

# 증기 터빈 블레이드 그룹의 3차원 유한요소 진동 해석

°서 자 력\*, 류 석 주\*\*, 박 중 포\*\*

## A 3-Dimensional Finite-Element Vibration Analysis of Blade Groups for Steam Turbines

Zili Xu, Seok-Ju Ryu, and Jong-Po Park

### Abstract

A 3-dimensional finite element model for vibration analysis of steam-turbine blade groups is presented, employing the 3-dimensional incompatible brick element with 8 nodes. The skew coordinate system is introduced in the model for considering multi-axis symmetry and specialty of displacement constrain condition of blade groups. Vibration characteristics of blade groups are analyzed, and compared with experimental results.

### 1. 서론

회전하는 블레이드는 주위 작동유체의 유동에 의한 동적인 힘을 받는다. 블레이드의 고유진동수가 이 동적 힘의 주파수와 일치하게 되면 블레이드에는 공진에 의한 큰 진동이 발생하며, 결과적으로 블레이드는 피로 손상을 입게된다. 따라서 터빈 블레이드의 구조 건전성 및 신뢰성 확보를 위해 설계 단계에서 블레이드의 고유진동수 및 고유모드를 예측하는 것은 매우 중요하다<sup>(1-3)</sup>.

증기 터빈의 대용량화와 고 효율화에 따라 블레이드의 기하학적 형상은 익(vane) 단면이 비대칭(asymmetry)이 되고, 길이를 따라 미리 꼬여지고(pre-twisted) 테이퍼 지는 등 점점 복잡해져 왔다. 이처럼 복잡한 블레이드 형상을 보다 정확하게 모델화 가능한 것은 이산 해석법 중 유한요소법이라고 할 수 있다.

본 논문에서는 8 절점 비호환 브릭 요소(8-node incompatible brick element)를 도입하여 블레이드 진동 해석을 위한 유한요소 방정식을 제시한다<sup>(4)</sup>. 이 요소는 구조물의 굽힘 변형에 대하여 강성은

과대 평가하는 8 절점 등방성 요소(8-node isoparametric brick element)의 단점을 보완하며, 20 절점 등방성 요소보다는 적은 수의 절점을 가진다<sup>(5)</sup>.

유한요소모델은 직각 좌표계를 기준으로 하기 때문에 로터 회전 축에 대해 대칭 구조인 블레이드들에 경계 조건을 적용하기 위해, 기준 좌표계와 평행하지 않은 경계조건(skew boundary conditions)을 변환하는 과정이 이용된다<sup>(6)</sup>.

본 논문에서는 제안된 방법과 이를 기초하여 작성된 유한요소해석 프로그램을 사용하여 블레이드 그룹의 진동 특성을 해석하고 실험결과와 비교하였다

### 2. 블레이드 그룹의 유한요소모델<sup>(4-6)</sup>

일반적으로 동적 계의 운동 방정식은 고유치 해석을 위해 다음처럼 행렬식으로 표현 가능하다.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (1)$$

**M**, **C**, **K**는 각각 계의 질량, 감쇠, 강성 행렬이며, **u**,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$ 는 변위, 속도, 가속도 벡터이다.

일반적으로 증기 터빈 블레이드 계의 감쇠는 매우 작아 고유진동수에 대한 영향을 거의 무시할 수 있으므로, 식(1)을 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

\* 두산중공업(주) 기술연구원

\*\* 정회원, 두산중공업(주) 기술연구원

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

### 2.1 8 절점 비호환 브릭 요소

8 절점 비호환 브릭 요소는 8 절점 등방성 요소에 9 자유도가 내부적으로 추가된 요소이다. 추가된 9 자유도에 의해 8 절점 비호환 브릭 요소는 8 절점 등방성 요소의 굽힘에 관한 강성의 과대 평가라는 약점을 보완한다. Fig.1에 8 절점 비호환 브릭 요소를 나타내었다.

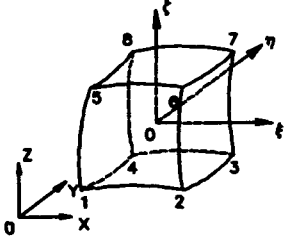


Fig.1 8-node incompatible brick element

#### (가) 요소 변위

요소 임의점  $(\xi, \eta, \zeta)$ 에서의  $x, y, z$  축 방향 변위  $u, v, w$ 는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i + (1-\xi^2)u_{g9} + (1-\eta^2)u_{g10} + (1-\zeta^2)u_{g11} \\ v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i + (1-\xi^2)v_{g9} + (1-\eta^2)v_{g10} + (1-\zeta^2)v_{g11} \\ w &= \sum_{i=1}^8 N_i w_i + (1-\xi^2)w_{g9} + (1-\eta^2)w_{g10} + (1-\zeta^2)w_{g11} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

여기서,  $i=1,2,\dots,8$ : 절점 번호

$u_i, v_i, w_i$ : 절점  $i$ 의  $x, y, z$  축 방향 변위

$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)$ : 절점  $i$ 의

형상 함수(shape function)

$\xi, \eta, \zeta = -1 \sim 1$ : 요소 임의점 좌표

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1$ : 절점  $i$  좌표

$u_{gj}, v_{gj}, w_{gj}, j=9,10,11$ : 추가 내부 자유도

#### (나) 요소 변형률

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e = \left[ \mathbf{B}_d, \mathbf{B}_g \right] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_d \\ \boldsymbol{\delta}_g \end{Bmatrix}^e \quad (4)$$

여기서,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ : 변형률 벡터

$\mathbf{B}_d$ : 요소 절점의 기하학적 행렬

$\boldsymbol{\delta}_d$ : 요소 절점의 변위 벡터

$\mathbf{B}_g$ : 요소 추가 자유도의 기하학적 행렬

$\boldsymbol{\delta}_g$ : 요소 추가 자유도의 변위 벡터

#### (다) 요소 강성 행렬

공간상에서 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e \quad (5)$$

여기서,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 응력 벡터

$\mathbf{D}$ : 응력-변형률 행렬

그러면 요소의 강성 행렬  $\mathbf{K}_e$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (6)$$

식 (6)에서 강성 행렬은  $(33 \times 33)$  행렬이고, 요소의 추가 9 자유도를 별도로 분류하여 식 (7)처럼 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_e = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d^T \mathbf{D} \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d^T \mathbf{D} \mathbf{B}_g \\ \mathbf{B}_g^T \mathbf{D} \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_g^T \mathbf{D} \mathbf{B}_g \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d24 \times 24} & \mathbf{K}_{dg24 \times 9} \\ \mathbf{K}_{gd9 \times 24} & \mathbf{K}_{g9 \times 9} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,  $\mathbf{K}_d$ : 요소 절점 강성 행렬

$\mathbf{K}_g$ : 요소 추가 자유도의 강성 행렬

그리고 평형 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_d & \mathbf{K}_{dg} \\ \mathbf{K}_{gd} & \mathbf{K}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_d \\ \boldsymbol{\delta}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_d \\ \mathbf{P}_g \end{Bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)의 우변 항의  $\mathbf{P}_d$ 는 블레이드에 작용하는 외력과 관성력 및 감쇠력으로 구성되는 벡터이다.  $\mathbf{P}_g$ 는 내부 자유도에 대한 항목으로 영 벡터이다. 식 (8)로부터

$$\boldsymbol{\delta}_g = -\mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{K}_{gd} \boldsymbol{\delta}_d \quad (9)$$

이다. 식 (9)를 이용하여 식 (8)에서 내부 자유도를 축약 시킴으로써 절점 요소 변위 벡터 만에 대한 평형 방정식 (10)을 얻을 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{K}}_{24 \times 24} \boldsymbol{\delta}_{d24 \times 1} = \mathbf{P}_{d24 \times 1} \quad (10)$$

$\tilde{\mathbf{K}}_{24 \times 24}$ 는 요소 절점의 변위 벡터 항으로 축약된 강성 행렬로서 식 (11)과 같다.

$$\tilde{\mathbf{K}}_{24 \times 24} = \mathbf{K}_d - \mathbf{K}_{dg} \mathbf{K}_g^{-1} \mathbf{K}_{gd} \quad (11)$$

### 2.2 변위 경계 조건의 적용

블레이드 그룹의 유한요소모델은 직각 좌표계를 기준으로 하기 때문에, 로터 회전 축에 대칭 구조인 블레이드에 경계 조건을 적용하기 위해 기준 좌표계와 평행하지 않은 국부 좌표계 상의 경계 조건(skew boundary conditions)의 변환 과정이 필요하다. 경계 조건이 적용되는 요소 절점 자유도의 좌표 변환은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T}\bar{\mathbf{u}}_i \quad (12)$$

여기서  $\bar{\mathbf{u}}_i$ 는 경계 조건이 적용되는 블레이드 유한요소 절점  $i$ 의 국부 좌표계에서의 변위 벡터이다. 변환 행렬  $\mathbf{T}$ 는 기준 좌표계 상의 변위 벡터  $\mathbf{u}_i$ 에서 관측된  $\bar{\mathbf{u}}_i$ 로의 방향 여현으로

정의되는 행렬이다(Fig.2 참조). 변환 행렬  $T$ 는 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} \cos(X, \bar{X}), \cos(X, \bar{Y}), \cos(X, \bar{Z}) \\ \cos(Y, \bar{X}), \cos(Y, \bar{Y}), \cos(Y, \bar{Z}) \\ \cos(Z, \bar{X}), \cos(Z, \bar{Y}), \cos(Z, \bar{Z}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

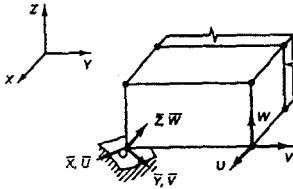


Fig. 2 Transformation to skew boundary conditions

요소 한 개에 대한 운동 방정식은

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{18} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & M_{i2} & M_{i3} & \cdots & M_{i8} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{81} & M_{82} & M_{83} & \cdots & M_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{18} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & K_{i3} & \cdots & K_{i8} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix} = 0 \quad (14)$$

이고, 임의의 절점  $i$ 에 국부 좌표계에서의 변위 구속을 갖는다고 가정하여 식 (12)를 식 (14)에 대입하면,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{18} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & M_{i2} & M_{i3} & \cdots & M_{i8} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{81} & M_{82} & M_{83} & \cdots & M_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ T \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{18} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & K_{i3} & \cdots & K_{i8} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ T \bar{u}_i \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

이 된다. 식 (15)로부터 다음의 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{i1}T & \cdots & M_{18} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^T M_{i1} & T^T M_{i2} & \cdots & T^T M_{ii} & T & \cdots & T^T M_{i8} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{81} & M_{82} & \cdots & M_{8i}T & \cdots & M_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{i1}T & \cdots & K_{18} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^T K_{i1} & T^T K_{i2} & \cdots & T^T K_{ii} & T & \cdots & T^T K_{i8} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{8i}T & \cdots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_i \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

이상과 같은 변환을 각각의 요소에 적용한 후 요소 행렬들을 조합하여 계의 전체 행렬을 얻는다. 서브스페이스 반복법을 적용하여 고유치 문제를 풀어 고유진동수와 고유모드를 얻고, 식(12)를 이용하여 기준 좌표계에서의 모드를 얻는다.

### 3. 블레이드 그룹의 진동 해석

증기 터빈의 블레이드 그룹에 대해 진동 해석을 수행하였다. 터빈의 운전 속도는 3600rpm 이며, 블레이드 익 길이가 95mm, 7개의 블레이드가 슈라우드에 의해 한 그룹으로 되어 있다. 블레이드의 도브테일은 포크 형으로 2개의 포크를 가진다.

Fig. 3은 블레이드 그룹의 유한요소모델을 보여준다. Fig. 4 ~ Fig. 7은 1차에서 4차까지의 고유모드를 보여준다. 1차 진동 모드는 기본 접선 모드이며, 2차, 3차 및 4차 모드는 각각 1차, 2차 및 3차 그룹 축 방향 모드이다.

Table 1에 정지 상태와 운전 속도에서 계산된 고유진동수와 정지 상태에서의 실험에 의한 결과를 나타내었다. 정지 상태의 경우 계산 결과는 실험 결과와 잘 일치하고 있다.

정지 상태 및 운전 속도에서의 계산된 고유진동수를 비교하면 운전 속도는 본 예의 블레이드 그룹의 고유진동수에 큰 영향이 없다.

Fig. 8은 운전 속도가 3000rpm이고 길이 851mm인 블레이드의 경우를 보여준다. Fig. 9에 유한요소 모델을, Fig. 10, 11, 12는 해석한 1차에서 3차까지의 고유모드를 보여준다. 1차 모드는 기본 접선 모드이며 2차 모드는 기본 축 방향 모드이고 3차 모드는 1차 그룹 축 방향 모드이다. 계산 결과 및 실험 결과를 Table 2에 비교 정리하였다. 계산

결과는 실험 값과 매우 잘 일치하고 있다. 본 예에서는 운전 속도가 고유진동수에 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다<sup>7)</sup>. 이러한 결과로 보아 개발된 블레이드 유한요소 진동 해석 프로그램의 타당성과 신뢰성이 있음을 알 수 있다.

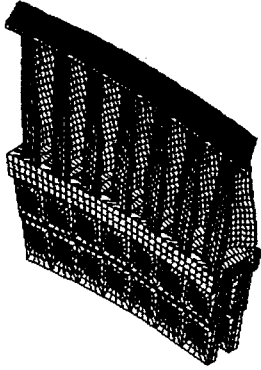


Fig. 3 The finite element model of 7-blade group

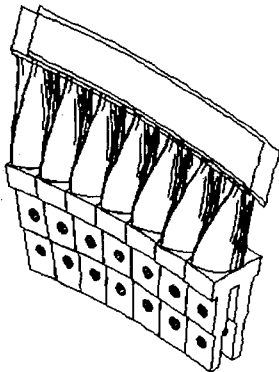


Fig. 4 The fundamental tangential mode shape of 7-blade group

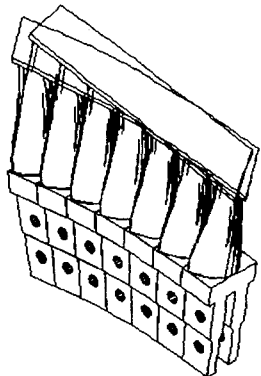


Fig. 5 The 1st group axial mode shape of 7-blade group

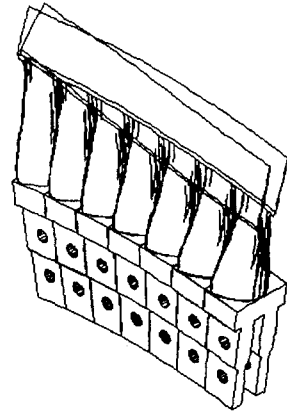


Fig. 6 The 2nd group axial mode shape of 7-blade group

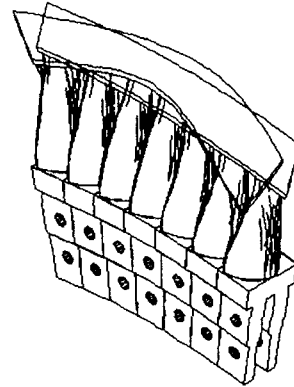


Fig. 7 The 3rd group axial mode shape of 7-blade group

Table 1 The calculated and experimental results of natural frequencies for 7-blade group

Mode		1st	2nd	3rd	4th
0 rpm	Measured Freq.(Hz)	1752	2312	-	3252
	Calculated Freq.(Hz)	1755	2443	2663	3382
	Error(%)	0.1	5.6	-	3.9
3600 rpm	Calculated Freq.(Hz)	1769	2454	2701	3403



Fig. 8 851mm blade



Fig. 11 The fundamental group axial mode shape of 5-blade group

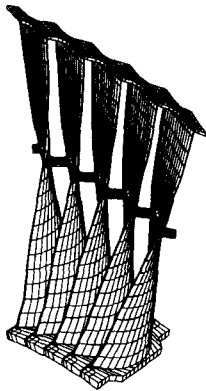


Fig. 9 The finite element model of 5-blade group

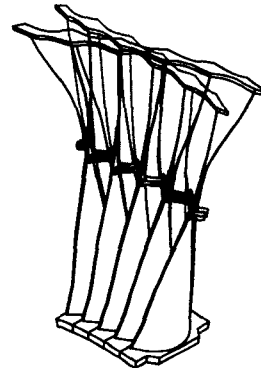


Fig. 12 The 1st group axial mode shape of 5-blade group

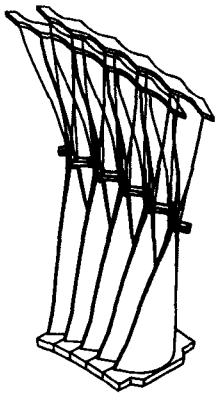


Fig. 10 The fundamental tangential mode shape of 5-blade group

Table 2 The calculated and experimental results of natural frequencies for 5-blade group

Mode		1st	2nd	3rd	4th
0 rpm	Measured Freq.(Hz)	85	125	190	262
	Calculated Freq.(Hz)	82.2	126.0	181.9	272.1
	Error(%)	-3.3	-1.6	-4.3	3.9
3000 rpm	Measured Freq.(Hz)	124	162	241	282
	Calculated Freq.(Hz)	124.2	167.9	212.9	297.1
	Error(%)	0.2	3.6	-0.5	5.4

#### 4. 결론

본 연구에서는 증기 터빈 블레이드 그룹의 진동 해석을 위한 3차원 유한요소모델을 제시하였으며, 이에 기초한 계산 프로그램이 개발 되었다. 개발된

프로그램을 사용하여 블레이드 그룹의 진동 해석을 수행하였다. 블레이드의 3차원 유한요소 모델은 복잡한 진동 모드의 묘사가 가능하고 모드를 보다 더 명확하게 이해하도록 도와준다. 계산 결과와 실험 결과의 비교로부터 제시한 유한요소모델의 신뢰성과 타당성을 확인 하였다.

### 참고문헌

1. J.S. Rao, 1991, "Turbomachine Blade Vibration", John Wiley & Sons.
2. 박중포, 1998, "스팀터빈 블레이드의 개요 및 설계," KSME 기계저널, Vol.38 No.8, pp44-49.
3. 박중포, 신언탁, 김호중, 1998, "증기 터빈 버켓의 회전 진동 시험," 한국소음진동공학회, Vol.8 No.2, pp.331-335.
4. Zili Xu, 1997, "Modern Mechanics Analysis and Fatigue Reliability Study of Steam Turbine Blades", Thesis for a Post-doctorate, Xian Jiaotong University, P.R. China.
5. Yang Hui Xie, 1997, "The Study for Fatigue Failure, Life Estimation and Design Analysis System of Steam Turbine Blade", Thesis for a Doctorate, Xian Jiaotong University, P.R. China, pp.66-67.
6. K.J. Bathe, 1996, "Finite Element procedures", Prentice Hall, pp.187-191.
7. Hao Xie, 1998, "Static and Dynamic Analysis of Long Grouped Blades of Steam Turbines by Three Dimensional Finite Element Method", Thesis for a Master, Xian Jiaotong University, P.R. China, pp.50-55.