한국소음진동공학회 2001년도 춘계학술대회논문집, pp. 948~953.

자기베어링-로터시스템의 LMI 접근법에 의한 H_∞제어기 설계

°박충남* · 송오섭** · 강호식*

H_∞ Control of Magnetic Bearing-Rotor System : LMI-based approaches

(°Chung-Nam Park*, Oh-Seop Song**, Ho-Shik Kang*)

ABSTRACT

Nonlinear dynamic equation of a 4-axis rigid rotor supported by two an-isotropic magnetic bearings is derived via Hamilton's principle. It is transformed to a state-space form for the standard H_∞ control problem. we present a robust H_∞ control design methods of continuous and discrete LMI-based approaches and improve performance using loopshaping.

1. 서 론

자기베어링시스템은 마모와 윤활이 불필요하며 고속회전이 가능하므로 고속회전축의 실현, FA운송시스템, IC 제조장치내의 운송차 등에 널리 활용되고 있다. 자기베어링시스템은 본질적으로 불안정한 시스템이어서, 안정화와 성능을 만족시킬 수 있는 제어가 필요하였으므로 이에 대한 다양한 연구결과로 PD, PID제어[3]로부터 최적제어[2,4], H_∞제어[5]의 적용 사례가 발표되었다.

본 논문은 자기베어링시스템중 자이로효과(gyroscopic effect)에 의한 로터 양단의 연성(coupling)을 제어하는 것에 관한 연구이다. 4축 제어입력과 4축 변위출력의 다변수 입출력시스템에 대한 동력학적 모델링을 하고 선형행렬부등식에 기초한 H_∞제어방법을 통해 시스템을 안정화하였다. 설계 제약조건으로 리카티(Riccati) 방정식을 풀 수 없게 되는 경우에 준최적제어기를 설계할 수 있도록 P. Gahinet[9]이 제시한 선형행렬부등식 접근방법을 적용하여 H_∞제어기를 설계한다.

* 충남대학교 기계공학과 대학원

** 충남대학교 기계공학과

2. 운동방정식

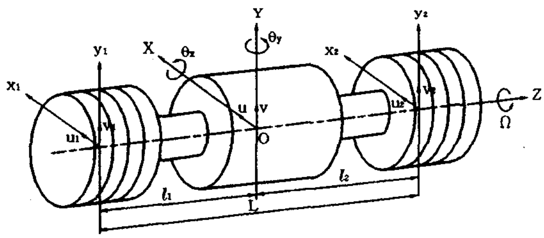


Fig. 1 Configuration of a rotor & magnetic bearings

Fig.1의 자기베어링-로터 시스템에서 에너지방법으로 유도한 운동방정식은 식(1)과 같다.[2]

$$M_r\ddot{r}+G_r\dot{r}+K_r r=D_r i \tag{1}$$

$$M_r=\frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} ml_2^2+J_t & ml_1l_2-J_t & 0 & 0 \\ ml_1l_2-J_t & ml_1^2+J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml_2^2+J_t & ml_1l_2-J_t \\ 0 & 0 & ml_1l_2-J_t & ml_1^2+J_t \end{bmatrix}$$

$$G_r=\frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & J_p\Omega & -J_p\Omega \\ 0 & 0 & -J_p\Omega & J_p\Omega \\ -J_p\Omega & J_p\Omega & 0 & 0 \\ J_p\Omega & -J_p\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_r=\begin{bmatrix} -K_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{y2} \end{bmatrix}$$

$$D_r=\begin{bmatrix} K_{i_{x1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{i_{x2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{i_{y1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{i_{y2}} \end{bmatrix},\quad r=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},\quad i=\begin{bmatrix} i_{x_1} \\ i_{x_2} \\ i_{y_1} \\ i_{y_2} \end{bmatrix}$$

전자석과 증폭기의 동특성은 다음과 같다.

$$\dot{i} = -T_a i + T_b u \qquad (2)$$

$$T_a=\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{ax1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_{ax2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{ay1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{ay2}} \end{bmatrix}$$

$$T_b=\begin{bmatrix} \frac{K_{ax1}}{\tau_{ax1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{ax2}}{\tau_{ax2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{ay1}}{\tau_{ay1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_{ay2}}{\tau_{ay2}} \end{bmatrix}$$

3. 선형행렬부등식에 기초한 H_∞제어

표준 H_∞제어 알고리즘은 식(3)과 같이 간략하게 나타낼 수 있다. 여기에서 w는 외란, 잡음, 기준신호(reference signal) 등을 포함하는 외부입력항이며, z는 제어량, u는 제어기에서 계산되어져 나오는 제어입력, y는 출력 측정값(measurement) 이다.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \qquad (3)$$

H_∞제어는 w에서 z로의 폐루프 전달함수행렬(Transfer Function Matrix ; TFM) T_{zw}의 H_∞놈(H_∞ norm) $\| T_{zw} \|_\infty$을 다음과 같이 최소화하는 안정된 제어기 $K(s)$를 설계하는 것이다.

$$\| T_{zw} \|_\infty < \gamma \quad (\gamma > 0) \qquad (4)$$

다시 식(3)에서 이 시스템의 상태방정식을 식(5)와 같이 쓸 수 있다.

$$P(s)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x & w & u \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \dot{x} \\ z \\ y \end{array} & \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C1 & D11 & D12 \\ C2 & D21 & D22 \end{array}\right] \end{array} \qquad (5)$$

즉,
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned}$$

식(6)에서 다음 조건이 만족된다고 가정한다.

① $(A,\ B_1)$이 제어가능, $(C_1,\ A)$이 관측가능

② $(A,\ B_2)$이 안정가능, $(C_2,\ A)$이 검출가능

③ $D_{12}{}^T [C_1 \ D_{12}] = [O \ I]$

④ $\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} D_{12}{}^T = \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}$ (6)

여기에서 식 (3)이 만족되려면 두 개의 리카티 방정식과 $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$이 만족되어야만 한다. 여기에서 $\rho(X_\infty Y_\infty)$은 행렬 $X_\infty Y_\infty$의 스펙트럼 반경(spectral radius)이며 이상의 조건식들을 이용해 두 리카티 방정식의 유일해인 X_∞, Y_∞를 구하여 제어기를 설계할 수 있다.[8] 이러한 두 개의 리카티 방정식을 푸는 문제가 아닌 선형행렬부등식에 의한 방법은 식(7)의 선형행렬부등식을 만족하는 R, S행렬을 통해 성능지수 γ를 달성하는 준최적제어기를 얻는 것으로[9,10], 조건 (6)의 ③, ④에 의해서 제한되지 않는다.

$$\begin{bmatrix} N_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR+RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TS+SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^TS & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (7)$$

4. 로터-자기베어링시스템의 H_∞제어기 설계

다음은 운동방정식 식(1)과 전자석 및 증폭기 동특성 식(2)를 식(5)의 H_∞표준문제의 상태공간 표현으로 나타냈을 때의 변수값들이다.

$$x=\begin{bmatrix}\underline{r}\\ \dot{\underline{r}}\\ \underline{i}\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u_{x_1}\\ u_{x_2}\\ u_{y_1}\\ u_{y_2}\end{bmatrix},\quad z=\begin{bmatrix}\underline{z_1}\\ \underline{z_2}\end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix}\underline{d}\\ \underline{n}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}O_4 & I_4 & O_4\\ -M_r^{-1}K_r & -M_r^{-1}C_r & M_r^{-1}D_r\\ O_4 & O_4 & -T_a\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}O_4 & O_4\\ O_4 & O_4\\ O_4 & O_4\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}O_4\\ O_4\\ T_b\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}-I_4 & O_4 & O_4\\ I_4 & O_4 & O_4\end{bmatrix},\quad C_2=[-I_4\ \ O_4\ \ O_4]$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}I_4 & O_4\\ O_4 & O_4\end{bmatrix},\quad D_{12}=\begin{bmatrix}O_4\\ O_4\end{bmatrix},$$

$$D_{21}=[O_4\ \ I_4],\quad D_{22}=O_4$$

$\underline{d}$: disturbance vector $\underline{n}$: sensor noise vector

(8)

성능 개선을 위한 혼합감도 최소화와 국소 극점 배치에 의한 루프쉐이핑의 관계식은 다음과 같다.[8]

(1) 요구성능과 외란 억제 구속조건식

$$\|W_s(s)\ S(s)\|_\infty < 1$$

(2) 불확실성에 대한 강건안정성 구속조건식

$$\|W_t(s)\ T(s)\|_\infty < 1$$

$$S(s)=[I+G_0K(s)]^{-1},$$
$$T(s)=G_0K(s)\,[I+G_0K(s)]^{-1} \qquad (9)$$

$S(s)$는 감도함수, $T(s)$는 보조감도함수이다. 또한, W_s, W_t는 요구성능과 강인안정성을 위한 가중함수이다. W_s는 일반적으로 저주파 영역에서 에너지를 갖는 명령입력과 외란에 대한 성능을 위해서 이 영역의 감도함수를 최소화하며, W_t는 고주파 영역에서 중요한 문제로 작용하는 모델 불확실성과 센서 잡음에 대해 강건한 시스템을 위해서 보조감도함수를 최소화시킨다. 이 두 하중함수는 다음과 같이 선정하였다.

$$w_s=\left(\frac{s/\sqrt[k]{M_s}+\omega_{bs}}{s+\omega_{bs}\sqrt[k]{\varepsilon_s}}\right)^k,\quad W_s=\begin{bmatrix}w_s & 0 & 0 & 0\\ 0 & w_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & w_s\end{bmatrix}$$

$$w_t=\left(\frac{s+\omega_{bu}/\sqrt[k]{M_t}}{\sqrt[k]{\varepsilon_t}\,s+\omega_{bu}}\right)^k,\quad W_t=\begin{bmatrix}w_t & 0 & 0 & 0\\ 0 & w_t & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_t & 0\\ 0 & 0 & 0 & w_t\end{bmatrix}$$

$$M_s=80,\ \omega_{bs}=4000(rad/s),\ \varepsilon_s=\frac{1}{10^5},\ k=1$$
$$\therefore\ w_s=\frac{s+16000\sqrt{10}}{4\sqrt{10}s+160}$$

$$M_u=10^4,\ \omega_{bu}=6000(rad/s),\ \varepsilon_1=\frac{1}{10^6},\ k=1$$
$$\therefore\ w_t=\frac{1000s+60000}{s+6000000}$$

(10)

선택된 하중함수를 포함하는 확장 플랜트 $P_{aug}(s)$는 식(11)과 같이 구할 수 있다. 위의 하중함수 선정 방법은 기본 형태의 하중함수[8]에서 시작하여 주파수 응답 및 변위출력과 제어입력에 대한 시간응답에서 설계사양을 만족할 수 있는 제어기를 조정하여 설계하였다.

$$\begin{bmatrix}\underline{z_1}\\ \underline{z_2}\\ \underline{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_s(s) & W_s(s)G_0(s) & -W_s(s)G_0(s)\\ 0 & 0 & W_t(s)\\ I & G_0(s) & -G_0(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{w_1}\\ \underline{w_2}\\ \underline{u}\end{bmatrix}$$

$$G_0(s)=\left[\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right],$$

$$W_s(s)=\left[\begin{array}{c|c}A_{w_s} & B_{w_s}\\ \hline C_{w_s} & D_{w_s}\end{array}\right],\quad W_t(s)=\left[\begin{array}{c|c}A_{w_t} & B_{w_t}\\ \hline C_{w_t} & D_{w_t}\end{array}\right]$$

$$P_{aug}(s)=\left[\begin{array}{ccc|cc|c}A_{w_s} & 0 & -B_{w_s}C & B_{w_s} & 0 & 0\\ 0 & A_{w_t} & 0 & 0 & B_{w_t} & 0\\ 0 & 0 & A & 0 & B & B\\ \hline C_{w_s} & 0 & -D_{w_s}C & D_{w_s} & 0 & 0\\ 0 & C_{w_t} & 0 & 0 & 0 & D_{w_t}\\ \hline 0 & 0 & -C & I & 0 & 0\end{array}\right] \qquad (11)$$

플랜트 $G_0(s)$의 극점이 제어기 플랜트 $K(s)$의 영점에 의해 상쇄되는 것을 방지해 발진응답을 막는 국소

극점 배치를 위한 하중함수는 다음과 같다.

$$w_1 = \frac{5000}{s+5000}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

식(10)과 (12)에서 4×4대칭행렬로 구성된 하중함수는 플랜트가 4입력 4출력 모델이기 때문이다. 선정된 하중함수를 포함하는 전체 플랜트는 Fig. 3과 같이 표현될 수 있으며 Fig. 4와 같은 제어구조이다.

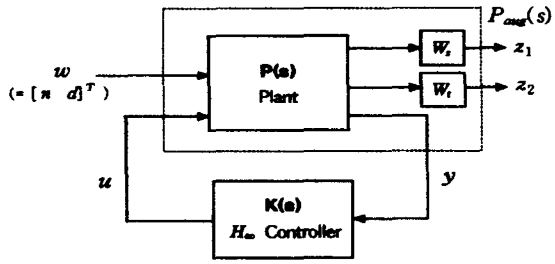


Fig. 3 Augmented plant $P_{aug}(s)$

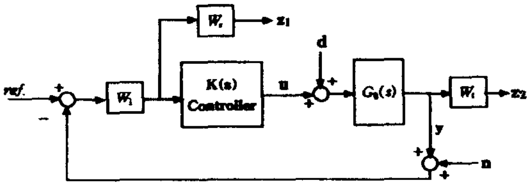


Fig. 4 Control structure

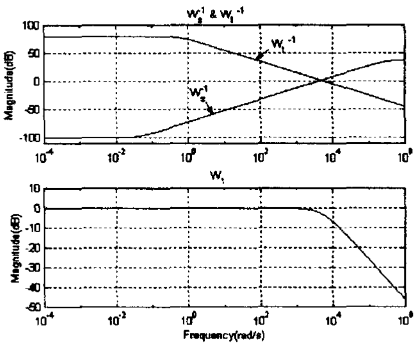


Fig. 5 Chosen weihgting functions

원래 플랜트와 W_1에 의해 변형된 플랜트의 게인이득은 Fig. 6과 같다. Fig. 7은 성능개선 전후의 폐루프 TFM의 특이치선도이고, Fig. 8은 스텝외란과 정현파 잡음이 있을 경우의 변위응답 비교를 나타낸 것으로서 저주파 외란에 대한 명령추종능력이 개선됨을 볼 수 있다.

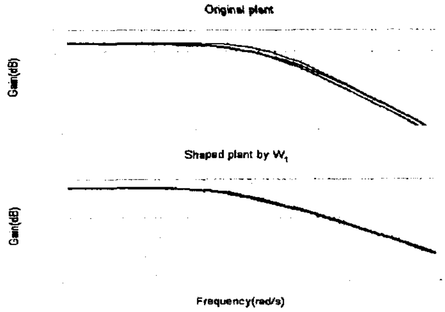
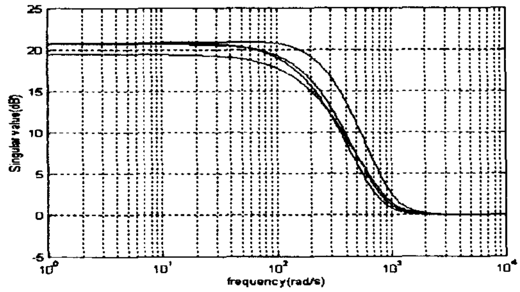
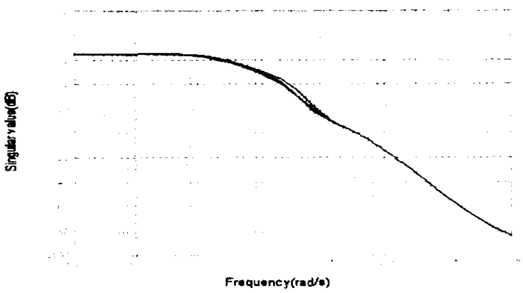


Fig. 6 Gain diagram of original & shaped plant



(a)



(b)

Fig. 7 Singularvalues of closed-loop TFM for each plant w/o weights(a) & with weights(b)

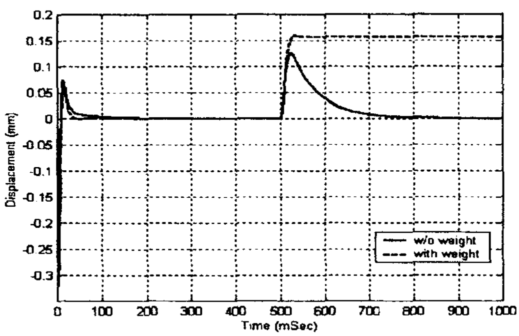


Fig. 8 Diplacement responses of each plant w/o & with weights

5. 모의실험에 대한 고찰

비교를 위하여, Fig. 9와 같은 PID제어기와 LQ서보 제어기로 40000rpm에서 설계된 모델을 모의실험하고 v_1의 응답을 고찰하였다. 설계된 H_∞제어기의 시간응답을 PID 제어기, LQ서보 제어기와 비교를 Fig. 10~13에서 볼 수 있다. 성능면에서 볼 때, LQ서보 제어기가 가장 우수하며 PID제어기는 부족응답을 보이고 있다. 이에 비해 H_∞제어기는 정착시간은 다소 늦지만 명령 추종성능은 우수하며 오버슈트도 25%정도로 PID제어기보다 작게 나타나며 적분요소의 첨가로 인해 2%정도의 언더슈트가 있음을 알 수 있다. 제어 입력에 대한 응답에서는 H_∞제어기가 가장 만족스러운 결과를 얻었음을 볼 수 있다. 특히, LQ서보제어기는 초기에 과도한 에너지가 소요된다. 센서 잡음이 있을 경우와 외란이 있을 경우(Fig.10,12)에 대한 각 제어기에 대한 비교에서는 만족도가 H_∞, LQ서보, PID 순으로 높게 나타났다. PID 제어기는 센서잡음증폭 방지를 위해 1차 필터를 미분제어기에 포함한 모델이었음에도 불구하고 에너지입력에 비해 잡음제거가 좋지않았고 H_∞제어기는 스텝 외란이 들어온 후 300ms 후 명령추종을 완벽히 수행하고 있는데 반해, LQ서보제어기와 PID제어기는 외란의 영향이 남아 있다. 마지막으로 모델오차(modelling error)에 의한 불확실성에 대한 H_∞제어기의 성능 검사를 Fig. 14와 같이 수행하였다. 로터 회전속도 40000 rpm에서 설계된 제어기를 0 rpm에서 적절하게 부상시킬 수 있고 과속도(100000 rpm)에서도 적절한 응답을 보임을 알 수 있다.

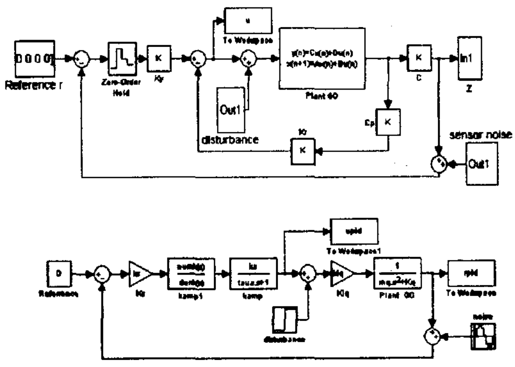


Fig. 9 LQservo(above) & PID(below) control structures

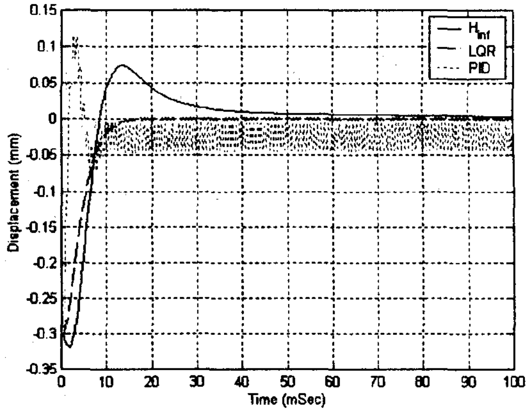


Fig. 10 Displacement responses of Systems with noise

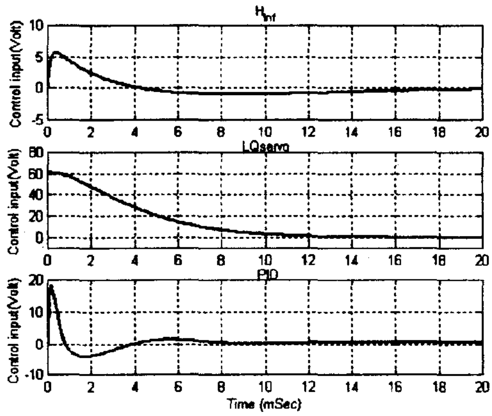


Fig. 11 Control input responses of systems w/o disturbance & noise

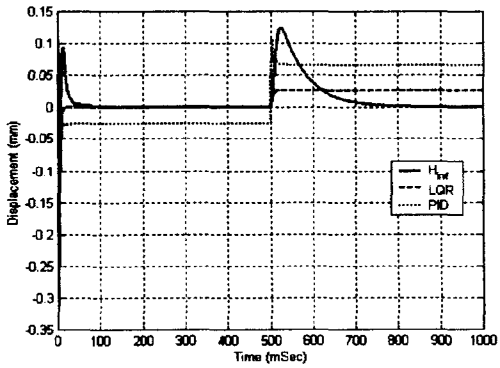


Fig. 12 Displacement responses of systems with disturbance

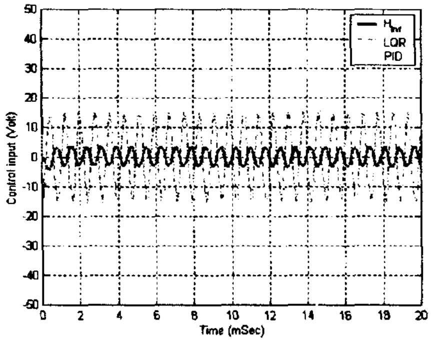
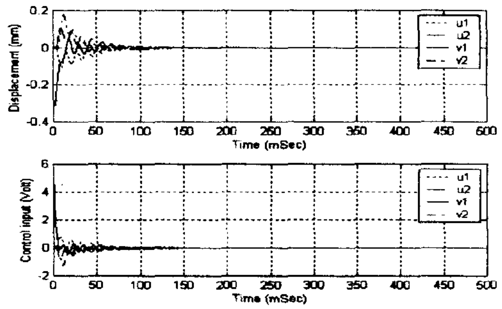
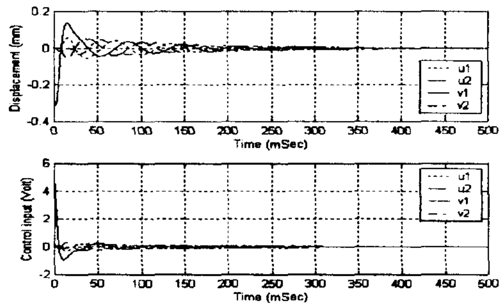


Fig. 13 Control input responses with noise



(a)



(b)

Fig. 14 Responses of systems with modelling error
(a) 0rpm (b) 100000rpm

6. 결 론

다변수 입출력을 갖는 로터-자기베어링 시스템에 대하여 에너지방법을 이용한 운동방정식을 유도하여 강건안정성(robust stability)을 보장하는 H_∞제어기를 LMI 접근방법으로 설계하였다. LQ서보제어기, PID제어기보다 외란제거 성능과 센서잡음소거 성능이 우수하고 제어입력이 적절한 준최적제어기를 설계할 수 있었다. 특히, 모델오차에 대한 강건함을 보였다.

Table 1 Parameters of magnetic bearing-rotor system

Parameters	Value
Mass of rotor (m)	6.7 (kg)
Diametral mass moment of inertia (J_t)	0.0916 (kg · m)
Polar mass moment of inertia (J_p)	0.003246 (kg · m)
Location of bearing #1, #2 (l_1 , l_2)	0.146 (m)
Current stiffness (K_{ix1} , K_{ix2})	118.20 (N/A)
Current stiffness (K_{iy1} , K_{iy2})	125.60 (N/A)
Position stiffness (K_{x1} , K_{x2})	0.236E6 (N/m)
Position stiffness (K_{y1} , K_{y2})	0.285E6 (N/m)
DC gain (K_{ar})	0.5 (A/V)
Time constant (τ_{ar})	1.60E(-3) (Sec)
Sampling Time (T)	0.1 (mSec)

7. 참고문헌

(1) H.M.Chen and M.S.Darlow, "Magnetic Bearing With Rotating Force Control," *Transactions of the ASME, J. of Tribology*, Vol. 110, Jan., pp. 100-105, 1988.

(2) 강호식, "로터-자기베어링 시스템의 능동 최적 제어", 석사학위 논문, 충남대학교, 1999.

(3) 박영진, "능동자기베어링의 PID 제어", 석사학위 논문, 한양대학교, 1993.

(4) 박영진, 정성종, "능동 자기베어링시스템의 중앙집중식 디지털제어," J. of the Mechanical Engineering and Technology Research Ins. Vol. 3, No. 3, pp. 135-145, 1997.

(5) 박종인, " H_∞제어를 이용한 회전체-자기베어링의 진동제어", 석사학위 논문, 중앙대학교, 1999.

(6) O.Song, H.D.Kwon and L.Librescu, "Bending vibtion of Gyroelastic Thin-Walled Beams Incorporating Adaptive Capabilities", AIAA-98-2041, 1998.

(7) 김종식, "선형제어시스템 공학", 청문각, 1998.

(8) Kemin Zhou and John.C.Doyle, "Essentials of Robust Control", Prentice -Hall, 1998.

(9) P.Gahinet and P.Apkarian, "A Linear Matrix Inequality approach to H_∞ control", Int. J. Robust Nonlinear Control, 4, pp. 421-448, 1993.

(10) P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub and M.Chilali, "LMI Control Toolbox", The MathWorks Inc, 1995.