

# 축방향으로 이동하며 길이가 변하는 연속체의 진동특성: 스파게티 문제에 응용

## Vibration Characteristics of the Axially Moving Continuum with Time-Varying Length: Spagetti Problem

°사재천\*, 이승엽\*\*, 이민형\*\*\*

Jaecheon Sa, Seung-Yop Lee, and Minhyung Lee

**Key Words** : Spagetti Problem(스파게티 문제), Axially Moving System(축방향 이동시스템), Traveling Wave(이동파), Free Vibration (자유진동), Phase Closure Principle (폐위상 원리), Energy Reflection Coefficient(에너지 반사계수)

### Abstract

Time-dependent frequency and energy of free vibration of the Spagetti problem, that is the axially moving continuum with time-varying length, are investigated. Exact expressions for the natural frequency and time-varying vibration energy are derived by dealing with traveling waves. When the string length is increased, the vibration period increases, but the free vibration energy varies as a function of both translating velocity and boundary velocity of the continuum. However, when the string undergoes retraction, the vibration energy increases with time. String tension together with non-zero instantaneous velocity at the moving boundary results in energy variation.

### 1. 서 론

스파게티 문제로 불리는 움직이는 연속체의 불안정성 문제는 1949년 Carrier<sup>1)</sup> 이래로 많은 연구가 있어왔다. 길이가 변하는 현이나 보와 같은 1차원 연속체는 많은 기계 시스템이나 구조물의 유연체(flexible system) 모델로 이용된다. 축방향으로 이동하며 길이가 변하는 유연계(axially moving system with time-varying length)의 진동 해석 및 제어 연구는 최근 들어서 우주항공 구조물의

안테나, 케이블, 태양 전지판 등과 같은 길이가 변하는 유연한 구조물(tethered structure)<sup>2, 4)</sup>이나 로봇 시스템의 유연한 조작기(flexible manipulator)<sup>5)</sup> 엘리베이터나 크레인 시스템<sup>6)</sup>에 응용되면서 국내외에서 활발히 연구되어 오고 있다.

축 방향으로 압축하중을 받는 보의 좌굴(buckling)과 유체와의 연성에 의해 일어나는 판의 플러터(flutter)는 연속체에서 발생하는 불안정성의 두 가지 유형이다. 스파게티 문제로 불리는 연속체가 길이가 감소하면서 보이는 진동 불안정성은 플러터에 해당된다. 유사한 진동계로 벨트, 체인, 테일등과 같이 길이는 변하지 않고 축 방향으로만 움직이는 연속체(axially moving continua)가 있으며 이에 대한 연구는 Wickert와 Mote<sup>7)</sup>나 Wang과 Liu<sup>8)</sup>의 논문에 잘 조사되어 있다. 움직이

\* 서강대학교 대학원 기계공학과

\*\* 서강대학교 공과대학 기계공학과, 정회원

\*\*\* 세종대학교 공과대학 기계공학과, 정회원

는 유체를 포함하는 유연한 파이프의 동적 거동도 플러터가 발생하는 연속체 시스템이다. 또 다른 경우로는 연속체 자체는 움직이지 않지만 길이가 변하는 경우로서 주로 현에 관련되어 연구되었다<sup>9-10</sup>. Lee와 Mote<sup>11-13</sup>는 일련의 논문을 통하여 길이는 일정하지만 축 방향으로 움직이는 연속체의 진동 특성을 이동파(traveling wave)를 사용하여 해석하였다. 또한 이동파가 연속체의 경계조건이나 다양한 연성 조건에서 반사될 때 생기는 진동 에너지의 변화 과정과 진동계의 동적 안정성을 해석하였다. 최근에는 이를 축방향으로는 움직이지 않으나 길이가 변하는 현에 적용하여 시간에 따라 변하는 연속체의 자유진동과 진동에너지 변화에 관한 엄밀해를 구하였다<sup>14</sup>.

길이가 일정하며 시간에 불변(time-invariant)하는 연속체의 진동은 수학적으로 고유치 문제의 해를 구하여 나타낼 수 있다. 시간에 따라 변하는 진동계의 특성은 비선형 진동계로서 Nafeh와 Mook<sup>15</sup>의 책 등에 기본적인 방법론들이 기술되어 있다. 길이가 변하는 연속체는 외부에서 힘이 가해지지 않는 자유진동 하에서도 진동계의 에너지가 증가할 수 있다.

본 논문은 Lee와 Mote<sup>11</sup>에 의해 연구되었던 길이가 일정하며 축 방향으로 움직이는 유연체에 적용되었던 이동파 방법을 축방향으로 현이 이동하며 길이가 변하는 연속체에 적용한다. 움직이는 경계에서 이동파가 반사할 때 생기는 주파수의 변화와 폐위상 원리(Phase closure principle)<sup>16-17</sup>를 이용하여 연속체의 진동 주기와 에너지 변화를 해석한다. 또한 이동파 방법으로 다양한 조건하에서 에너지 변화를 해석하여 길이가 줄어들 때 발생하는 플러터 불안정성을 이론적으로 규명한다.

## 2. 운동방정식과 이동파 특성

### 2.1 운동 방정식

길이가 변하며 이동하는 연속체 문제를 본 연구에서는 간단한 형태의 현으로 가정하여 시간에 따라 변하는 연속체의 진동 특성을 규명하려고 한다. 일정한 장력  $P$ 와 선밀도  $\rho$ 를 가지고 있는 현의 횡방향 진동(transverse vibration)에 대한 선형 운동방정식은 다음과 같다.

$$\rho \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v_s \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} + v_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

여기에서  $w(x, t)$ 는 횡방향 변위이며  $v_s$ 는 각각 연속체의 축방향 이동속도를 나타낸다. 연속체의 길이는  $l(t) = l_0 \pm vt$ 로서 시간에 따라서 일정한 속도  $v$ 로 증가하거나 감소한다. 여기서  $l_0$ 는 초기 길이를 나타낸다.

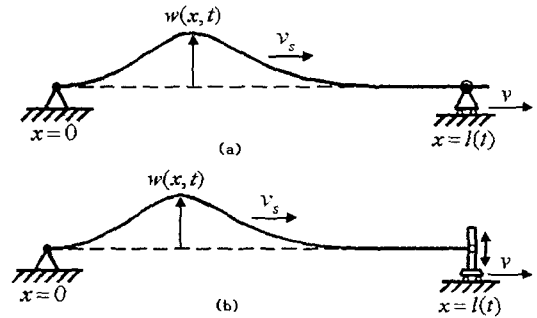


Fig. 1 The axially moving continuum with time-varying length (a) fixed-fixed (b) fixed-free boundary conditions

Fig. 1은 현이 축방향으로 이동하며 길이가 변하는 연속체를 나타낸 것이다. Fig. 1(a)는 현의 경계조건은 모두 고정되어 있으며

$$w(0, t) = w(l(t), t) = 0 \quad (2)$$

이고 Fig. 1(b)의 연속체는 한쪽 끝이 자유단이므로  $P \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$ 이 성립한다.

### 2.2 정상파와 이동파

현 자체가 이동하므로 발생하는 진동파의 이동 속도는 오른쪽으로 진행하는 경우는  $c + v_s$ 이며 왼쪽으로 진행하는 경우는  $c - v_s$ 로서 서로 다르게 된다. 여기서  $c = \sqrt{P/\rho}$ 로서 장력과 선밀도의 함수이다. 일반적으로 정상파(standing wave)로 표현되는 1차원 연속체의 고유 진동 모드는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad (3)$$

여기서  $\omega$ 와  $k$ 는 각각 주파수와 이동파 상수를 나타낸다. 또한 2차원 연속체는 같은 진폭의 서로 반대 방향으로 움직이는 두 개의 이동파로 나타낼 수 있다. 즉 다음과 같이 두 개의 독립적인 비분산(non-dispersive) 이동파로 표현할 수 있다.

$$w(x, t) = A_d e^{i(\omega t - k_d x)} + A_u e^{i(\omega t - k_u x)} \quad (4)$$

여기서 식(4)의 앞의 항은 오른쪽으로 진행되는 이동파를 둘째 항은 왼쪽으로 진행되는 이동파를 나타낸다. 식(3)을 식(1)에 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(c - v_s^2)k^2 + 2v\omega k - \omega^2 = 0 \quad (5)$$

여기서  $k$ 는 오른쪽으로 진행되는 이동파 상수  $k_d = \omega / (c + v_s)$ 와 왼쪽으로 진행되는 이동파 상수  $k_u = \omega / (c - v_s)$ 로 나타낼 수 있다. 경계조건이 없는 무한한 길이를 갖는 현은 모든 종류의 진동수를 가질 수 있으나 경계조건이 있는 유한한 길이의 현은 특정한 값의 고유 진동수를 갖게 된다. 길이가 일정한 현의 경우

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l_0} \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

의 고유 진동수를 갖는 무한개의 정규 모드로서 자유진동을 나타낸다.

### 3. 현이 이동하고 길이가 변하는 연속체의 진동 주기와 진동에너지

#### 3.1 폐위상 원리(Phase closure principle)

길이가 일정한 현은 조화진동시 정상파의 형태를 갖기 때문에 현의 모든 점이 같은 위상을 가지며 진동주기는  $T = 2\pi/\omega_n$ 으로 일정하다. 그러나 현이 이동하고 길이가 변하는 현의 경우 조화진동시 현의 모든 점이 다 같은 위상을 갖지 않으며 진동 주기 또한 시간에 따라 변하게 된다. 현의 길이가 일정한 비율로 변화할 때 폐위상 원리(Phase closure principle)를 이용하여 진동주기를 구할 수 있다. 현과 길이가 변하는 연속체에서 위상 변화는 오른쪽 경계에서 왼쪽 경계로 이동하는 파의 위상 변화  $k_d(l_0 + vT)$ 와 왼쪽경계에서 오른쪽 경계로 이동하는 파의 위상 변화  $k_u l_0$ 으로 표현된다. 파가 영역내에서 이동할 때 총 위상 변화는 다음과 같다.

$$k_d(l_0 + vT) + k_u l_0 + \phi_d + \phi_u \quad (7)$$

여기서  $\phi_d$ 와  $\phi_u$ 는 각각 오른쪽 경계와 왼쪽 경계에서의 위상변화를 나타낸다. 폐위상 원리에 의하면 총위상 변화는  $2\pi$ 에 정수곱이므로 식 (5)와 (7)을 이용하여 현이 이동하며 길이가 변하는 연속체의 총 위상차이는

$$\omega \left( \frac{l_0}{c - v_s} + \frac{l_0 + vT}{c + v_s} \right) + \pi + \pi = 2\pi n \quad (8)$$

로 표현된다. 식 (8)을 정리하여 고유주파수를 구하면

$$\omega_n = \frac{n\pi(c + v_s - v)(c - v_s)}{cl_0}, \quad (9)$$

이다. 기본 모드의 진동 주기는  $T = 2\pi/\omega_n$ 이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_1 = \frac{2cl_0}{(c + v_s - v)(c - v_s)} \quad (10)$$

기본 진동 모드의 두 번째 주기를 같은 방법으로 구하면  $T_2 = 2cl_1 / (c + v_s - v)(c - v_s)$ 이 된다. 여기에서  $l_1$ 은 시간이  $T_1$ 일 때의 현의 길이 즉,  $l_1 = l_0 + vT_1$ 이다. 이 때 초기길이  $l_0$ 에서 이동파가 두 번째로 양쪽 경계를 모두 통과하여 본래의 위상을 회복하는데 걸리는 총 시간은 첫 번째 주기와 두 번째 주기를 더한  $t_2 = T_1 + T_2$ 가 된다. 이와 같은 과정을 반복하면 진동 모드의  $n$ 번째까지의 소요된 시간은

$$t_n = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{2cl_{n-1}}{(c + v_s - v)(c - v_s)} \quad (11)$$

로 표현된다. 여기에서 시간  $t_n$ 일 때의 현의 길이는  $l_n = l_{n-1} + vt_n$ 이다. 길이가 줄어드는 현에 대해서는 위의 식(11)에  $-v$ 를 대입하면 구해진다.

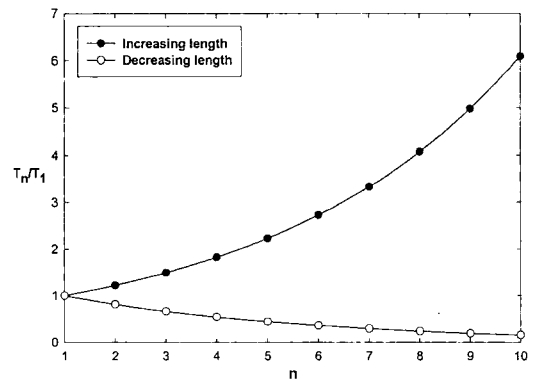


Fig. 2 Vibration period the axially moving string with time-varying length when  $v = v_s = 0.1c/l_0$

Fig. 2는 현이 이동하며 길이가 변할 때 주기의 변화를 보여주고 있다. 여기서 길이 및 현의 이동 속도는  $v = 0.1c/l_0$ 인 경우에 대해서 구해졌다. 각 주기와 첫 번째 주기와와의 비율은 길이가 늘어나면

서 증가하고 길이가 줄어들면서 감소한다. 현이 축 방향으로 이동하고 길이가 변하는 연속체에서 한 쪽 끝이 자유단일 경우 위의 경우와 같은 폐위상 원리를 이용하여 고유주파수와 진동 주기를 구하면

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi(c+v_s-2v)(c-v_s)}{2cl_{n-1}} \quad (12)$$

$$T_n = \frac{4cl_{n-1}}{(c+v_s-2v)(c-v_s)} \quad (13)$$

로 표현된다. Table 1은 다양한 연속체의 경계조건에 따른 고유주파수를 나타낸 것이다. 앞에서 유도된 스파게티 현의 시간에 따라 변하는 고유진동수와 주기는 연속체의 길이가 일정한 경우 ( $v=0$ ) 나 축방향으로 이동하지 않는 경우 ( $v_s=0$ )의 경우를 모두 포함한다.

Table 1 Natural frequencies for various cases

| Fixed-Fixed            |   |
|------------------------|---|
| $v \neq 0, v_s \neq 0$ | $\omega_{n,s} = \frac{n\pi(c+v_s-v)(c-v_s)}{cl_{n-1}}$    |
| $v = 0$                | $\omega_n = \frac{n\pi(c+v_s)(c-v_s)}{cl_{n-1}}$          |
| $v_s = 0$              | $\omega_n = \frac{n\pi(c-v)}{l_{n-1}}$                    |
| Fixed-Free             |   |
| $v \neq 0, v_s \neq 0$ | $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi(c+v_s-2v)(c-v_s)}{2cl_{n-1}}$ |
| $v = 0$                | $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi(c+v_s)(c-v_s)}{2cl_{n-1}}$    |
| $v_s = 0$              | $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi(c-2v)}{2l_{n-1}}$             |

### 3.2 모드 변화

현이 축방향으로 이동하며 길이가 변하는 연속체의 경우 진동 주기를 이동파 방법을 이용하여 구할 수 있다. 그리고 자유진동시 초기조건에 정상파를 이동파로 분리하여 시간의 함수로 이동파의 변화를 계산하여 두 이동파를 합하면 임의의 시간의 연속체의 진동을 표현할 수 있다. 길이가 일정하게 변하는 현의 진행하는 이동파의 초기 진폭은 동일하다. 하지만 현이 축방향으로 이동하고 길이가 변하는 연속체는 오른쪽으로 진행하는 이동파와 왼쪽으로 진행하는 이동파의 진폭이 다르다. 이동파의 진폭비는 에너지의 비와 비례하므로 다

음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{A_u}{A_d} = \frac{E_u}{E_d} = \frac{(c+v_s)^2}{(c-v_s)^2} \quad (14)$$

따라서 각각의 진폭을 구하면

$$A_d = \frac{(c-v_s)^2}{(c-v_s)^2 + (c+v_s)^2}$$

$$A_u = \frac{(c+v_s)^2}{(c-v_s)^2 + (c+v_s)^2} \quad (15)$$

이다. 위의 식으로 초기진폭을 구한 후 이동파 방법을 이용하여 연속체의 모드변화를 표현할 수 있다.

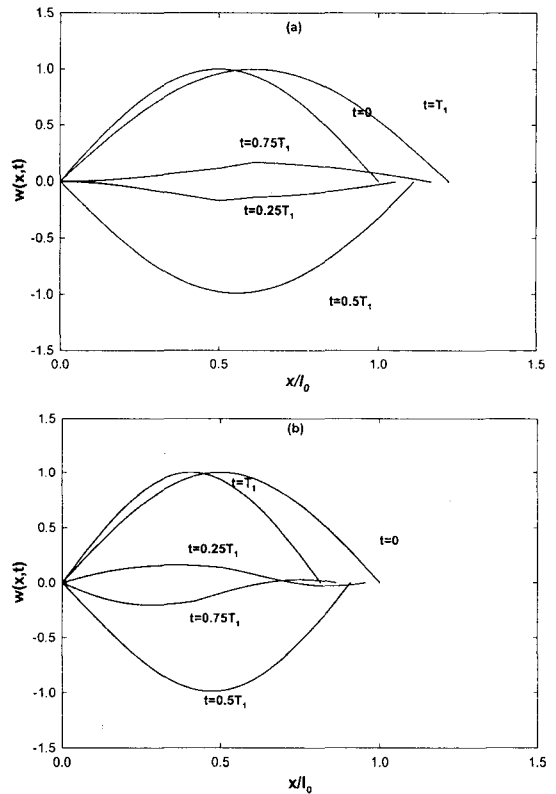


Fig. 3 Variation of the first mode during a period  $T_1$  when  $v=v_s=0.1c/l_0$  for the fixed-fixed boundary conditions (a) increasing length (b) decreasing length

Fig. 3은 현이 축 방향 이동 속도와 길이가 변하는 속도가 같은 경우  $v=v_s=0.1c/l_0$ 에 대해서 첫 번째 진동모드의 초기 정상파가 한 주기 동안 변화하는 모습을 보여준다.  $t=0$ 일 때는 연속체의 모든 점들이 같은 위상을 가지고 자유진동을 시작하

지만 다음 주기까지는  $x$ 좌표 거리에 따라 위상이 다르게 나타난다. 길이가 일정한 현의 경우 정상파는  $t=0.25T_1$  및  $0.75T_1$ 일 때 현의 위상이  $90^\circ$ 와  $270^\circ$ 가 되어 종방향 변위가 제로이지만 길이가 변할 때는 현의 점들간에 위상차가 생김으로 어떤 부분에서는 변위가 제로가 아님을 볼 수 있다.

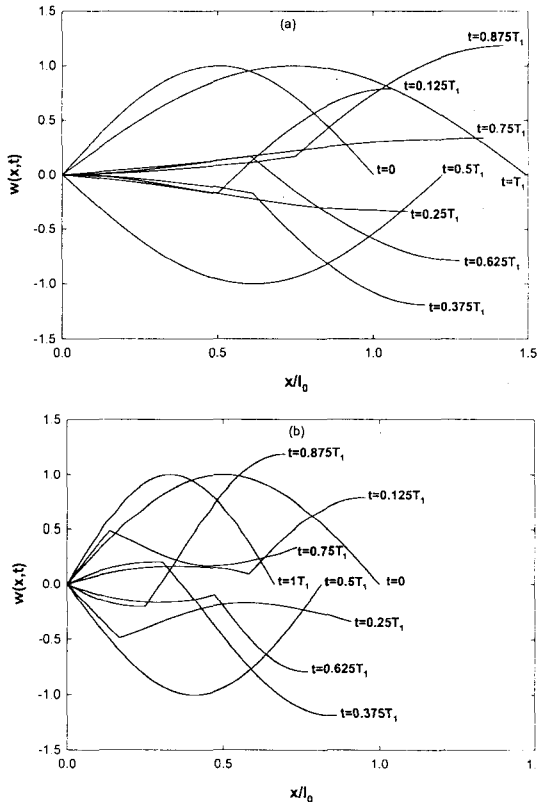


Fig. 4 Variation of the first mode during a period  $T_1$  when  $v=v_s=0.1c/l_0$  for the fixed-free boundary conditions (a) increasing length (b) decreasing length

Fig. 4(a)와 (b)는 현이 축방향으로 이동하며 길이가 변하는 연속체에서 한쪽끝이 자유단인 경우 길이가  $v=0.1c/l_0$ 의 속도로 증가할 때와 감소할 때 첫 번째 진동모드 변화를 나타낸 것이다. 한 주기 동안 자유단 끝에서의 현의 변위가 매우 크게 됨을 볼 수 있는데 이는 스파게티의 문제와 일치한다. 자유단의 경계조건에서는 고정단에서 한 주기 동안의 연속체의 움직인 거리보다 더 많이 이동하게 된다. 이것은 이동파의 한 주기 동안 걸리는 시간이 더 많이 걸리기 때문이다.

### 3.3 에너지 반사계수

진동하고 있는 현의 총 기계적 에너지는 연속체의 운동에너지와 장력에 의해 생기는 위치에너지의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [\rho(w_t + v_s w_x)^2 + Pw_x^2] dx \quad (16)$$

여기서  $w(x, t)$ 의 아래첨자는 편미분을 의미한다.

주파수가  $\omega$ 이고 진폭이  $A$ 인 이동파  $Ae^{i(\omega t - kx)}$ 가 현을 따라 이동할 때 현의 한 파장  $\lambda$ 속에 포함된 에너지는

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \int_x^{x+\lambda} [\rho(w_t + v w_x)^2 + Pw_x^2] dx \quad (17) \\ = \pi P k A^2 = \pi \omega Z A^2$$

이다. 여기서  $Z = P/c$ 는 연속체의 기계적인 임피던스(impedance)를 나타낸다. 이동파가 속도  $v$ 로 움직이는 연속체의 경계에서 반사될 때 이동파 진동 에너지의 변화는

$$\Delta W = E_r - E_i = \pi(\omega_r Z_r A_r^2 - \omega_i Z_i A_i^2) \quad (18)$$

로 정해진다. 여기에서 아래첨자  $i$ 와  $r$ 은 입사파와 반사파를 의미한다. 현이 이동하며 길이가 변하는 연속체에서 이동파의 에너지 변화를 나타내기 위해 입사파와 반사파의 진동에너지의 비인 에너지 반사계수(energy reflection coefficient)를 다음과 같이 정의한다.

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\omega_r Z_r}{\omega_i Z_i} r^2 \quad (19)$$

여기서  $r = A_r/A_i$ 은 입사파와 반사파의 진폭의 비를 나타내고 일반적으로 반사계수 (reflection coefficient)라 한다. 길이가 일정한 연속체의 경우 입사파와 반사파의 임피던스 비나 주파수의 비는 동일하기 때문에 에너지 반사계수는  $R=r^2$ 로서 반사계수로만으로 구해진다. 그리고 현의 길이가 늘어나는 경우 ( $\omega_i \neq \omega_r$ )나 벨트나 테이프처럼 길이는 일정하지만 현이 축방향으로 이동하는 경우 ( $Z_i \neq Z_r$ )에는 입사파와 반사파의 진폭이 동일한 ( $r=1$ ) 경우에도 진동에너지가 다르게 된다 ( $R \neq 1$ ). 길이가 변하고 현이 축방향으로 이동하는 경우 ( $\omega_i \neq \omega_r, Z_i \neq Z_r$ )는 현의 이동 속도  $v_s$ 와 경계 속도  $v$ 에 따라 진동에너지가 다르게 된다.

### 3.4 진동에너지의 변화

현이 축방향으로 이동하며 길이가 변하는 연속체에서 속도  $v$ 로 움직이는 오른쪽 경계는 현의 변위가 항상 제로인 고정단이므로 반사파의 진폭은 입사파와 같게 ( $r=1$ ) 되지만 현이 축방향으로 이동하므로 임피던스는 다르게 ( $Z_i \neq Z_r$ ) 되고 움직이는 경계에서 이동파가 반사되기 때문에 주파수도 달라진다 ( $\omega_i \neq \omega_r$ ). 즉 식 (19)로부터 에너지 반사계수는

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\omega_r Z_r}{\omega_i Z_i} \quad (20)$$

로서 입사파와 반사파의 주파수와 임피던스의 비로 나타낼 수 있다. 기본 진동 모드의 파장은 현의 길이의 2배가 되고 주파수의 비는 주기의 비나 파장의 비와 역수의 관계를 가지고 있으므로 현이 축방향으로 이동하고 길이가  $v$ 의 속도로 늘어날 때 식 (20)은

$$R = \frac{T_i}{T_r} \cdot \frac{Z_r}{Z_i} = \frac{l_0}{l_0 + vT_1} \cdot \frac{c + v_s}{c - v_s} \quad (21)$$

$$= \frac{(c + v_s - v)(c + v_s)}{(c + v_s - v)(c - v_s) + 2vc}$$

로 표현된다. 여기서  $T_i$ 와  $T_r$ 은 각각 입사파와 반사파의 주기이다. 식 (21)은 에너지 반사계수를 현의 이동속도  $v_s$ 와 경계의 움직이는 속도  $v$ 의 함수로 나타낼 수 있음을 보여준다. 현의 길이가 늘어날 때 경계속도와 현의 이동속도  $v = v_s$ 이면 에너지 반사계수가  $R=1$ 이 되므로 이동파의 진동에너지가 시간에 따라 일정한 값을 갖게 된다. 또한  $v > v_s$ 이면 에너지 반사계수가  $R < 1$ 이므로 시간에 따라 이동파의 진동에너지가 일정한 비율로 감소하게 된다. 하지만  $v < v_s$ 이면 에너지 반사계수가  $R > 1$ 이 되어 진동에너지가 증가하게 된다. 초기 진동에너지  $E_0$ 에 대해서  $n$ 번째 기본 진동 주기 후에 진동에너지는

$$E_n = E_0 R^n \quad (2)$$

로 주어진다. 이와는 반대로 길이가 줄어들 때에는

$$R = \frac{(c - v_s + v)(c - v_s)}{(c - v_s + v)(c + v_s) - 2vc} \quad (23)$$

로서 항상 에너지 반사계수가  $R > 1$ 이 되므로 이동파의 진동에너지가 시간에 따라 일정한 비율로 증가하게 된다. 여기에서  $c/l_0 = 1$ 로 정규화하여

계산하였다. Fig. 5와 6은  $v=0.1$ 의 속도로 늘어날 때와 줄어 들 때 현의 이동속도  $v_s$ 에 따라 변하는 진동에너지를 나타낸다.

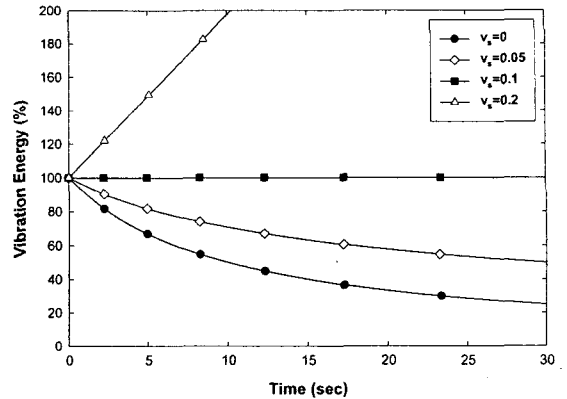


Fig. 5 Free vibration energy when the length increases at  $v=0.1$  (fixed-fixed case)

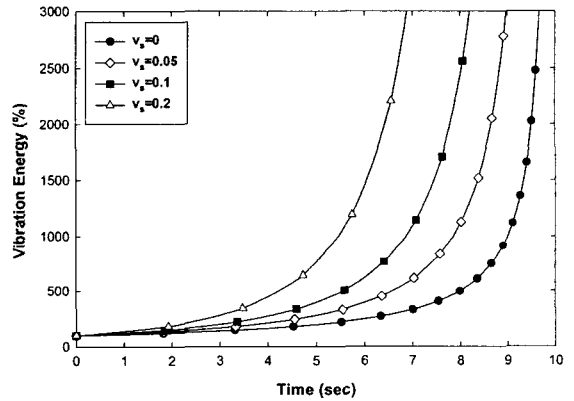


Fig. 6 Free vibration energy when the length decreases at  $v=0.1$  (fixed-fixed case)

Fig. 5는 고정단의 경우 길이가 늘어날 때 시간에 따라 진동에너지가 감소함을 볼 수 있다 하지만 경계속도  $v$ 와 현의 이동속도  $v_s$ 이 같을 때 연속체의 진동에너지는 동일하게 나타난다. 에너지 반사계수는 이동파 전체가 반사된 후 같은 위상을 갖게 될 때이므로 각 주기에 해당하는 시간에 대해서만 구해졌다.  $v=0.1$ 의 속도로 길이가 줄어들 때 진동에너지는 시간이 경과함에 따라 급격히 증가함을 볼 수 있다 (Fig. 6). 현의 이동속도  $v_s=0$  일 때 시간이 현의 길이가 제로가 되는  $t \rightarrow 10$ 초로 접근하면서 진동 주기는 제로로 접근하며 진동

에너지는 무한대로 증가함을 알 수 있다. 또한 현의 이동속도  $v_s$ 가 증가함으로써 시간에 따라 진동 에너지가 급격하게 변화됨을 알 수 있다. 현의 이동속도  $v_s=0.2$ 일 때 한 주기를 경과한 후 진동 에너지는 초기 진동 에너지  $E_0$ 의 185%가 되며 세 번째 주기가 경과한 후  $t_3=4.73$ 에서 진동 에너지  $E_0$ 의 641%로서 급격하게 증가하게 된다. 이러한 진동 에너지 증가는 현의 동적 불안정성을 초래한다. 이처럼 자유 진동 에너지의 증가는 줄어드는 경계를 움직이는데 사용되는 외부 동력 에너지가 경계에서 이동과 반사할 때 진동 에너지로 흘러 들어가게 된다.

현이 축 방향으로 이동하고 길이가 변하는 연속체에서 한쪽 끝이 자유단일 때 에너지 반사계수와 진동 에너지는 고정단에서의 동일한 방법으로 계산하면 다음과 같다.

$$R = \frac{(c + v_s - 2v)(c + v_s)}{(c + v_s - 2v)(c - v_s) + 4vc} \quad (24)$$

길이가 늘어날 때 초기 진동 에너지  $E_0$ 에 대해서  $n$ 번째 기본 진동 주기 후에 진동 에너지는

$$E_n = E_0 \cdot \left( \frac{(c + v_s - 2v)(c + v_s)}{(c + v_s - 2v)(c - v_s) + 4vc} \right)^n \quad (25)$$

Fig. 7과 8은 한쪽 끝이 자유단인 연속체에서  $v=0.1$ 의 속도로 늘어날 때와 줄어드는 때 현의 이동속도  $v_s$ 에 따라 변하는 진동 에너지를 나타낸다. 연속체의 길이가 늘어날 때 진동 에너지는 감소함을 알 수 있다(Fig. 7). 하지만 현의 이동속도가 경계속도의 2배( $v_s=2v$ )가 되면 진동 에너지가 시간에 따라 동일하게 나타나고 그 이상일 경우 진동 에너지가 증가하게 된다. 자유단일 때 고정단에서의 진동 에너지 비율보다 더 느리게 감소하게 된다. Fig. 8은 자유단에서의 길이가  $v=0.1$ 의 속도로 줄어드는 때 진동 에너지의 변화를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 시간이 경과함에 따라 급격히 증가함을 볼 수 있다. 현의 이동속도  $v_s=0.2$ 일 때 한 주기를 경과한 후 진동 에너지는 초기 진동 에너지  $E_0$ 의 233%가 되며 세 번째 주기가 경과한 후  $t_3=7.34$ 에서 진동 에너지  $E_0$ 의 1270%로서 고정단에서의 진동 에너지의 두배의 비율로 급격하게 증가하게 된다. 이상에서 살펴본 바와 같이 스파게티 문제와 같이 연속체의 길이가 줄어드는 경우에 진

동 에너지가 시간에 따라 매우 크게 증가함을 살펴 보았고 특별히 자유단의 경우에는 그 효과가 더욱 큼을 알 수 있다.

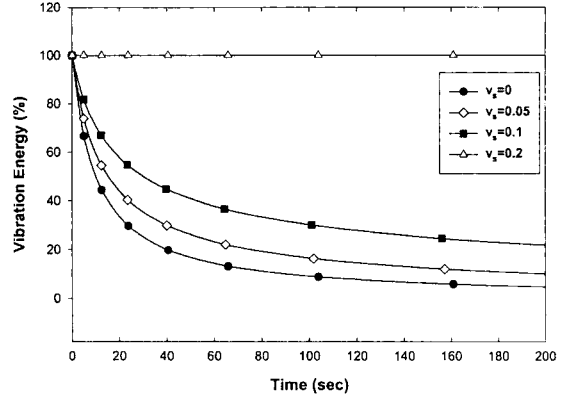


Fig. 7 Free vibration energy when the length increases at  $v=0.1$  (fixed-free case)

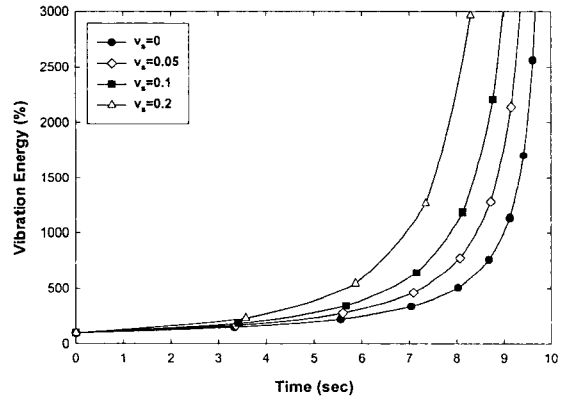


Fig. 8 Free vibration energy when the length decreases at  $v=0.1$  (fixed-free case)

#### 4. 결론

본 연구에서는 현이 축 방향으로 이동하며 길이가 일정 속도로 변하는 연속체의 진동 주기와 진동 에너지의 변화를 이동과 방법을 사용하여 엄밀해를 구하였다. 현이 이동하며 길이가 변함으로 초래되는 진동 주기의 변화를 이동과 현의 양쪽 경계를 진행하는 시간을 계산하여 구하였고 에너지 반사계수를 길이의 변화 속도와 이동과 속도의 함수로 정의하여 자유진동시 진동 에너지의 변화를 정확하게 예측하였다. 현의 이동속도  $v_s$ 와 경계속도

$v$ 로 길이가 늘어나는 경우는 기본 모드의 진동 주기는 시간에 따라 증가하게 되며 진동에너지는  $v \geq v_0$ 일 때 에너지 반사계수가  $R < 1$ 이 되어 감소하게 된다. 길이가 줄어드는 경우에는 반대로 에너지 반사계수가  $R > 1$ 이 되어 자유진동 에너지가 시간에 따라 계속적으로 증가하게 된다.

길이가 줄어들 때 발생하는 현의 동적 불안정성은 이와 유사한 고전적인 1차원 연속체의 불안정성의 문제인 스파게티의 풀러터 현상을 설명한다. 본 연구에서 수행된 현이 축방향으로 이동하며 시간에 따라 변하는 길이가 변하는 연속체의 자유진동 해석은 그동안 근사적으로 구하였던 스파게티의 문제에 대한 진동 에너지의 변화를 정확하게 예측하는 이용될 것이며 향후 길이가 변하는 로봇의 유연한 조차기, 우주 항공 구조물 다양한 기계 시스템에 연구에 응용될 수 있을 것이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제번호 1999-1-304-004-2)의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Carrier, G. F., 1949, "The Spaghetti Problem," American Mathematical Monthly, Vol. 56, pp. 669-672.
- (2) K. Tsuchiya, 1983, "Dynamics of a spacecraft during extension of flexible appendages," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, pp. 100-103.
- (3) Janice D. Downer and K. C. Park, 1993, "Formulation and Solution of Inverse Spaghetti Problem: Application to Beam Deployment Dynamics," AIAA Journal, Vol. 31, pp. 339-347.
- (4) Ehud Netzer and Thomas R. Kane, 1993, "Deployment and Retrieval Optimization of a Tethered Satellite System," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, pp. 1085-1091.
- (5) J. Yuh and T. Young, 1991, "Dynamics modeling of an axially moving beam in rotation: simulation and experiment," Journal of Mechanical Systems, Measurement and Control, vol. 113, pp.34-40.
- (6) Terumichi, Y., Ohtsuka, M., et al., 1993, "Nonstationary Vibrations of a String with Time-Varying Length and a Mass-Spring System Attached at the Lower End.", ASME Winter Annual Meeting, DE-Vol. 56, pp. 63-69
- (7) Wickert, J. A., and Mote, C. D., 1988, "Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials." Shock and Vibration Digest, Vol. 20, pp. 3-13.
- (8) Liu, S. P., and Wang, K. W., 1991, "On the Noise and Vibration Chain Drive System." Shock and Vibration Digest, Vol. 23, pp. 8-13.
- (9) Yamamoto, T., Yasuda, K., and Kato, M., 1978, "Vibrations of a String with Time-variable Length." Bulletin of JSME, Vol. 21, pp. 1677-1684.
- (10) Kotera, T., 1978, "Vibrations of String with Time-varying Length." Bulletin of JSME, Vol. 21, pp. 1469-1474.
- (11) Lee, S.-Y., and Mote, C. D., 1996, "Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control." Mechanical Engineers, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 118, pp. 66-74.
- (12) Lee, S.-Y., and Mote, C. D., 1997, "A Generalized Treatment of the Energetics of Translating Continua, Part I: Strings and Tensioned Pipes." Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, pp. 735-753.
- (13) Lee, S.-Y., and Mote C. D., 1998, "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints: Energy Transfer and Mode Localization," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, pp. 1-22.
- (14) 이승엽, 박상규, 1999, "길이가 변하는 현의 자유진동 특성," 한국소음진동공학회지 9권 5호, pp. 906-913.
- (15) Nafeh, A. H., and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons.
- (16) L. Cremer, M. Heckel and E. E. Ungar, 1988, Structure-Borne Sound, Berlin: Springer-Verlag.
- (17) D. J. Mead, 1994, "Waves and modes in finite beams: application of the phase-closure principle," Journal of Sound and Vibration, Vol. 171, pp. 695-702.