

# 차량 파워트레인의 강체고유진동수 민감도

오원광민\*, 강구태\*

## Eigenvalue Sensitivity of Rigid Body Mode for Vehicle Powertrain System

K. M. Won and K. T. Kang

### ABSTRACT

In this paper, the eigenvalue sensitivity of vehicle powertrain was investigated by analytic method. The powertrain system was considered as a rigid body with multiple engine mounts, and the engine mounts were supposed as three linear springs in three orthogonal directions. The design parameters for the sensitivity analysis were engine mount properties (positions, stiffness, and orientations) and powertrain properties (mass, second moment of inertia, and center of gravity). Firstly, an effective form of eigenvalue problem for the powertrain system was introduced. Then, the analytic sensitivity of eigenvalue was derived using the equation. Lastly, the derived sensitivity equation was applied to a real powertrain system to provide its correctness and applicability.

### 1. 서론

차량 엔진마운트의 주요 기능 중 하나는 운전 시 파워트레인에 의한 차체로의 진동을 절연하는 것으로 여러 운전 조건 중 특히 공회전 및 거친노면 주행시의 차량 진동 성능에 관심을 주어 엔진마운트를 설계한다. 공회전시 진동은 파워트레인의 강체 진동모드 및 차체의 골격 진동모드와 관련이 크며, 거친노면 주행시의 진동은 파워트레인의 강체 진동모드 및 앞 바퀴의 상향 방향 진동모드와 관련이 크다. 따라서 엔진마운트 설계시 중요한 것은 엔진마운트의 특성과 관

련된 파워트레인의 진동 현상을 정확히 이해하고 [1], 공회전 및 거친노면 주행시의 진동이 최소화 되도록 파워트레인 강체진동 모드를 설정하는 것이다.

효과적인 엔진마운트 설계를 위해 기본적으로 이해하고 분석해야 할 것은 엔진마운트 설계변수 변화에 의한 파워트레인의 강체고유진동수 변화 정도, 즉 민감도이다. 민감도를 구하기 위한 방법은 크게 유한차분법과 이론적으로 식을 유도하여 분석하는 해석법으로 나눌 수 있다. 유한차분법은 쉽게 사용할 수 있는 장점은 있으나, 물리적 특성의 고찰이 어려우며, 유한차분을 위한 미소변경량 설정이 쉽

\* 정회원, 현대자동차 파워트레인연구소

지 않고, 또한 문제가 복잡한 경우 수치해석 시간이 긴 단점이 있다. 해석적인 방법은 유한차분법의 단점을 모두 극복할 수 있어 이론적인 민감도식을 구할 수 있는 경우 매우 효과적이다. 그러나 엔진마운트 특성 및 파워트레인 강체 특성 변화에 따른 파워트레인의 강체고유진동수에 대한 이론적인 민감도 식은 찾아 보기 힘들다.

본 연구의 목적은 엔진마운트 특성 (강성, 위치, 장착각도) 및 파워트레인 강체 특성 (질량, 질량중심, 질량관성모멘트) 변화에 의한 파워트레인의 강체고유진동수 민감도를 해석적으로 유도하고, 물리적인 특성을 관찰하는데 있다. 먼저 파워트레인 강체 운동을 묘사하기 위한 가장 단순한 모델에 대한 고유치 문제를 도입하고 민감도식을 유도하였다. 또한 유도된 식을 실제 파워트레인에 대해 적용하여 유도된 식의 정확성 및 민감도 특성에 대하여 관찰하였다.

## 2. 파워트레인계의 고유치 문제

파워트레인계의 가장 단순한 모델은 수개의 엔진마운트에 의해 지지되는 파워트레인을 6 자유도 강체로 가정하고, 엔진마운트는 서로 직교하는 세방향의 선형 강성으로 이루어진 스프링 요소로 가정하는 것이다 (Fig.1).

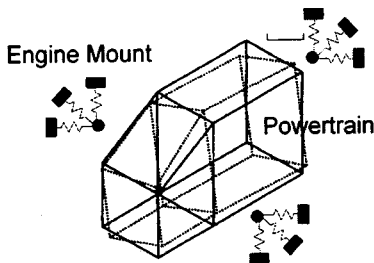


Fig.1 Powertrain system.

이 계의 운동방정식은 파워트레인의 강체 특성

(질량, 질량중심, 질량관성모멘트)과 엔진마운트의 특성(세 방향 강성, 위치, 장착각도)을 이용하여 기술할 수 있다. 본 연구에서는 편의상 이와 같은 가장 단순한 형태의 모델에 대해 민감도 식을 유도할 것이며, 유도된 식은 좀더 복잡한 모델에 대해서도 동일하게 적용할 수 있는 형태이다.

Fig.1 과 같은 파워트레인계의 고유치 문제는 여러 문헌에서 찾아 볼 수 있는데 [2], 본 연구에서는 이러한 식을 민감도 식을 유도하기 위한 정형화된 형태로 표현하고자 한다.

우선 가장 일반적인 계에 대한 고유치 문제는 변분식으로 표현되며 정규화 조건을 포함하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a_{\Omega}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \lambda d_{\Omega}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in Z_{adm} \\ d_{\Omega}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_{\Omega}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \int_{\Omega} \mathbf{c}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) d\Omega \\ d_{\Omega}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1),(2)의 정확한 의미는 참고문헌[3]에 잘 설명되어져 있다.

파워트레인과 같은 강체로 이루어진 계에 대한 고유치 문제는 변분식 (1), (2) 및 강체운동 이론을 이용하여 다음과 같은 형렬식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ & J_{22} & -J_{23} \\ \text{Sym.} & & J_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{I}_{3 \times 3} : -\tilde{\mathbf{q}}_i]^T \mathbf{K}_i [\mathbf{I}_{3 \times 3} : -\tilde{\mathbf{q}}_i]$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{K}_i^R \mathbf{A}_i$$

$$\mathbf{K}_i^R = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

이 식에서  $\lambda$ 는 고유진동수를,  $\boldsymbol{\phi}$ 는 고유진동벡터를 의미한다. 고유진동벡터  $\boldsymbol{\phi}$ 는 파워트레인 질량 중심의 세 방향 병진운동성분벡터( $\mathbf{x}$ )와 회전운동성분벡터( $\boldsymbol{\omega}$ )로 이루어진다.  $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ 는 각각 질량 및 강성행렬이다. 질량행렬에서  $m$ 과  $\mathbf{J}$ 는 파워트레인의 질량 및 관성행렬을 의미하며,  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 는  $3 \times 3$  단위행렬이다. 강성행렬에서  $\mathbf{q}_i$ 는 질량중심에서  $i$  마운트로의 방향 벡터이고,  $\mathbf{K}_i^R$ 은  $i$  엔진마운트의 세 방향 강성을 나타내는 국부강성행렬이며,  $\mathbf{A}_i$ 는  $i$  엔진마운트 국부 좌표에서 전체 좌표로의 변환행렬이다. 또한  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

식 (3), (4)와 같이 고유치 문제는 상당히 정형화되어 표현되어 민감도 식을 유도하기 위하여 매우 적합한 형태이다.

### 3. 고유진동수 민감도

변분식 (1)과 (2)에 의한 고유진동수 민감도 식은 식(6)과 같다.

$$\lambda' = \mathbf{a}'_{\Omega}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) - \lambda \mathbf{d}'_{\Omega}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \quad (6)$$

여기서  $\lambda'$ 은 고유치의 민감도를 의미한다. 이에

대응되는 식 (3)과 (4)에 의한 민감도 식은 다음과 같다.

$$\lambda_{,p} = \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{K}_{,p} - \lambda \mathbf{M}_{,p}) \boldsymbol{\phi} \quad (7)$$

여기서 아래첨자  $,p$ 는 설계변수  $p$ 에 의한 민감도를 의미한다.

#### 3.1 엔진마운트 특성에 의한 민감도

엔진마운트에 관련된 설계변수는 엔진마운트의 세 방향 강성, 위치 및 장착 각도이다. 참고적으로 일반적인 보 구조물의 지지 위치 및 결합 각도에 의한 민감도 식은 식 (1), (2)와 같은 변분식에 라그랑지 상수를 도입하여 유도되었으며, 그 결과 지지 위치 민감도는 지지 위치에서의 모드힘과 회전변위에 비례하고, 결합 각도 민감도는 결합위치에서의 모드힘과 직선변위에 비례함이 보여졌다 [4]. 이러한 사실을 염두에 두고 식 (3), (4) 및 (7)을 이용하여 민감도 식을 유도할 수 있다.

먼저 엔진마운트 강성에 의한 민감도를 구하기 위하여 엔진마운트  $i$ 의 강성벡터를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T \quad (8)$$

식 (8)의 강성벡터가  $\mathbf{n}$  방향으로 변경시 민감도는 식 (4)와 (7)을 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$\lambda_{,k} = (\mathbf{q}_i^R)^2 \cdot \mathbf{n} \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{q}_i^R$ 은 엔진마운트  $i$ 의 국부좌표계에서의 엔진마운트  $i$ 의 변위벡터이다. 식과 같이 강성에 의한 민감도는 엔진마운트의 세 방향 강성방향으로의 변위크기의 제곱에 비례하여 표현됨을 알 수 있는데 항상 양의 값을 갖는다.

엔진마운트  $i$ 가  $\mathbf{n}$  방향으로 이동할 때의 위치 민

감도 식 역시 식 (4)와 (7)을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\lambda_p = -2\tilde{\omega}K_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{q}}_i, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -2\tilde{\omega}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

위치 민감도는 엔진마운트 위치에서의 모드힘과 질량중심에서의 회전운동벡터와 비례하여 표현된다.

엔진마운트  $i$  가  $n$  방향을 중심으로 회전이동할 때의 민감도 식을 동일한 방법으로 유도하면 다음과 같다.

$$\lambda_{i,0} = -2\tilde{\mathbf{x}}K_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{q}}_i, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -2\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

즉, 엔진마운트 방향 민감도는 엔진마운트에서의 모드힘과 질량중심에서의 병진운동벡터와 비례하여 표현된다.

### 3.2 파워트레인 강체 특성에 의한 민감도

파워트레인의 강체 특성(질량, 질량관성모멘트 및 질량중심)에 대한 민감도는 일반적으로 엔진마운트 설계시 설계 변수가 될 수 없어 크게 의미가 없을 수 있으나, 일반적인 민감도 특성을 살펴보기 위해 제안된 방법에 의한 민감도 식을 유도하였다.

먼저 질량과 질량관성모멘트에 의한 민감도는 식 (4)와 (7)을 이용하여 유도할 수 있다. 먼저 질량에 의한 민감도는 다음과 같다.

$$\lambda_{,m} = -\lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x} \quad (12)$$

또한 질량관성모멘트에 의한 민감도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_{,iii} &= -\lambda\theta_i^2 \\ \lambda_{,ijj} &= \lambda\theta_i\theta_j \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12), (13)에서와 같이 질량은 질량중심의 병

진운동벡터만이, 질량관성모멘트는 회전운동벡터만이 관계된다.

질량중심에 의한 민감도 역시 동일한 방법을 이용하여 유도 가능하다. 만약 질량중심이  $n$  방향으로 이동한다고 가정할 때 민감도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_{,cog} &= \sum_{i=1}^n 2\tilde{\omega}\mathbf{A}_i^T K_i \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ -\tilde{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} \\ &= 2\tilde{\omega} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (14)$$

이 민감도는 회전운동벡터와 각 마운트에서의 모드힘과 비례하며, 위치 민감도를 나타낸 식 (10)과 매우 유사하다. 자세히 살펴보면 질량중심에 의한 민감도는 각 마운트의 위치가 질량중심과 반대 방향으로 움직일 때의 민감도의 합과 동일함을 알 수 있다.

이상과 같이 엔진마운트 특성 및 파워트레인 강체 특성에 관련하여 유도된 고유진동수 민감도 식은 단순하면서도 명확하여 그 물리적 특성의 이해 및 실제 적용에 매우 유용한 형태이다.

## 4. 적용

제 3 장에서 유도된 민감도 식을 실제 파워트레인 계에 적용하여 정확성을 검증하고 민감도의 특성에 대해 수치적으로 고찰해 보고자 한다. 대상으로 하는 파워트레인은 전륜구동 승용차용이며, Fig.2 와 같이 차량 좌우에서 TRA(Torque Roll Axis) 상단에 2 개의 주마운트 (1,2 번 마운트)가 설치되어 있고, 회전운동의 제어를 목적으로 차량 전후 하단에 2 개의 롤마운트 (3,4 번 마운트)가 설치되어 있는 것이다.

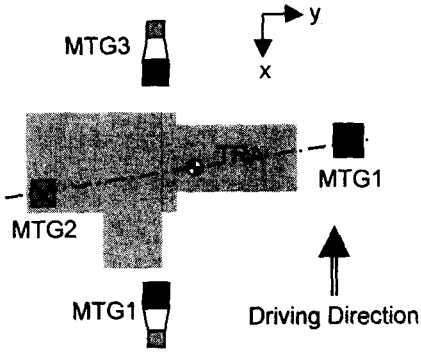


Fig.2 Top View of Powertrain System.

이 파워트레인계의 6 개 강체고유진동주파수 및 각 모드의 각 방향변위에 의한 운동에너지 성분은 Fig.3 과 같다.

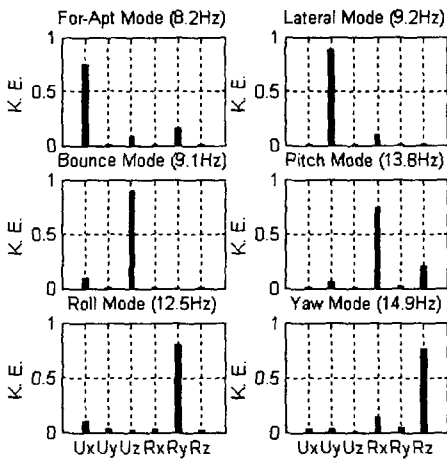


Fig.3 Natural frequencies and kinetic energy component of powertrain modes (U: translation, R: rotation).

모드들을 각각의 운동 변위의 크기에 따라 전후 (Fore-Apt), 좌우(Lateral), 상하(Bounce), 롤 (Roll), 피치(Pitch), 요(Yaw) 모드로 표현하였다. 예로 롤모드는 파워트레인이 롤방향 (Y 축 중심 회전방향) 의 운동이 큰 모드이다. Fig.3 에서와 같이 본 연구에서 대상으로 하는 파워트레인계

의 모드들은 한 개의 주요 운동성분 만을 갖도록 설계되어져 있어 각 모드간의 간섭이 최소화 되어 있다.

#### 4.1 엔진마운트 민감도 결과 검증

유도된 민감도식을 증명하기 위하여 고려된 파워트레인계의 강체고유진동수 민감도를 유도된 식과 유한차분법을 이용하여 각각 구한 후 상대오차를 구하였다. 설계변수는 엔진마운트의 강성, 위치, 각도이며 각각 1kgf/mm, 10mm, 10° 를 기준으로 하여 무차원화하였다. 또한 각 설계변수의 이동 방향은  $n=[1,1,1]$ 이다. 결과는 Table 1 에 정리하였으며 제안된 민감도식은 정확함을 알 수 있다.

Table 1. Eigenvalue sensitivity error between analytic and finite difference method.

Mode	Design Variable		
	Stiffness	Position	Orientation
1	$0.01 \times 10^{-3}$	$-0.01 \times 10^{-3}$	0
2	$0.01 \times 10^{-3}$	$-0.33 \times 10^{-3}$	$0.01 \times 10^{-3}$
3	$-0.01 \times 10^{-3}$	$-0.35 \times 10^{-3}$	0
4	$0.03 \times 10^{-3}$	$-0.03 \times 10^{-3}$	0
5	$-0.01 \times 10^{-3}$	$0.04 \times 10^{-3}$	0
6	0	0	0

#### 4.2 엔진마운트 특성 민감도

Fig.4 는 각 엔진마운트의 3 방향 강성에 대한 강체고유진동주파수 ( $= 2\pi\sqrt{\lambda}$ ) 민감도를 제안된 식에 의하여 구하고 정리한 것이다. 가장 중요한 롤모드는 4 번 마운트의 z 방향 강성에 가장 큰 영향을 받고, 요(Yaw)모드는 1 번 마운트의 x 방향 강성에 가장 큰 영향을 받음을 알 수 있다.

엔진마운트 위치에 대한 강체고유진동주파수 민감도는 Fig.5 와 같다. 일반적으로 위치에 대한 민감도는 회전운동 모드에서 크며 병진운동 모드에서는 작음을 알 수 있다. 특히 롤 모드는 3,4 번 마운트의 x 방향 그리고 1,2 번 마운트의 z 방향 영향이 큼을 알 수 있다. 이는 롤 축으로부터 엔진마운트가 멀어지는 방향으로 직관과도 잘 일치하는 결과

이다.

회전각도에 대한 민감도는 Fig.6 과 같다. 2 번 마운트의 각도에 크게 민감하며 3,4 번 마운트의 각도에는 둔감함을 알 수 있다.

#### 4.3 파워트레인 강체 특성 민감도

파워트레인 강체 특성에 의한 강체고유진동수 파수 민감도 결과는 Fig.7 과 같다. 예측 가능한 결과이지만 질량은 병진운동모드에, 관성모멘트는 회전운동모드에 주로 영향을 준다. 질량 중심은 모든 모드에 영향을 주나 상하방향모드에는 이 경우 영향이 작다.

### 5. 결론

본 연구에서는 엔진마운트 특성 및 파워트레인 강체 특성 변화에 의한 파워트레인계의 강체고유진동수 민감도 식을 유도하였고, 실제 파워트레인계에 적용함으로써 유도된 민감도 식을 입증하였으며 그 결과를 고찰하였다. 본 연구를 통한 결과를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 엔진마운트 특성 (강성, 위치, 각도) 및 파워트레인 강체특성 (질량, 질량중심, 질량관성모멘트) 변화에 의한 강체고유진동수 민감도 식을 유도하였다.
- (2) 엔진마운트 특성에 의한 민감도식은 파워트레인의 강체고유벡터와 엔진마운트 위치에서의 모드힘으로 표현되며 물리적으로 이해할 수 있는 명확한 형태이다.
- (3) 파워트레인 강체특성에 의한 민감도는 고유진동벡터만으로 표현된다.
- (4) 실제 파워트레인에 적용한 결과 제안된 식은 유한차분법과 동일한 결과를 주어 정확함을 알 수 있다.
- (5) 민감도식을 이용한 실제 파워트레인계의 결과는 직관에 의해서 얻을 수 있는 결과와 유사

한 결과를 주나 정량적인 결과도 얻을 수 있다.

(6) 제안된 민감도 식은 단순하면서도 명확하여 물리적 특성의 파악 및 실 문제의 적용에 매우 유용하다.

### References

- (1) 원광민, 방정환, 윤희욱, 강구태, 2000, " 파워트레인 마운트계 설계를 위한 진동이론, " 소음진동공학회 춘계학술대회
- (2) 박노길, 1996, "차량 엔진동력계의 마운트 설계에 관한 연구, " 한국자동차공학회논문집 제 4 권 제 1 호, pp. 36~54
- (3) E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov, 1986, " Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, " Academic Press
- (4) K. M. Won and Y.-s. Park, 1997, " Eigenvalue Sensitivity for a Combined Beam Structure with Varying Constraints, " Sound and Vibration, Vol. 4, No. 5,6, pp 341-350

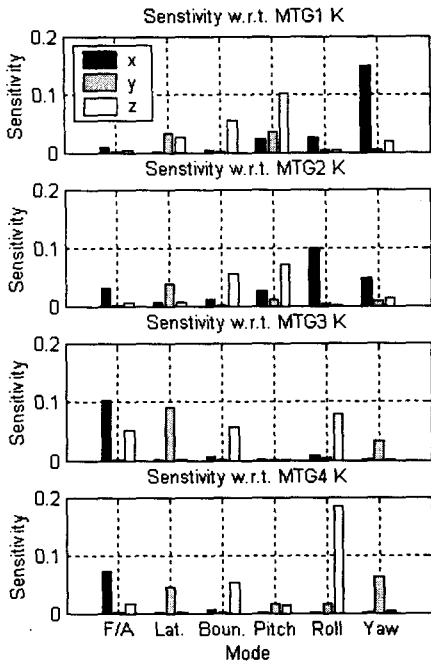


Fig. 4 Stiffness sensitivity.

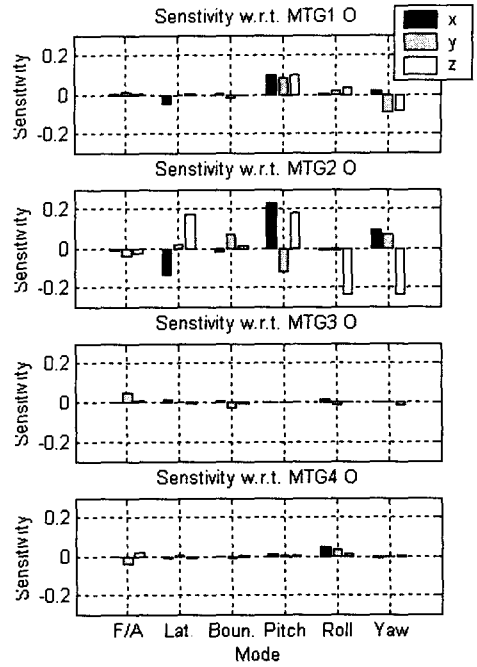


Fig.6 Orientation sensitivity.

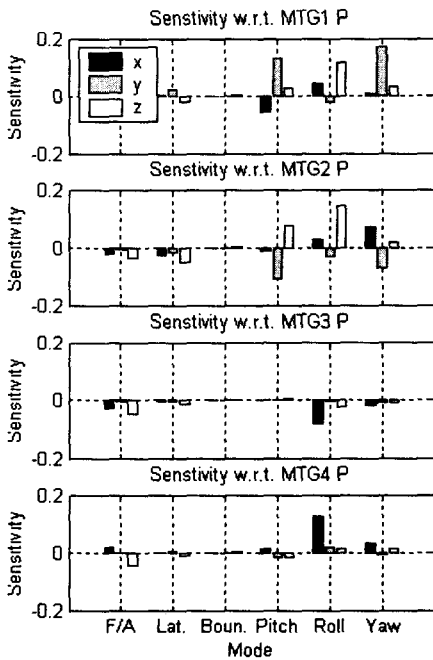


Fig.5 Position sensitivity.

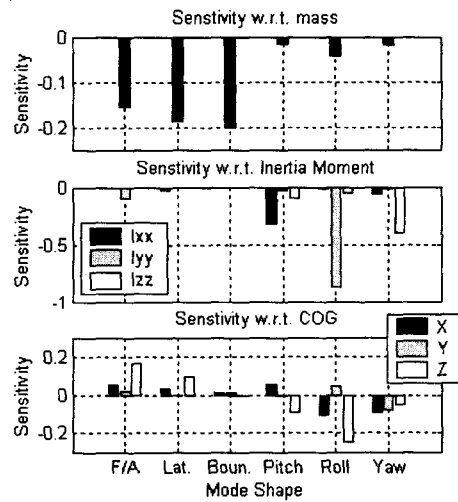


Fig.7 Mass, inertias, and cog (center of gravity) sensitivity.