진다는 개념에 위배된다. 그래서, 수정된 새로운 고주파수

영여향을 도입하기위해 전역매개변수가 포함되어야만 한다. 따라서, 고주파수 의사 질량 고유치를 전역매개변수로 도입하여 다음식으로 표현한다.

$$[R^M(\omega)] = \frac{1}{\lambda_{HF}^2 - \omega^2} [R^M] \quad (11)$$

여기서, λ_{HF} 는 고주파수 의사 질량 고유치이다.

λ_{HF} 는 관심주파수영역내의 마지막 주파수보다 1.5배에서 2배정도의 값을 택한다.

2.2 최적설계기법을 적용한 개선

모델 축소 후 공진점과 반공진점의 정확한 일치를 위해 수치적인 접근으로 심플렉스 알고리즘을 응용하는 방법을 제시한다. SEREP 축소는 공진점은 정확하게 일치하나 반공진점에서 오차가 생기는데, 최적설계를 위한 제약 조건으로 축소된 모델의 공진점과 반공진점을 전체모델의 공진점과 반공진점과 같다고 둔다.

$$\lambda_i(K, M) = \frac{k_i}{m_i} = \frac{\{\phi_i\}^T [K_r] \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [M_r] \{\phi_i\}} \quad (12.a)$$

$$\bar{\lambda}_i(\bar{K}, \bar{M}) = \frac{x_i}{\mu_i} = \frac{\{\phi_i\}^T [\bar{K}_r] \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [\bar{M}_r] \{\phi_i\}} \quad (12.b)$$

여기서 M, K 는 전체 모델의 질량, 강성행렬이고 M_r, K_r 은 축소된 모델의 질량, 강성행렬이고 ϕ_i 는 축소된 모델의 i 번째 고유벡터이다.

목적함수는 축소 후 모델의 질량 또는 강성행렬과 개선된 질량 또는 강성행렬과의 차를 최소화하는 것으로 두고, 설계변수는 축소 후 개선된 모델의 질량 또는 강성행렬의 원소와 개선되기전의 질량 또는 강성행렬의 차로 둔다. 이 때 행렬의 계산과정이 연립 1차 방정식이므로 심플렉스 알고리즘의 적용이 가능하다.

$$f = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{kk} \quad (13.a)$$

$$x_{ij} = m_{m,ij} - m_{r,ij} \geq 0 \quad \dots \dots \quad (13.b)$$

(or $x_{ij} = k_{m,ij} - k_{r,ij} \geq 0$), $i, j = 1, k$

여기서 m_m, k_m 은 축소후 개선된 질량, 강성행렬이다. 위의 제약조건에서 보면, 심플렉스 알고리즘을 통하여 질

량 또는 강성행렬이 개선되지만 그에 따른 고유벡터는 그대로이다. 그러므로 심플렉스 알고리즘을 반복적으로 적용한다.

3. Pole-Zero Cancellation

3.1 단위계수수정(Unit-rank modification)

다자유도 시스템에서 두 자유도 사이에 강성 k^* 를 추가할 경우, 강성행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$K^* = K + k^* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

좌표변환은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ & & I_{(n-2)(n-2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)/\sqrt{2} \\ (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (15.a)$$

$$T^T K^* T = T^T K T + k^* \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (15.b)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ & & I_{(n-2)(n-2)} \end{bmatrix} \quad (15.c)$$

질량 행렬의 경우도 같은 변환이 적용된다.

3.2 Pole-Zero Cancellation

수정되기전의 고유치 λ_i 와 고유벡터 ϕ_i 를 다음과 같이 표현한다.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i), \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (16.a)$$

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] \quad (16.b)$$

두 좌표 f와 g 사이에 강성 k^* 가 추가된다면, 수정된 구조물의 고유치분해는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$(\Lambda + k^* z z^T) \phi_r^* = (\lambda_r - \Delta \lambda) \phi_r^* \quad (17)$$

여기서

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_{f,1} - \phi_{g,1} \\ \phi_{f,2} - \phi_{g,2} \\ \vdots \\ \phi_{f,h} - \phi_{g,h} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_r + \Delta \lambda = \bar{\lambda}_s$$

z 의 h 번째 요소가 0이면, h 번째 모드에서 두 좌표 f와 g를 연결하는 강성은 강성의 효과를 나타내지 않을

것이며 h 번째 고유치는 수정 후에도 변화되어 있지 않을 것이다.

여기서 k^* 는 Pomazal 과 Snyder⁽¹¹⁾와 Zhang 과 Lallement⁽¹²⁾에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{1}{k^*} = - \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{\lambda_i - (\lambda_r + \Delta\lambda)} \quad (18)$$

$$\frac{1}{k^*} = - \sum_{i=1}^n \frac{v_i \omega_i}{\lambda_i - (\lambda_s + \Delta\lambda)} \quad (19)$$

여기서

$$v = \begin{pmatrix} \xi_{f_1} - \xi_{g_1} \\ \xi_{f_2} - \xi_{g_2} \\ \vdots \\ \xi_{f_n} - \xi_{g_n} \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} \psi_{f_1} - \psi_{g_1} \\ \psi_{f_2} - \psi_{g_2} \\ \vdots \\ \psi_{f_n} - \psi_{g_n} \end{pmatrix}$$

ψ_i 와 ξ_i 는 부행렬 \bar{M} , \bar{K} 의 i 번째 고유치에 대한 좌고유벡터 와 우고유벡터이다.

Pole-Zero Cancellation 의 목적은 r 번째 의 공진점을 s 번째의 고정된 반공진점으로 이동시켜 제거하는 것이다. 제거하려는 공진점 λ_r 은 식(18)을 이용하여 고정된 λ_s 의 값과 일치하도록 변화될 수 있다. 또한 식(19)을 통해서 반공진점 λ_s 를 고정된 공진점 λ_r 에 일치하도록 이동시켜서 공진점을 제거할 수도 있다.

4. 수치 실험

4.1 수치 실험

앞에 제시된 이론에 따라 유한요소모델의 축소와 생략 모드의 보상, 그리고 심플렉스 알고리즘을 적용한 모델개선 그리고 Pole-zero cancellation을 적용하고자 한다. 우선 수치실험을 위해서 평판을 아래와 같이 유한요소모델 하였다. 재료는 알루미늄으로 하고 밀도는 2710 Kg/m^3 , 종탄성계수는 70 Gpa , 프와송비는 0.33으로 두고, 가로 600mm, 세로 500mm 두께는 5mm로 모델링하였다.

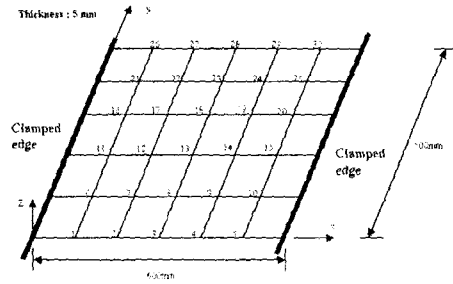


Fig.1 The plate example with thirty nodes

4.2 실험 결과 및 고찰

Fig.2는 노드의 z 방향의 자유도를 선택하여 축소 후 정적 및 동적 보상을 하여 전체모델의 FRF와 비교하였다. 정적 보상 및 동적 보상 후 전체 모델에 가까워지나 반공진점에서는 일치 하지 않음을 알 수가 있다.

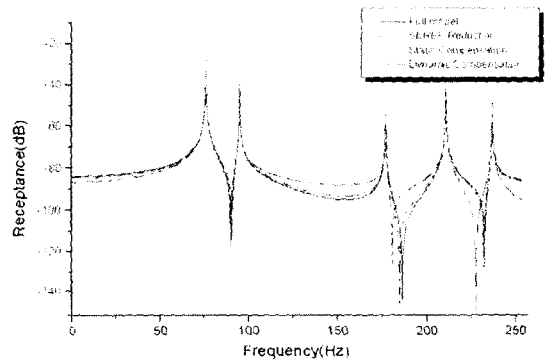


Fig.2 FRFs of Reduction Model by Static or Dynamic Compensation

Fig.3, Fig.4, Fig.5 에서는 축소 후 심플렉스 알고리즘을 응용한 수치적 방법을 적용하여 공진점과 반공진점을 일치시킨 모델의 FRF 이다. 그림에서 보면 전체 모델과 약간의 오차는 있으나 공진점과 반공진점에서 일치함을 알 수가 있다.

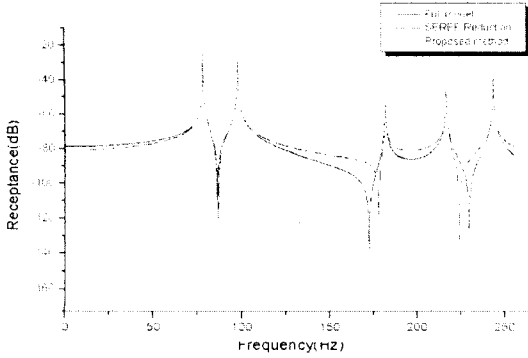


Fig.3 FRFs of Reduction Model by Proposed Method

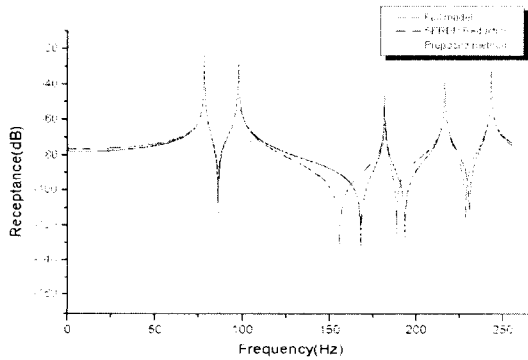


Fig.4 FRFs of Reduction Model by Proposed Method

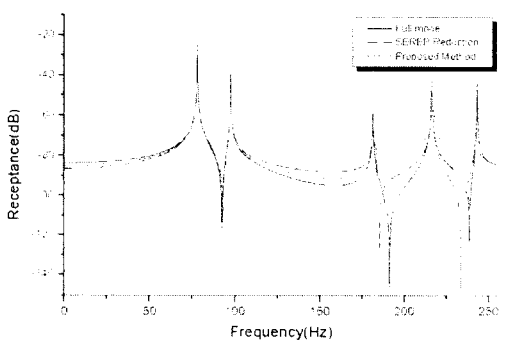


Fig.5 FRFs of Reduction Model by Proposed Method

Fig.6 에서는 제안된 방법으로 모델을 축소할 후에 첫 번째 공진점을 제거하기 위한 Pole-Zero Cancellation을 적용하였다. λ_1 을 고정된 $\bar{\lambda}_1$ 로 이동시켜서 Pole-Zero Cancellation을 적용하기 할 때, 추가로 강성을 추가했을 경우 $\bar{\lambda}_1$ 의 값은 변화 되지 않아야 한다. 그러기 위해 식(19)에서 ν_1 과 ω_1 값 중에서 0 이 되는 값을 선택하여 두 자유도를 선택하여 식(18)을 통해서 강성을 추가해야 한다. 그러나, 이 경우 ν_1 과 ω_1 값 중에서 0 이 되는 값이 없으므로 가장 작은 값이 되는 자유도를 선택하여 반복 수행 함으로써 첫 번째 공진점을 제거 할 수가 있다. 그림에서 보면 처음 1회 및 5회 수행시 공진점과 반공진점이 점점 가까워지거나 일치 하지 않는다. 그러나 20회 반복 수행시 반공진점과 공진점이 일치하여 첫 번째 공진점이 제거됨을 알 수가 있다.

Pole-Zero Cancellation에서 반공진점의 중요성은 강성이 추가되는 자유도의 선택에 있다. 강성이 추가된 자유도의 선택시 모델 축소 등으로 인한 오차로 인해 z, ν 또는 ω 의 값의 변화가 주어지므로 원하는 공진점은 제거 될 수 있으나 잘못된 자유도가 선택될 수가 있다. 표1을 보면 SEREP 축소만으로 자유도를 선택할 경우 1.5번 자유도가 선택되거나 수정후에는 1.5번의 자유도가 선택됨을 알 수가 있다.

Table.1 values of ν

	f=1,g=4	f=1,g=5	f=4,g=5
SEREP Method	-9.28	2.92	0.05
Proposed Method	-6.18	0.17	3.21

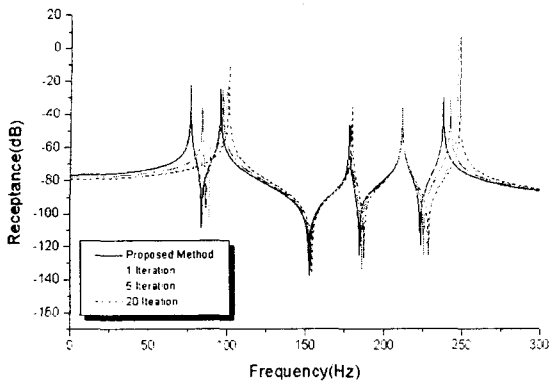


Fig.6 Pole-Zero Cancellation of Reduction Model

5. 결론

본 논문은 공진점과 반공진점의 일치율을 위해서 모델 축소 후 정적 및 동적 보상을 하였고 제안하는 방법으로 모델을 수정한 후 결과를 비교하였다. 또한 Pole-Zero Cancellation을 적용하여 공진점 및 반공진점에서의 중요성을 보였다.

수치실험을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 기존의 유한요소모델의 자유도축소 방법에 정적 및 동적 보상을 하여 전체모델에 근접한 결과를 얻을 수 있었다.
2. 제안하는 방법으로 축소된 모델을 수정할 경우 공진점과 반공진점에서의 일치율을 볼 수가 있었다.
3. Pole-Zero Cancellation에서 반공진점의 중요성을 알 수가 있었다.

참고문헌

1. R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass matrices", AIAA Journal, 1965, Vol. 3, No. 2
2. J. C. O'Callahan, P. Avitabile and R. Riemer, "A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model", IMAC, 1989, pp. 17-21
3. J. C. O'Callahan, P. Avitabile and R. Riemer, "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)", IMAC, 1989, pp. 29-37

4. M. I. Friswell, S. D. Garvey and J. E. T. Penny, "Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques", Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol. 186, No. 2, pp. 311-323
5. MacNeal, R. H., "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis", Computers and Structures, Dec. 1971, Vol. 1, pp. 581-601
6. Maria Lúcia M. Duarte and David J. Ewins, "Improved Experimental Component Mode Synthesis(IECMS) with Residual Compensation Based Purely on Experimental Results", IMAC, 1997, pp. 641-647
7. K. Q. Xu and P. Mas "The Virtues of Static and Dynamic Compensations for FRF Based Substructuring", IMAC, 1997, pp.1463~1468
8. J. E. Mottershead, "On The Zeros of Structural Frequency Response Functions and Their Sensitivities", Mechanical System and Signal Processing, 1998, Vol. 12, No. 5, pp. 591-597
9. J. E. Mottershead, "On The Natural Frequencies and Antiresonances of Modified Structures", IMAC, 1999, pp. 648-653
10. Maria Lúcia M. Duarte and David J. Ewins, "Mass-Residual Approach for The Compensation of High-frequency Residual Terms", IMAC, 1997, pp. 2038-2043
11. R. J. Pomazal and V. C. Snyder, "Local Modifications of Damped liner systems", AIAA Journal, 1971, 9(11), pp.2216-2221
12. Q. Zhang and G. Lallement "Selective Structural Modifications: Applications to the Problems of Eigensolution Sensitivity and Model Adjustment.", Mech. Sys. Sig. Proc. 1989, 3(1), pp55-69
13. J. E. Mottershead and G. lallement "Vibration Node the Cancellation of Poles and Zeros by Unit-Rank Modifications to Structures", Journal of Sound and Vibration, 1999, 222.(5), pp833-851
14. Jasbir S. Arora, "Introduction to Optimum Design", 1989, MacGraw-Hill