

## 회전하는 복합재 외팔평판의 진동해석

0김성균\* · 유홍희\*\*

### Vibration Analysis of Rotating Composite Cantilever Plates

Sung Kyun Kim and Hong Hee Yoo

#### ABSTRACT

A modeling method for the vibration analysis of rotating composite cantilever plates is presented. Explicit mass and stiffness matrices are derived by considering the coupling effects between extensional motions and the bending motion. To confirm the accuracy of the method presented in this study, numerical results are obtained and compared to those of a commercial program. Numerical results show that the coupling effect among the three motions becomes important for the accurate estimation of natural frequencies as laminates are stacked up unsymmetrically. Also, natural frequencies loci veering, loci crossing, and mode shape variations are observed.

#### 1. 서론

복합재 평판은 항공기, 우주선 및 잠수함과 같이 다양한 분야의 구조요소로 사용되어 왔다. 높은 강도와 경량성 이외에 복합재 평판의 또 다른 특징은 섬유의 각도와 적층의 수를 변화시키거나 적절한 복합재료의 선택을 통하여 구조물의 특성을 변화시킬 수 있다는 것이다.

복합재 구조물의 진동에 관한 연구는 높은 강도와 경량화의 중요성이 대두되면서 80년대에 들어 연구가 활발히 진행되고 있다. 참고문헌[1~5]는 이 분야의 많은 문헌중 대표적인 일부만 나타낸 것이다. 그러나, 인공위성의 태양열 전지판과 같은 구조물은 보보다는 평판으로 모델링을 해야 정확한 해석을 할 수 있으며, 이와 같은 회전하는 평판에 관한 연구는 참고문헌[6,7]과 같이 비교적 최근에 들어 진행되어 왔다. 이들은 주로 유한요소법을 사용하고 있으며 정상상태에서 원심력과 평형을

이루는 응력을 사용해 정방형 탄성에너지를 구하고, 이에 근거하여 강성행렬을 구함으로써 회전에 따른 진동특성 변화를 예측하고 있다. 그러나 이러한 방법은 정상상태의 응력을 먼저 구한 후 이를 다시 대입해야 하는 2단계 과정으로 되어 있어 그 실제적 적용방법이 상당히 복잡하다. 참고문헌[8,9]에서는 이러한 방법과는 달리 복합변형변수를 이용하여 강제운동을 하는 외팔평판의 선형 운동방정식을 유도하였다. 이 모델링 방법은 앞 문헌들에 의한 방법들과 동일하게 효과적이나 유도과정 및 수치해석을 위한 간명성에서 훨씬 효과적임을 보여 준다. 본 논문에서는 이 방법에 근거한 운동방정식을 유도하고 진동해석을 실시하였다.

본 연구의 목적은 복합재 평판의 회전에 따른 고유진동수와 모드형상의 변화를 조사하는데 있다. 특별히 평판의 회전수 변화에 따른 고유진동수 변화의 궤적과 그에 수반하는 모드형상의 독특한 변화에 관찰의 초점을 맞추고 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 참고문헌[8]에 근거한 진동방정식을 소개하고, 3장에서는 2장에서 유도된 진동방정식에 근거

\* 한양대학교 대학원

\*\* 한양대학교 기계공학부

하여 수치해석을 실시하고 결과를 설명하였다. 마지막으로 4장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

## 2. 진동방정식

### 2.1 복합재 외팔평판의 탄성에너지

Fig. 1은 가로길이  $a$ , 세로길이  $b$ 를 갖는 외팔 평판이 각속도  $\Omega$ 로 회전하는 반경  $r$ 의 축에 부착되어 있는 형태를 보여주고 있다. Fig. 2는 적층 평판의 기하학적인 형태와 적층순서를 나타내고 있으며, Fig. 3는 이 평판을 구성하는 복합재 적층판 중  $k$ 번째 판의 섬유배열 방향을 보여준다.

가정모드법을 사용하면 평판의  $x$ 방향 인장,  $y$ 방향 인장, 굽힘방향 변위는 각각 다음과 같이 모드 함수  $\phi_i$ 와 일반좌표  $q_i$ 로 나타낼 수 있다(참고문헌 [8] 참조).

$$s(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{1i}(x, y) q_i(t) \quad (1)$$

$$r(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{2i}(x, y) q_i(t) \quad (2)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{3i}(x, y) q_i(t) \quad (3)$$

여기서  $\mu$ 는 총 사용된 모드의 개수이다. 두께방향 전단변형을 무시하기로 가정하면, 복합재 평판의 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다(참고문헌 [10] 참조).

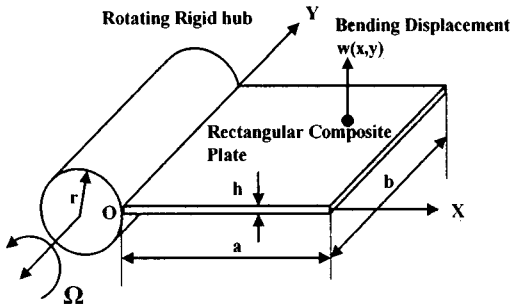


Fig. 1 Configuration of a rotating composite rectangular plate

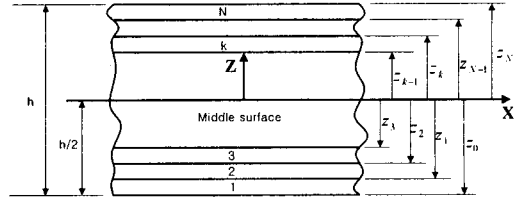


Fig. 2 Laminated plate geometry and ply numbering system

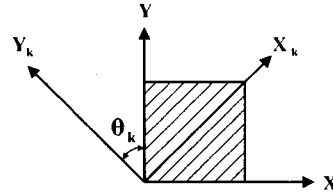


Fig. 3 Fiber direction of  $k$ -th-layer cross-ply laminated composite plate

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right. \\
 & + A_{22} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( A_{16} \frac{\partial s}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\
 & \left. \left( \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & - 2B_{11} \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B_{12} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2B_{22} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & - 2B_{16} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\
 & - 2B_{26} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\
 & - 4B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\
 & + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\
 & \left. + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big\} dx dy \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서 행렬  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 는 Fig.2와 같이, 요소를 구성하는 각층의 물성치를 적분하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\
B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (5) \\
D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z^3 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned}$$

여기서  $Q_{ij}^{(k)}$ 는  $k$ 번째 적층판의 off-axis 강성치를 나타내며(참고문헌[10]참조),  $z_k$ 와  $z_{k-1}$ 은  $k$ 번째 적층판의 위면과 아래면까지의 두께방향 거리이며,  $N$ 은 적층된 전체층의 개수를 나타낸다.

## 2.2 무차원 매개변수 및 무차원 진동방정식

식(4)를 이용하고 참고문헌[8]에 근거해 운동방정식을 구한 후 그 식을 무차원화 하기 위해 무차원 변수와 매개변수, 그리고 함수를 다음과 같이 정의하였다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{a}, \quad \eta \equiv \frac{y}{b}, \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial z_j}$$

$$\phi_i(x, y) = \varphi_i(\xi, \eta), \quad \omega \equiv \frac{\Omega}{\Omega_r}, \quad \sigma \equiv \frac{r}{a}$$

$$A_{ij}^1 \equiv \frac{T^2}{\rho_p a^2} A_{ij} \quad A_{ij}^2 \equiv \frac{T^2}{\rho_p ab} A_{ij}$$

$$A_{ij}^3 \equiv \frac{T^2}{\rho_p b^2} A_{ij} \quad B_{ij}^1 \equiv \frac{T^2}{\rho_p a^3} B_{ij}$$

$$B_{ij}^2 \equiv \frac{T^2}{\rho_p ab^2} B_{ij} \quad B_{ij}^3 \equiv \frac{T^2}{\rho_p a^2 b} B_{ij}$$

$$B_{ij}^4 \equiv \frac{T^2}{\rho_p b^3} B_{ij} \quad D_{ij}^1 \equiv \frac{T^2}{\rho_p a^4} D_{ij}$$

$$D_{ij}^2 \equiv \frac{T^2}{\rho_p a^2 b^2} D_{ij} \quad D_{ij}^3 \equiv \frac{T^2}{\rho_p b^4} D_{ij} \quad (6)$$

$$D_{ij}^4 \equiv \frac{T^2}{\rho_p a^3 b} D_{ij} \quad D_{ij}^5 \equiv \frac{T^2}{\rho_p ab^3} D_{ij}$$

여기서  $\rho_p$ 는 평판의 단위면적당 질량이고  $\Omega_r$ 과  $T$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega_r \equiv \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_p a^4}}, \quad T \equiv \frac{1}{\Omega_r} \quad (7)$$

이상에서 정의된 무차원 변수 및 매개변수들을

이용하고 참고문헌[8]에 제시된 운동방정식의 유도 과정을 따르면 다음과 같은 무차원 형태의 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 [M_{ij}^{11} \delta_{ij} + (-\omega^2 M_{ij}^{11} + K_{ij}^{S1}{}^{11,11} + K_{ij}^{S2}{}^{11,12} \\
& + K_{ij}^{S2}{}^{11,21} + K_{ij}^{S3}{}^{11,22}) \delta_{1j} + (K_{ij}^{S2}{}^{12,22} + K_{ij}^{S1}{}^{12,12} \\
& + K_{ij}^{S3}{}^{12,11} + K_{ij}^{S2}{}^{12,21}) \delta_{2j} + 2\omega M_{ij}^{13} \delta_{3j} \\
& + (-K_{ij}^{C1}{}^{1,111} - K_{ij}^{C2}{}^{1,122} - K_{ij}^{C3}{}^{1,211} - 2K_{ij}^{C3}{}^{1,112} \\
& - K_{ij}^{C4}{}^{1,222} - 2K_{ij}^{C2}{}^{1,212}) \delta_{3j} ] = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 [M_{ij}^{22} \delta_{2j} + (K_{ij}^{S3}{}^{22,22} + K_{ij}^{S2}{}^{22,21} \\
& + K_{ij}^{S2}{}^{22,12} + K_{ij}^{S1}{}^{22,11}) \delta_{2j} + (-K_{ij}^{C3}{}^{2,211} \\
& - K_{ij}^{C4}{}^{2,222} - K_{ij}^{C1}{}^{2,111} - K_{ij}^{C2}{}^{2,122} - 2K_{ij}^{C2}{}^{2,212} \\
& - 2K_{ij}^{C2}{}^{2,112}) \delta_{3j} + (K_{ij}^{S2}{}^{21,21} + K_{ij}^{S1}{}^{21,11} \\
& + K_{ij}^{S3}{}^{21,22} + K_{ij}^{S2}{}^{21,12}) \delta_{1j} ] = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 [M_{ij}^{33} \delta_{3j} + (-\omega^2 M_{ij}^{33} + K_{ij}^{B1}{}^{11,11} + K_{ij}^{B2}{}^{11,22} \\
& + K_{ij}^{B2}{}^{22,11} + K_{ij}^{B3}{}^{22,22} + 2K_{ij}^{B4}{}^{11,12} + 2K_{ij}^{B4}{}^{12,11} \\
& + 2K_{ij}^{B5}{}^{22,12} + 2K_{ij}^{B5}{}^{12,22} + 4K_{ij}^{B2}{}^{12,12} + \sigma \omega^2 K_{ij}^{GX1} \\
& + \omega^2 K_{ij}^{GX2}) \delta_{3j} + (-K_{ij}^{C1}{}^{1,111} - K_{ij}^{C2}{}^{1,122} \\
& - K_{ij}^{C3}{}^{1,211} - 2K_{ij}^{C3}{}^{1,121} - K_{ij}^{C4}{}^{1,222} - 2K_{ij}^{C2}{}^{1,221}) \delta_{1j} \\
& + (-K_{ij}^{C3}{}^{2,211} - K_{ij}^{C4}{}^{2,222} - K_{ij}^{C1}{}^{2,111} - K_{ij}^{C2}{}^{2,122} \\
& - 2K_{ij}^{C2}{}^{2,221} - 2K_{ij}^{C3}{}^{2,212}) \delta_{2j} - 2\omega M_{ij}^{31} \delta_{1j} ] = 0 \quad (10)
\end{aligned}$$

여기서

$$M_{ij}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{ki} \varphi_{lj} d\xi d\eta$$

$$K_{ij}^{Sa kl, mn} = A_{ij}^a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{ki, \Gamma_m} \varphi_{lj, \Gamma_n} d\xi d\eta$$

$$K_{ij}^{Ca k, lmn} = B_{ij}^a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{ki, \Gamma} \varphi_{3j, \Gamma_m \Gamma_n} d\xi d\eta$$

$$K_{ij}^{Ba kl, mn} = D_{ij}^a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{3i, \Gamma_m \Gamma_n} \varphi_{3j, \Gamma_m \Gamma_n} d\xi d\eta$$

$$K_{ij}^{GX1} = \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi) \varphi_{3i,\xi} \varphi_{3j,\xi} d\xi d\eta$$

$$K_{ij}^{GX2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\xi^2) \varphi_{3i,\xi} \varphi_{3j,\xi} d\xi d\eta$$

여기서 함수의 아래첨자중 쉼표 뒤에 나타나는 것들은 이들에 대한 편미분을 나타내는데  $\Gamma_m$ 은  $m=1$ 이면  $\xi$ 를,  $m=2$ 이면  $\eta$ 를 의미한다.

식(8),(9),(10)은 하나의 행렬 방정식 형태로 다음과 같이 표기 할 수 있다.

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{ij}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{ij}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ij}^{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\omega M_{ij}^{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\omega M_{ij}^{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 Matrix  $\mathbf{K}$  는 대칭이며, 각 요소행렬은 다음과 같다.

$$K_{11} = -\omega^2 M^{11} + K^S 11,11 + K^S 11,12 + K^S 11,21 + K^S 11,22$$

$$K_{12} = K_{21} = K^S 12,22 + K^S 12,12 + K^S 12,11 + K^S 12,21$$

$$K_{13} = K_{31} = -K^C 1,111 - K^C 1,122 - K^C 1,211 - 2K^C 1,112 - K^C 1,222 - 2K^C 1,212$$

$$K_{22} = K^S 12,22 + K^S 12,12 + K^S 12,11 + K^S 12,21$$

$$K_{23} = K_{32} = -K^C 2,211 - K^C 2,222 - K^C 2,111 - K^C 2,122 - 2K^C 2,212 - 2K^C 2,112$$

$$K_{33} = -\omega^2 M^{33} + K^B 11,11 + K^B 11,22 + K^B 22,11$$

$$+ K^B 22,22 + 2K^B 11,12 + 2K^B 12,11$$

$$+ 2K^B 22,12 + 2K^B 12,22 + 4K^B 12,12$$

$$+ \sigma \omega^2 K^{GX1} + \omega^2 K^{GX2}$$

식 (11)을 다음과 같이 변환한다.

$$\mathbf{M}^* \bar{\eta} + \mathbf{K}^* \eta = 0 \quad (15)$$

여기서

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{Bmatrix} \bar{\eta} \\ \theta \end{Bmatrix}$$

복소모드 해석을 위해 열행렬  $\eta$ 를 다음과 같이 변수분리 한다.

$$\eta = e^{\lambda t} \Theta \quad (16)$$

여기서  $\lambda$ 는 복소수 값의 고유치이고,  $\Theta$ 는 모드형상을 나타내는 열행렬이다. 식(16)을 (15)에 대입하여 정리하면,

$$\lambda \mathbf{M}^* \Theta + \mathbf{K}^* \Theta = 0 \quad (17)$$

본 논문에서는 식 (17)에 근거하여 복소모드 해석 방법을 이용해 수치해석을 수행하였다.

### 3. 수치 해석

본 장에서는 2장에서 유도된 진동방정식에 근거하여 수치해석을 수행하였으며, 모드함수들은 가로(bending modes)와 세로(free modes) 방향 보함수들을(beam function) 이용하여 구성하며 그 상세한 과정은 참고문헌[13~15]에 잘 나타나 있다. 우선 복합재 평판이 회전하지 않는 경우에 대해서 제안된 방법에 의한 해석결과를 상용 구조해석 프로그램인 ANSYS의 해석결과와 비교하였다. 해석에 사용된 평판은 8개의 층으로 이루어졌으며 섬유 배열(fiber orientation)은  $[0,45,-45,90]_s$  이다. 복합재 평판의 재질은 T300/5208이며 Table 1에 물성치를 나타내었다.

Table 2에서 보는바와 같이 본 논문에서 제시된 모델링의 결과와 ANSYS에 의한 가장 낮은 6개의 고유진동수 결과가 서로 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

Table 1 Material properties of the composite plate

Material	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
T300/5208	181	10.3	7.17	0.28

Table 2 Comparison of natural frequencies obtained by ANSYS and the present modeling

Mode	Present	ANSYS	Error(%)
1	1.0479	1.0422	0.55
2	1.9816	1.9567	1.27
3	4.6503	4.5453	2.31
4	6.6018	6.5249	1.18
5	8.0411	7.8710	2.16
6	10.0365	9.7834	2.58

Fig. 4는 섬유배열이 [0,45,-45,90]s인 복합재 평판의 회전 각속도 증가에 따른 가장 낮은 6개의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. 이 그림에서 흥미로운 것은 5번째와 6번째 고유진동수 궤적이  $\omega=7$  부근에서 횡현상(Natural Frequency Loci Veering)이 일어나고 또  $\omega=9$  부근에서 4번째와 5번째 고유진동수 궤적이 교차(Natural Frequency Loci Crossing)가 이루어진다는 점이다.

Fig. 5(a)는 평판이 회전하기 전의 모드 절선들을 나타내고 있으며 (b)는 회전속도비  $\omega=20$ 일 때의 모드 절선들을 나타내고 있다. 여기서 관찰할 수 있는 사실은 4~6번째 모드들이 서로 뒤바뀐 모습을 하고 있다는 것이다. 이것은 Fig. 4에서 보듯이 회전각속도의 증가에 따라 이들 모드들간에 고유진동수 궤적의 횡 및 교차현상이 일어나기 때문이다. 이와 같은 현상들에 대한 분석은 참고문헌[9]에 잘 나타나 있다. Fig. 5(a)에는 섬유의 배열이 중심면에 대해서 서로 대칭으로 적층되어 있음에도 불구하고 모드 절선들이 비대칭인 것을 알 수 있다. 그 이유는 식(5)의  $D_{ij}$  행렬중 굽힘과 비틀림의 연성효과를 나타내는  $D_{16}, D_{26}$ 항에 의해서 발생하는 것인데 이러한 현상은 참고문헌[17]에서도 동일한 현상을 확인 할 수 있다. 이러한 굽힘과 비틀림의 연성효과는 Fig. 5(b)에서 각속도가 증가함에 따라 사라지는 것처럼 보이는데 이것은 운동에 의한 강성(Motion-induced stiffness)변화항  $K^{GX1}, K^{GX2}$ 가 각속도가 증가하면 구조강성항에 비해 지배적이 되기 때문이다.

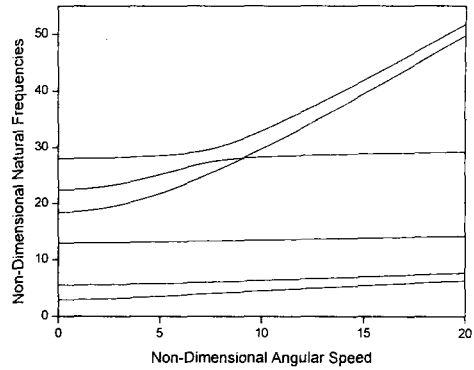
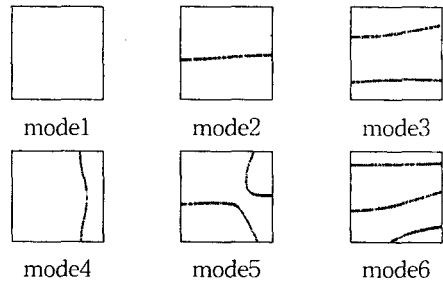
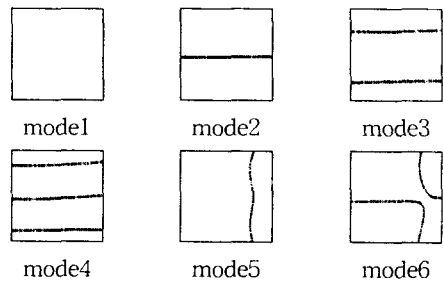


Fig. 4 Variation of the lowest six natural frequencies for rotating plate



(a) Lowest six mode shapes without rotation ( $\omega=0$ )

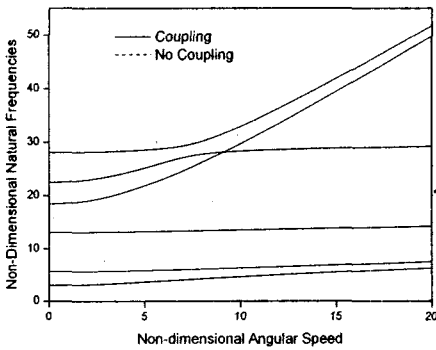


(b) Lowest six mode shapes with rotation ( $\omega=20$ )

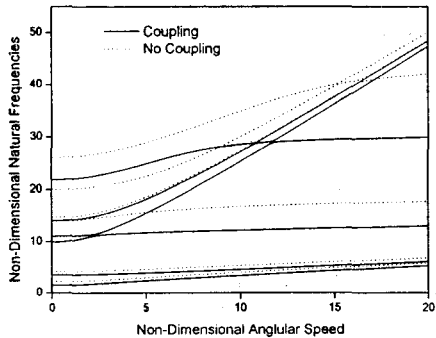
Fig. 5 Nodal line patterns of lowest six mode shapes with and without rotating motion

Fig. 6(a)는 섬유배열이 [0,45,-45,90]s인 복합재 평판의 회전각속도에 따른 고유진동수 궤적을 나타낸 것이다. 그림에서 실선은 인장과 굽힘운동간

의 연성효과가 고려된 결과이며, 점선은 연성효과가 고려되지 않은 결과이다. 그림에서 보는 것처럼 섬유배열이 평판의 중심선(Neutral axis)에서 대칭으로 적층되어 있을 때는 연성을 고려한 경우와 고려되지 않은 경우가 거의 동일한 결과를 나타내는 것을 알 수 있다. 그러나 Fig. 6의(b)는 섬유배열이 [10,20,30,40,50,60,70,80]인 평판(평판의 중심에서 대칭으로 적층되지 않음)의 고유진동수 궤적을 나타낸 것인데, 연성을 고려한 결과와 연성을 고려하지 않은 결과간에 상당한 차이가 나는 것을 알 수 있다. 이것은 평판의 섬유배열을 중심선에 대해 비대칭으로 적층하면 식(2)의 탄성에너지에서 인장과 굽힘의 연성항인  $B_{ij}$  행렬값이 0이 되지 않아 인장과 굽힘간 연성효과가 진동특성의 변화에 상당한 영향을 미치게 되는 것으로 분석된다.

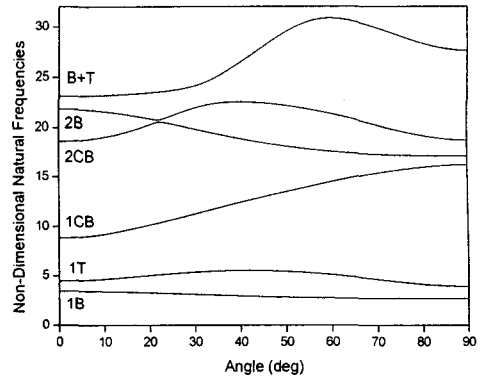


(a) Fiber orientation [0,45,-45,90]s

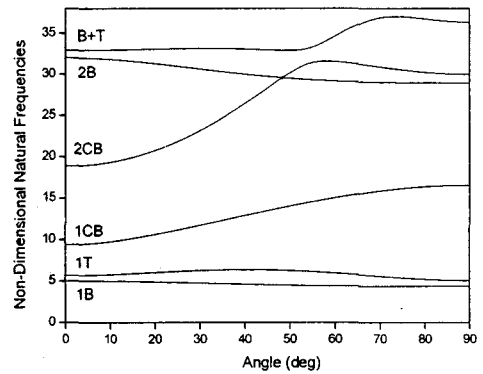


(b) Fiber orientation [10,20,30,40,50,60,70,80]

Fig. 6 Variation of the lowest six natural frequencies for rotating plate with and without coupling effect



(a)  $\omega=0$



(b)  $\omega=10$

Fig. 7 Variation of the lowest six natural frequencies due to fiber angle change

Fig. 7은  $[0, \theta, -\theta, 90]$ s로 적층된 평판을 각도  $\theta$ 의 변화에 따른 가장 낮은 6개의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. Fig. 7(a)는 평판이 회전하기 전의 고유진동수 궤적을 나타내고 있으며 (b)는  $\omega=10$  일 때의 고유진동수 궤적을 나타내고 있다. 이 그림은 Bending 모드들은 각도의 증가에 따라 고유진동수 값이 감소하는 반면, Chordwise Bending 모드들은 대체로 고유진동수 값이 증가하는 것을 보여준다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 회전 복합재 평판의 인장과 굽힘 방향 운동간 연성효과를 고려한 진동해석 모델링을 제시하였으며 수치해석을 수행하였다. 그 결과

평판의 회전 각속도 및 적층각도의 변화에 따른 고유진동수 궤적 변화와 이에 수반되는 모드 형태의 변화를 확인할 수 있었으며 고유진동수 궤적간 교차 및 휨 현상을 관찰 할 수 있었다. 특히 복합재 평판의 섬유각도를 중심면에 대해 비대칭으로 적층시켰을 경우에는 인장과 굽힘방향 방정식간에 연성효과를 고려해야만 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다. 본 연구에서 제시한 해석 방법은 섬유의 적층각도와 적층의 수를 변화시킴으로써 다양한 모드변화를 분석할 수 있어 회전하는 복합재 평판 구조물 설계시 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고 문헌

- (1) Kapania, R. K. and Raciti, S., 1989, "Nonlinear Vibrations of Unsymmetrically Laminated Beams", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 2, pp. 201-210.
- (2) Rand, O., 1991, "Periodic Response of Thin-Walled Composite Helicopter Rotor Blades", *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 4, pp. 3-11.
- (3) S. Mohamed Nabi and N. Ganesan, 1994, "A Generalized Element for the Free Vibration Analysis of Composite Beams", *Computers and Structures*, Vol. 51, pp. 607-610.
- (4) Kosmatka, J. B. and Friedmann, P. P., 1989, "Vibration Analysis of Composite Turbo-Propellers Using a Nonlinear Beam-Type Finite Element Approach", *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 11, pp. 1606-1614.
- (5) K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy and S. Roy, 1990, "Free Vibration of Composite Beams Including Rotary Inertia and Shear Deformation", *Composite Structures*, Vol. 14, pp. 269-279.
- (6) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 233-248.
- (7) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429-449.
- (8) H. H. Yoo and J. Chung, 2001, "Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motion", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 1, pp. 123-137.
- (9) 유흥희, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석", *대한기계학회논문집*, 제17권, 제3호, pp. 652-657.
- (10) Whitney, J. M., 1987, *Structural Analysis Of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Co. INC.
- (11) Y. Narita and A. W. Leissa, 1992, "Frequencies and Mode Shapes of Cantilevered Laminated Composite Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, pp. 161-172.
- (12) Ghosh, A. K., Dey, S. S., 1992, "Simple Finite Element for the Analysis of Laminated Plates", *Computers and Structures*, Vol. 44, pp. 585-596.
- (13) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 448-453.
- (14) Barton, M. V., 1951, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 129-134.
- (15) Leissa, A. W., 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP-160.
- (16) Stephen, W. Tsai and H. Thomas Hahn, 1980, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co. Inc.
- (17) T. Maeda, V. Baburaj, Y. Ito and T. Koga, 1998, "Flexural-Torsional Coupling Effect on Vibration Characteristics of Angle-Ply Laminates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, pp. 351-365.